Sobre el número de cruce de $C_m \square C_n$

Carolina Medina Graciano
UASLP

4 de marzo de 2013

XXVIII Coloquio Victor Newmann de Teoría de las Gráficas, Combinatoria y sus Aplicaciones
Morelia, Michoacán

El producto cartesiano $C_n \square C_m$

El *número de cruce* $\mathrm{cr}(G)$ de una gráfica G es el mínimo número de intersecciones entre parejas de aristas en un dibujo de G en el plano.

La gráfica $C_m \square C_n$ es el *producto cartesiano* de un m-ciclo (ciclo rojo) con un n-ciclo (ciclo azul).

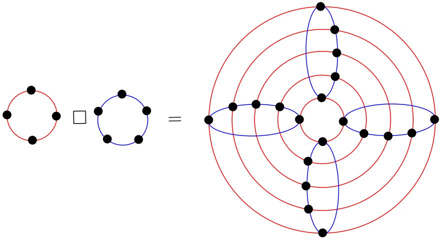

Figura: Un dibujo de la gráfica $C_4 \square C_5$.

La conjetura

En [1] (1973) Harary y Kainen demuestran que existen gráficas encajables en el toro con número de cruce arbitrariamente grande.

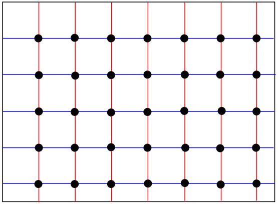

Figura: Dibujo de un encaje de $C_5 \square C_7$ en el toro $\mathbb{T}^2$.

En este mismo artículo además se conjetura que $\mathrm{cr}(C_n \square C_m) \overset{?}{=} n(m-2)$ para $n \geq m \geq 3$.

El dibujo de la conjetura

Para cualquier par de enteros positivos m,n existe un dibujo D de $C_m \square C_n$ con exactamente $n(m-2)$ cruces que satisface

a) ningún par de $m(n)$-ciclos tienen un cruce entre ellos;

b) todo n-ciclo tiene exactamente un cruce con $(m-2)$ m-ciclos y

c) existen dos m-ciclos tales que ningúna de sus aristas tiene cruces.

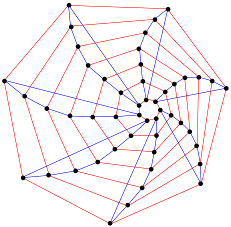

Figura: Dibujo *rectilíneo* D de $C_7 \square C_7$ con 35 cruces.

Resultados previos

Se ha demostrado

- de forma separada que $\mathrm{cr}(C_n \square C_m) = n(m-2)$ cuando $m = 3, 4, 5, 6, 7$ [2], [3],[4],[5],[6] y
- $\mathrm{cr}(C_n \square C_m) = n(m-2)$ cuando $n \geq m(m+1)$, $m \geq 3$,[7].

En particular la conjetura queda abierta para la gráfica $C_8 \square C_8$.

Objetivo

Nuestro objetivo es mejorar el resultado principal en [8]

Teorema

Para todo $\epsilon > 0$ existe un entero M_ϵ, con la siguiente propiedad. En todo dibujo de $C_m \square C_n$, con $n \geq m \geq M_\epsilon$, existe

1. *un $m-$ciclo con al menos $(0{,}8 - \epsilon)m$ cruces, o*
2. *un n-ciclo con al menos $(0{,}8 - \epsilon)n$ cruces.*

Del cual se deduce la mejor cota inferior general para $\mathrm{cr}(C_m \square C_n)$ y que esta dada por

$$\mathrm{cr}(C_m \square C_n) \geq (0{,}8 - \epsilon)mn \quad \text{para} \quad n \geq m \geq 3.$$

rd-colección

En un dibujo D de $C_m \square C_n$, una *rd-colección* $\mathcal{C}$ es un conjunto de ciclos rojos tal que para cualquier par $C_j, C_i \in \mathcal{C}$ con $i \neq j$, $C_i \cap C_j = \emptyset$.

Proposición

Sea D un dibujo de $C_m \square C_n$ tal que ningún ciclo rojo tiene $\alpha(m-2)$ cruces o más, $\alpha \leq 1$. Entonces existe una rd-colección maximal $\mathcal{R}$ en D con

$$|\mathcal{R}| \geq 2n/(2 + \alpha(m-2) - \overline{bc}(\mathcal{R}, D)),$$

donde $\overline{bc}(\mathcal{R}, D)$ es el promedio de cruces bicromáticos de un ciclo rojo en $\mathcal{R}$.

$(3, m)$-configuraciones

Una $(3, m)$-*configuración* es una pareja $\{\mathcal{C}, \mathcal{P}\}$ tal que

a) $\mathcal{C} = \{C_0, C_1, C_2\}$ es una *rd*-colección ordenada de m-ciclos y

b) $\mathcal{P}$ es una colección de 2-caminos que comienzan en C_0 y terminan en C_2 con vértice medio en C_1.

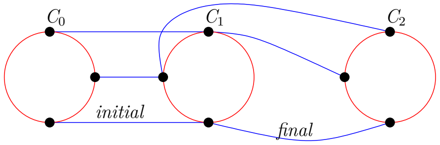

Figura: Dibujo de una (3,3)-configuración.

Proposición

Todo dibujo limpio *de una* $(3,s)$*-configuración tiene al menos* $s(s-2)/4$ buenos cruces.

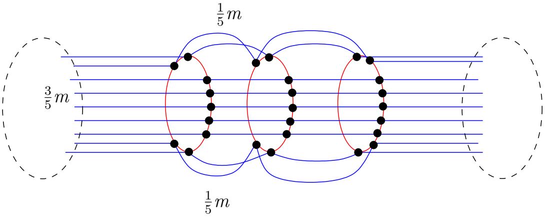

Figura: $(3,(2/5)m)$-configuración inducida por un dibujo D de $C_m \square C_n$.

La $(3,(2/5)m)$-configuración (arriba) es responsable de al menos $\binom{\frac{1}{5}m}{2} + \binom{\frac{1}{5}m}{2} = \frac{(\frac{1}{5}m-1)(\frac{1}{5}m)}{2} = \frac{(\frac{2}{5}m-2)(\frac{2}{5}m)}{4}$ *cruces azules.*

Más cruces azules

Proposición

Para un dibujo D de $C_m \square C_n$ tal que ningún ciclo rojo tiene $\alpha(m-2)$ cruces o más, el número total de cruces azules $blu(D)$, satisface

$$blu(D) \geq \frac{|\mathcal{R}|}{4}(m - \overline{bc}(\mathcal{R}, D))(m - \overline{bc}(\mathcal{R}, D) - 2)$$

donde $|\mathcal{R}|$ es el número de elementos en una rd-colección maximal $\mathcal{R}$ en el dibujo D.

En [8] se presenta el caso $\alpha = 4/5$ y se prueba que para cualquier $\overline{bc}(\mathcal{R}, D) < (4/5)m$, el número de cruces azules satisface $blu(D) \geq (2/5)mn$ y por lo tanto existe un ciclo azul con $(4/5)n$ cruces (n, m suficientemente grandes).

Líneas de trabajo

- Análisis de una *"casi" rd-colección* maximal $\mathcal{A}$ en un dibujo D de $C_m \Box C_n$ que es, un conjunto de ciclos rojos tales que todo elemento $C_i \in \mathcal{A}$ intersecta a lo más un $C_{j \neq i} \in \mathcal{A}$.

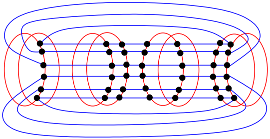

Figura: Aquí $|\mathcal{A}| = 2|\mathcal{R}|$

- El estudio de dibujos donde existen ciclos rojos con más de $(4/5)m$ cruces, en este caso es necesario analizar también
  1. otros conjuntos maximales $\mathcal{R}_i$ (si es que existen) y
  2. el número de cruces bicromáticos.

“Casi” *rd*-colecciones

Dada un dibujo D de $C_m \Box C_n$ y una subgráfica H de $C_m \Box C_n$, la responsabilidad $resp_D(H)$ de H en D es el número de veces que las aristas de H son cruzadas en D.

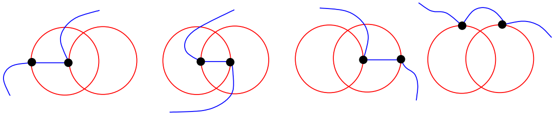

Figura: Configuraciones posibles para una pareja de ciclos rojos R_i, R_j con $R_i \cap R_j \neq \emptyset$ y los caminos que los conectan.

Buscamos que en un dibujo $\mathcal{E}$ de $C_q \Box C_m$ inducido por una “casi” *rd*-colección la responsabilidad $resp_{\mathcal{E}}(R_i \cup R_j) \geq 2m$ donde $R_i \cap R_j \neq \emptyset$.

rd-coleciones

Sea D un dibujo de $C_m \square C_n$ con m, n suficientemente grandes y tal que ningún ciclo rojo tiene $\frac{17}{20}(m-2)$ cruces o más, si suponemos que para algún conjunto máximal $\mathcal{R}$ en D el promedio de cruces bicromático es $\overline{bc}(\mathcal{R}, D) = \frac{4}{5}$ entonces

1) $|\mathcal{R}| \geq 40\frac{n}{m}$ y
2) $blu(D) \geq \frac{2}{5}mn$.

Éste es un ejemplo extremal, si $\overline{bc}(\mathcal{R}, D) < \frac{4}{5}$ entonces la cota dada en 2) es insuficiente.

References

[1] F. Harary, P. C. Kainen, and A. J. Schwenk, Toroidal graphs with arbitrarily high crossing numbers, *Nanta Math.* **6** (1973), 58-57.

[2] R.D. Ringeisen and L.W. Beineke, *The crossing number of* $C_3\Box C_n$, J. Combinat. Theory **24** (1978), 134–136.

[3] A. M. Dean, R. B. Richter, *The crossing number of* $C_4\Box C_4$, J. of Graph Theory **19** (1995), 125-129.

[4] M. Kleŝĉ, R. B. Richter, and I. Stobert *The crossing number of* $C_5\Box C_n$, J. of Graph Theory **22** (1996), 239-246.

[5] R. B. Richter, G. Salazar, *The crossing numbe of* $C_6 \times C_n$, Australas. J. Combin. **23** (2001), 135-14.

[6] J. Adamson, R. B. Richter, *Arrangements, circular arrangements and the crossing number of* $C_7 \times C_n$, J. Combinatorial Theory-B **90** (2004), 21-39.

[7] L.Y. Glebsky, G. Salazar, *The crossing number of* $C_m \times C_n$ *is as conjectured for* $n \geq m(m+1)$, J. Graph Theory 47 (2004) 53–72.

[8] G. Salazar, E. Ugalde, *An improved bound for the crossing number of* $C_m\Box C_n$ *a self-contained proof using mostly combinatorial arguments*, Graphs and Combinatorics 20 (2004) 247–253.