Coloraciones de gráficas planas sin caras heterocromáticas

AMANDA MONTEJANO

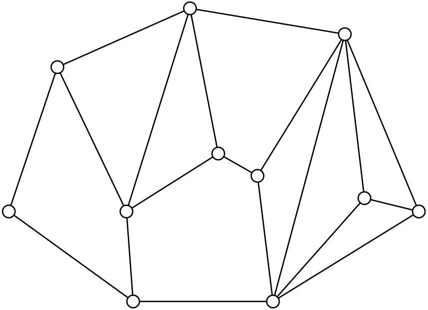
Facultad de Ciencias UNAM-Juriquilla

Trabajo conjunto con JORGE AROCHA

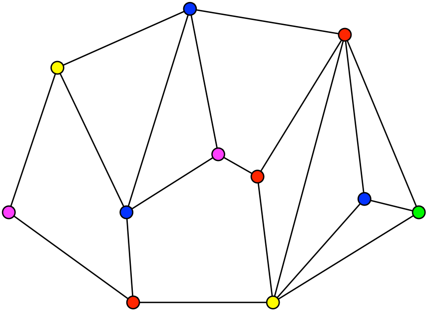
XXVIII Coloquio Víctor Neumann-Lara de Teoría de las Gráficas, Combinatoria y sus Aplicaciones

Morelia, Michoacán. 4 al 8 de marzo del 2013.

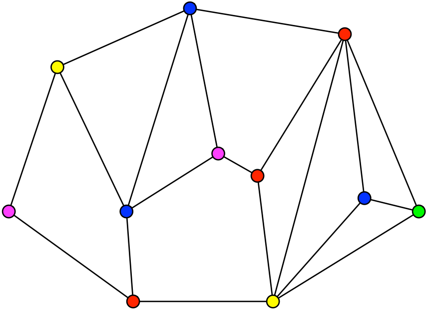
Definiciones básicas



Definiciones básicas



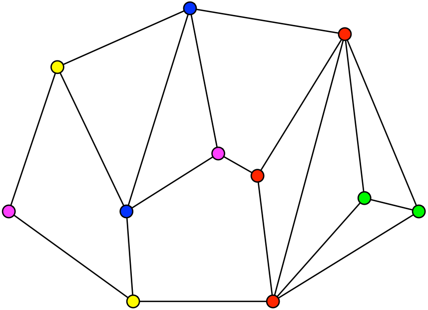
Definiciones básicas



una cara heterocromática

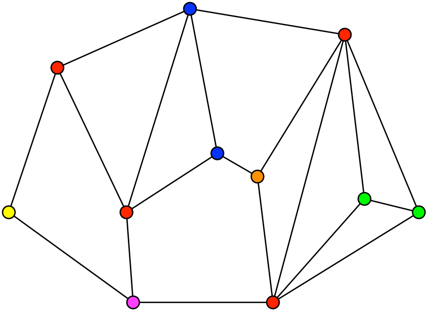
Definiciones básicas

una coloración no-heterocromática



Definiciones básicas

una coloración no-heterocromática



con el máximo número de colores

Definiciones básicas

- $\chi_f(G)$ es el máximo k tal que existe una k–coloración no-heterocromática de G.
- $\chi_f(G)+1$ es el mínimo k tal que toda k–coloración de G contiene una cara heterocromática.

Definiciones básicas

- $\chi_f(G)$ es el máximo k tal que existe una k–coloración no-heterocromática de G.

- $\chi_f(G) + 1$ es el mínimo k tal que toda k–coloración de G contiene una cara heterocromática.

Resultados preliminares

[Ramamurthi, West, 2004]

- estudiaron cotas inferiores justas

[Jendrol', 2006]

- determinó $\chi_f(G)$ para todos los poliedros semiregulares.

[Jungić, Král', Skrekovski, 2006]

- investigaron el problema para gráficas planas sin triángulos.

Resultados preliminares

[Ramamurthi, West, 2004]

- estudiaron cotas inferiores justas

[Jendrol', 2006]

- determinó $\chi_f(G)$ para todos los poliedros semiregulares.

[Jungić, Král', Skrekovski, 2006]

- investigaron el problema para gráficas planas sin triángulos.

Resultados preliminares

[Ramamurthi, West, 2004]

- estudiaron cotas inferiores justas

[Jendrol', 2006]

- determinó $\chi_f(G)$ para todos los poliedros semiregulares.

[Jungić, Král', Skrekovski, 2006]

- investigaron el problema para gráficas planas sin triángulos.

Resultados preliminares

[Dvořák, Král', Škrekovski, 2009]

- estudiaron cotas superiores para gráficas planas 3–, 4– y 5–conexas.

Teorema: Sea G una gráfica plana 3–conexa, entonces:

$$\chi_f(G) \leq \left\lfloor \frac{7n-8}{9} \right\rfloor$$

Resultados preliminares

[Dvořák, Kráľ, Škrekovski, 2009]

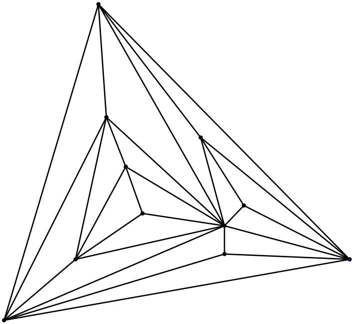
- estudiaron cotas superiores para gráficas planas 3–, 4– y 5–conexas.

Teorema: Sea G una gráfica plana 3–conexa, entonces:

$$\chi_f(G) \leq \left\lfloor \frac{7n-8}{9} \right\rfloor$$

El problema

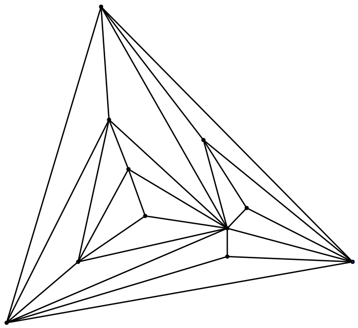
- encontrar una cota superior justa para gráficas planas maximales (en términos del orden)



- buscar gráficas planas maximales con $\chi_f(G)$ tan grande como sea posible

El problema

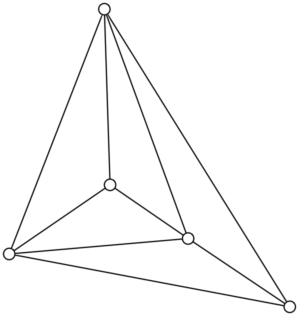
- encontrar una cota superior justa para gráficas planas maximales (en términos del orden)



- buscar gráficas planas maximales con $\chi_f(G)$ tan grande como sea posible

$$\alpha(G) + 1 \leq \chi_f(G)$$

$$\alpha(G) + 1 \leq \chi_f(G)$$

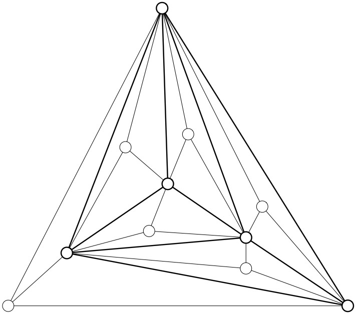


$$n + f - e = 2$$

$$2e = 3f$$

$$f = 2n - 4$$

$$\alpha(G) + 1 \leq \chi_f(G)$$



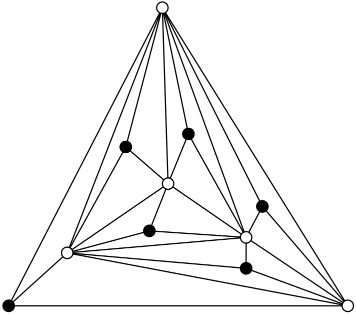
$$n + f - e = 2$$

$$2e = 3f$$

$$f = 2n - 4$$

$$|G| = 3n - 4$$

$$\alpha(G) + 1 \leq \chi_f(G)$$



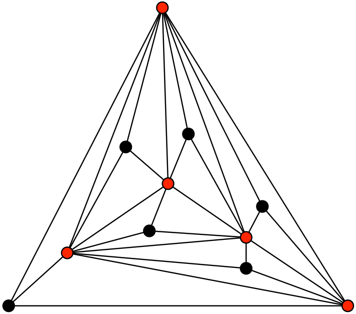
$$n + f - e = 2$$

$$2e = 3f$$

$$f = 2n - 4$$

$|G| = 3n - 4$ con un conjunto independiente de $\approx \frac{2}{3}|G|$

$$\alpha(G) + 1 \leq \chi_f(G)$$



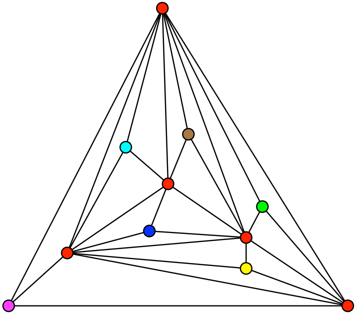
$$n + f - e = 2$$

$$2e = 3f$$

$$f = 2n - 4$$

$|G| = 3n - 4$ con un conjunto independiente de $\approx \frac{2}{3}|G|$

$$\alpha(G) + 1 \leq \chi_f(G)$$



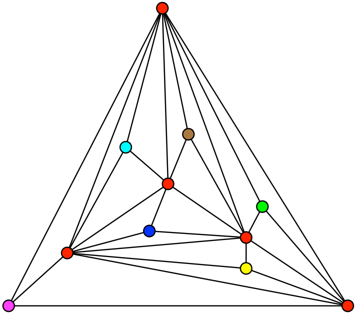
$$n + f - e = 2$$

$$2e = 3f$$

$$f = 2n - 4$$

$|G| = 3n - 4$ con un conjunto independiente de $\approx \frac{2}{3}|G|$

$$\left\lfloor \frac{2n-1}{3} \right\rfloor \leq \chi_f(G)$$



$$n + f - e = 2$$

$$2e = 3f$$

$$f = 2n - 4$$

$|G| = 3n - 4$ with an independent set of $\approx \frac{2}{3}|G|$

El resultado

Teorema. [Arocha, M]

Sea G una gráfica plana maximal, entonces $\chi_f(G) \leq \left\lfloor \frac{2n-1}{3} \right\rfloor$

Toda coloración de G con más de $\left\lfloor \frac{2n-1}{3} \right\rfloor$ colores contiene al menos una cara heterocromtica.

El resultado

Teorema: [Arocha, M]

Sea G una gráfica plana maximal,entonces $\chi_f(G) \leq \left\lfloor \frac{2n-1}{3} \right\rfloor < \left\lfloor \frac{7n-8}{9} \right\rfloor$

Toda coloración de G con más de $\left\lfloor \frac{2n-1}{3} \right\rfloor$ colores contiene al menos una cara heterocromtica.

La prueba

- considerar a las gráficas como espacios topológicos
- a las k–coloraciones como funciones continuas $f : G \to K_k$
- introducir el concepto de coloración nula
- entender la relación entre coloraciones nulas y coloraciones no-heterocromáticas

La prueba

- considerar a las gráficas como espacios topológicos
- a las k–coloraciones como funciones continuas $f : G \to K_k$
- introducir el concepto de coloración nula
- entender la relación entre coloraciones nulas y coloraciones no-heterocromáticas

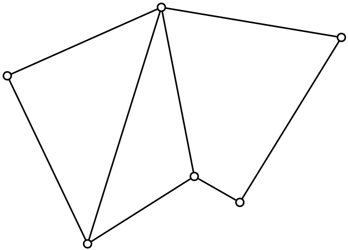
La prueba

- considerar a las gráficas como espacios topológicos
- a las k–coloraciones como funciones continuas $f : G \to K_k$
- introducir el concepto de coloración nula
- entender la relación entre coloraciones nulas y coloraciones no-heterocromáticas

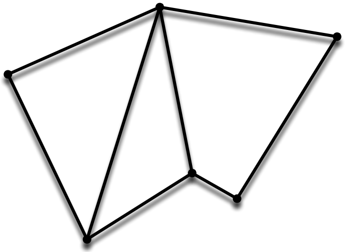
La prueba

- considerar a las gráficas como espacios topológicos
- a las k–coloraciones como funciones continuas $f : G \to K_k$
- introducir el concepto de coloración nula
- entender la relación entre coloraciones nulas y coloraciones no-heterocromáticas

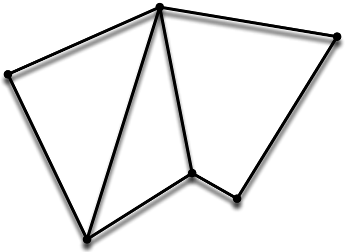
Gráficas como espacios topológicos



Gráficas como espacios topológicos

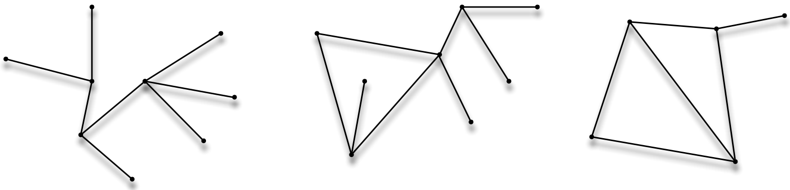


Gráficas como espacios topológicos

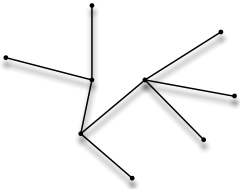


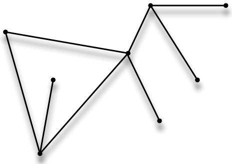
entender la estructura de G en términos de sus ciclos ("hoyos")

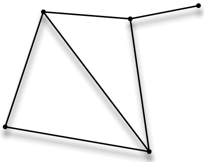
El (1er) grupo de homología



El (1er) grupo de homología

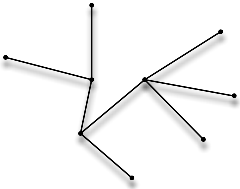


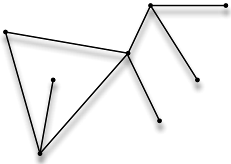


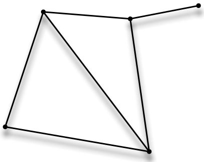


0

El (1er) grupo de homología



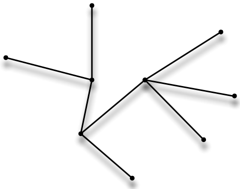




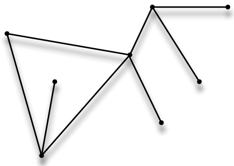
0

1

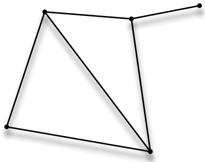
El (1er) grupo de homología



0

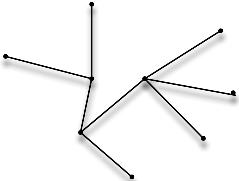


1

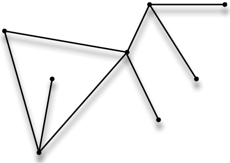


3

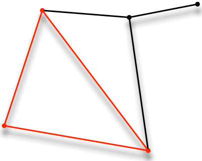
El (1er) grupo de homología



0

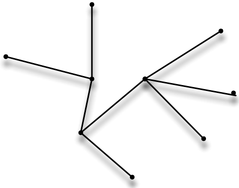


1

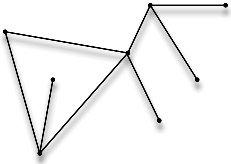


3

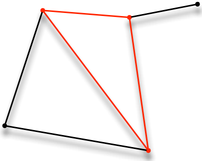
El (1er) grupo de homología



0

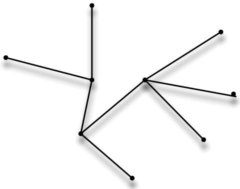


1

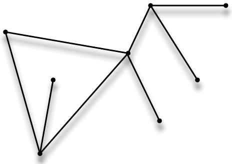


3

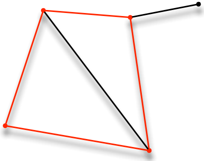
El (1er) grupo de homología



0

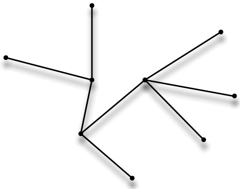


1

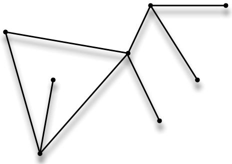


3

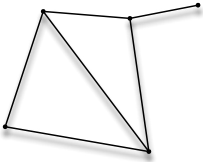
El (1er) grupo de homología



0

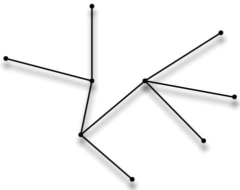


1

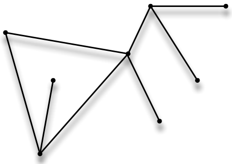


2

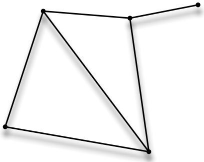
El (1er) grupo de homología



0

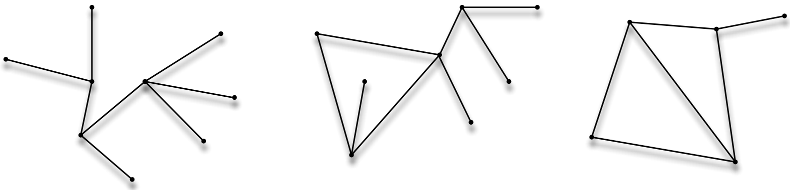


$\mathbb{Z}$



$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

El (1er) grupo de homología

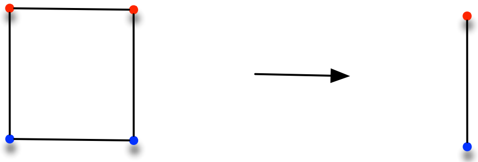


0 $\qquad\qquad$ $\mathbb{Z}$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

$$G \quad \to \quad H_1(G) \simeq \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{m-n+1 \text{ veces}}$$

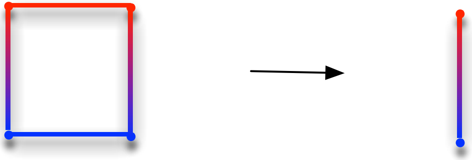
Coloraciones

- una k–coloración $f : G \rightarrow K_k$ es un homomorfismo de gráficas



Coloraciones

- una k–coloración $f : G \rightarrow K_k$ es una función continua



Coloraciones nulas

$$\begin{array}{rcll} f : G & \to & K_k & \text{homomorfismo de gráficas} \\ \downarrow & & \downarrow & \\ f : G & \to & K_k & \text{función continua} \\ \downarrow & & \downarrow & \\ f_* : H_1(G) & \to & H_1(K_k) & \text{homomorfismo de grupos} \end{array}$$

- Una coloración f es nula si f_* es nulo.

Coloraciones nulas

$$
\begin{array}{ccccl}
f : G & \to & K_k & & \text{homomorfismo de gráficas} \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
f : G & \to & K_k & & \text{función continua} \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
f_* : H_1(G) & \to & H_1(K_k) & & \text{homomorfismo de grupos}
\end{array}
$$

- Una coloración f es nula si f_* es nulo.

Coloraciones nulas

$$
\begin{array}{rcll}
f : G & \rightarrow & K_k & \text{homomorfismo de gráficas} \\
\downarrow & & \downarrow & \\
f : G & \rightarrow & K_k & \text{función continua} \\
\downarrow & & \downarrow & \\
f_* : H_1(G) & \rightarrow & H_1(K_k) & \text{homomorfismo de grupos}
\end{array}
$$

- Una coloración f es nula si f_* es nulo.

Coloraciones nulas

$$\begin{array}{ccccl} f: G & \to & K_k & & \text{homomorfismo de gráficas} \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ f: G & \to & K_k & & \text{función continua} \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ f_*: H_1(G) & \to & H_1(K_k) & & \text{homomorfismo de grupos} \end{array}$$

- Una coloración f es **nula** si f_* es nulo.

Coloraciones nulas

$$\begin{array}{rcll} f : G & \rightarrow & K_k & \text{homomorfismo de gráficas} \\ \downarrow & & \downarrow & \\ f : G & \rightarrow & K_k & \text{función continua} \\ \downarrow & & \downarrow & \\ f_* : H_1(G) & \rightarrow & H_1(K_k) & \text{homomorfismo de grupos} \end{array}$$

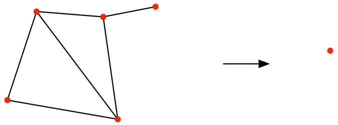
- Una coloración f es nula si f_* es nulo.

$$(\, f_*(c) = 0 \;\; \forall c \in H_1(G) \;)$$

Ejemplos

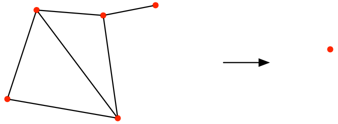
- $f : G \to K_1$
- $f : G \to K_2$
- $f : G \to K_k$

si G/f es un árbol

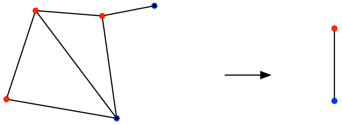


Ejemplos

- $f : G \to K_1$



- $f : G \to K_2$

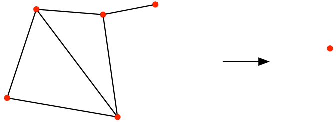


- $f : G \to K_k$

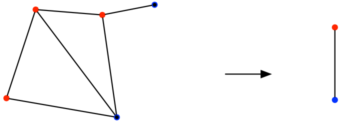
si G/f es un árbol

Ejemplos

- $f : G \to K_1$

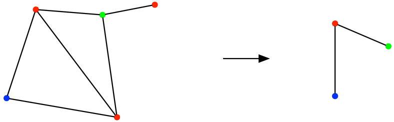


- $f : G \to K_2$



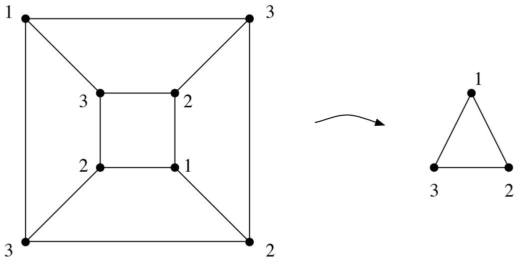
- $f : G \to K_k$

  si G/f es un árbol



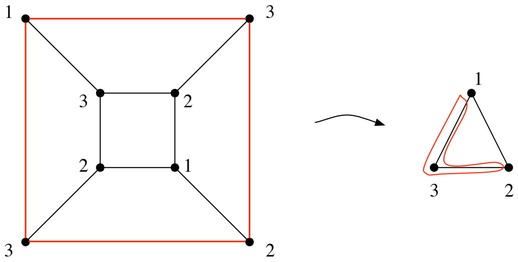
Ejemplos

- una coloración nula f tal que G/f no es un árbol



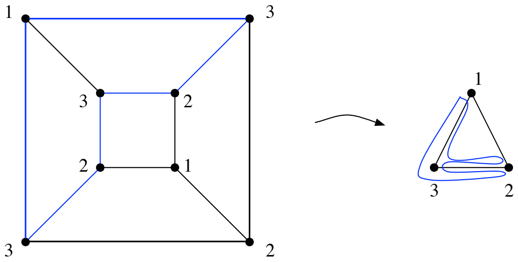
Ejemplos

- una coloración nula f tal que G/f no es un árbol



Ejemplos

- una coloración nula f tal que G/f no es un árbol



Coloraciones nulas

G/f es un árbol $\Rightarrow f$ es una coloración nula

f es una coloración nula $\not\Rightarrow G/f$ es un árbol

Coloraciones nulas

$$G/f \text{ es un árbol} \Rightarrow f \text{ es una coloración nula}$$

$$f \text{ es una coloración nula} \not\Rightarrow G/f \text{ es un árbol}$$

Teorema. [Arocha, M]

Sea f una coloración nula maximal de G, entonces G/f es un árbol.

Coloraciones nulas

G/f es un árbol $\Rightarrow f$ es una coloración nula

f es una coloración nula $\not\Leftarrow G/f$ es un árbol

Teorema. [Arocha, M]

Sea f una coloración nula maximal de G, entonces G/f es un árbol.

$\Downarrow$

Teorema. [Arocha, M]

Sea G una gráfica plana maximal, entonces $\chi_f(G) \leq \left\lfloor \frac{2n-1}{3} \right\rfloor$

Coloracines nulas *vs* coloraciones no-heterocromáticas

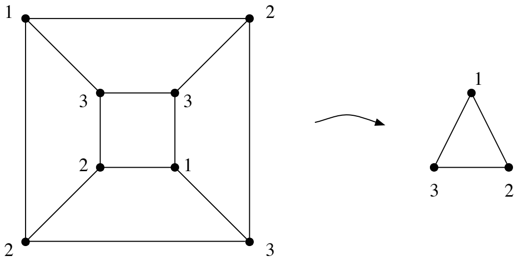
coloración nula $\Rightarrow$ coloración no-heterocromática

coloración no-heterocromática $\not\Rightarrow$ coloración nula

Coloracines nulas *vs* coloraciones no-heterocromáticas

coloración nula $\Rightarrow$ coloración no-heterocromática

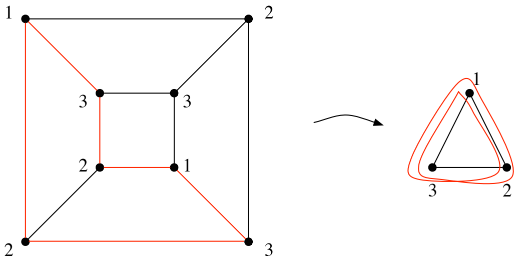
coloración no-heterocromática $\not\Rightarrow$ coloración nula



Coloracines nulas *vs* coloraciones no-heterocromáticas

coloración nula $\Rightarrow$ coloración no-heterocromática

coloración no-heterocromática $\not\Rightarrow$ coloración nula



Lema. Para gráficas planas maximales:

coloración no-heterocromática $\Rightarrow$ coloración nula

Lema. Para gráficas planas maximales:

$$\text{coloración no-heterocromática} \Rightarrow \text{coloración nula}$$

Prueba del teorema:

Sea G una gráfica plana maximal de orden n con $\chi_f(G) = k$

Lema. Para gráficas planas maximales:

$$\text{coloración no-heterocromática} \Rightarrow \text{coloración nula}$$

Prueba del teorema:

Sea G una gráfica plana maximal de orden n con $\chi_f(G) = k$

Consideremos f una k–coloración no-heterocromática de G

Lema. Para gráficas planas maximales:

$$\text{coloración no-heterocromática} \Rightarrow \text{coloración nula}$$

Prueba del teorema:

Sea G una gráfica plana maximal de orden n con $\chi_f(G) = k$

Consideremos f una k–coloración no-heterocromática de G

$\Downarrow$ Lem.

f es una coloración nula maximal

Lema. Para gráficas planas maximales:

coloración no-heterocromática $\Rightarrow$ coloración nula

Prueba del teorema:

Sea G una gráfica plana maximal de orden n con $\chi_f(G) = k$

Consideremos f una k–coloración no-heterocromática de G

$\Downarrow$ Lem.

f es una coloración nula maximal

$\Downarrow$ Teo.

G/f es un árbol

Lema. Para gráficas planas maximales:

$$\text{coloración no-heterocromática} \Rightarrow \text{coloración nula}$$

Prueba del teorema:

Sea G una gráfica plana maximal de orden n con $\chi_f(G) = k$

Consideremos f una k–coloración no-heterocromática de G

$\Downarrow$ Lem.

f es una coloración nula maximal

$\Downarrow$ Teo.

G/f es un árbol con k vértices y $k-1$ aristas

Lema. Para gráficas planas maximales:

coloración no-heterocromática $\Rightarrow$ coloración nula

Prueba del teorema:

Sea G una gráfica plana maximal de orden n con $\chi_f(G) = k$

Consideremos f una k–coloración no-heterocromática de G

$\Downarrow$ Lem.

f es una coloración nula maximal

$\Downarrow$ Teo.

G/f es un árbol con k vértices y $k-1$ aristas

$\Downarrow$ Obs.

Lema. Para gráficas planas maximales:

coloración no-heterocromática $\Rightarrow$ coloración nula

Prueba del teorema:

Sea G una gráfica plana maximal de orden n con $\chi_f(G) = k$

Consideremos f una k–coloración no-heterocromática de G

$\Downarrow$ Lem.

f es una coloración nula maximal

$\Downarrow$ Teo.

G/f es un árbol con k vértices y $k-1$ aristas

$\Downarrow$ Obs.

$$2n - 4 \leq 3(k-1)$$

Lema. Para gráficas planas maximales:

coloración no-heterocromática $\Rightarrow$ coloración nula

Prueba del teorema:

Sea G una gráfica plana maximal de orden n con $\chi_f(G) = k$

Consideremos f una k–coloración no-heterocromática de G

$\Downarrow$ Lem.

f es una coloración nula maximal

$\Downarrow$ Teo.

G/f es un árbol con k vértices y $k-1$ aristas

$\Downarrow$ Obs.

$2n - 4 \leq 3(k-1)$ $\square$

Gracias!!