El polinomio característico de un matroide

Rhiannon Hall [§] Criel Merino[‡] Steven D. Noble[§]

[§]Departament of Mathematical Sciences
Brunel University

[‡]Instituto de Matemáticas UNAM,
sede Oaxaca

XXVIII Coloquio Víctor Neumann-Lara de Teoría de las Gráficas Combinatoria y sus Aplicaciones ,
Morelia, Michoacán, 4 al 8 de marzo de 2013

Contenido

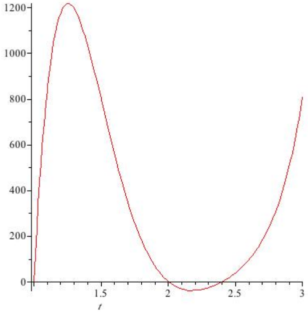
Problema	
Gráficas	Matroides
Cromático	Característico
Ancho de rama	
Resultado	

El problema

$K_{4,8}$ tiene polinomio cromático
$t(t-1)(t^{10} - 31t^9 + 465t^8 - 4327t^7 + 27209t^6 - 119399t^5 + 367045t^4 - 775317t^3 + 1071627t^2 - 871955t + 316275)$

El problema

$K_{4,8}$ tiene polinomio cromático
$t(t-1)(t^{10}-31t^9+465t^8-4327t^7+27209t^6-119399t^5+367045t^4-775317t^3+1071627t^2-871955t+316275)$



El problema

Theorem (Dong, 2008)

Para toda gráfica G de grado máximo Δ, se tiene que $\chi(G,\lambda) > 0$ para todo $\lambda \geq 5.664\Delta$

Función de rango en gráficas

Para una gráfica conexa $G = (V, E)$ definimos la función $r : \wp(E) \to \mathbb{N}$, como $r(A)$ es el tamaño de un bosque generador maximo en $H = (V, A)$.

1. $0 \leq r(A) \leq |A|$, para todo $A \subseteq E$.

Función de rango en gráficas

Para una gráfica conexa $G = (V, E)$ definimos la función $r : \wp(E) \to \mathbb{N}$, como $r(A)$ es el tamaño de un bosque generador maximo en $H = (V, A)$.

1. $0 \leq r(A) \leq |A|$, para todo $A \subseteq E$.
2. Si $A \subseteq B$, entonces $r(A) \leq r(B)$

Función de rango en gráficas

Para una gráfica conexa $G = (V, E)$ definimos la función $r : \wp(E) \to \mathbb{N}$, como $r(A)$ es el tamaño de un bosque generador maximo en $H = (V, A)$.

1. $0 \leq r(A) \leq |A|$, para todo $A \subseteq E$.
2. Si $A \subseteq B$, entonces $r(A) \leq r(B)$
3. Para todo $A, B \subseteq E$,

$$r(A \cup B) + r(A \cap B) \leq r(A) + r(B) \text{ (submodularidad)}$$

Función de rango en gráficas

Para una gráfica conexa $G = (V, E)$ definimos la función $r : \wp(E) \to \mathbb{N}$, como $r(A)$ es el tamaño de un bosque generador maximo en $H = (V, A)$.

1. $0 \leq r(A) \leq |A|$, para todo $A \subseteq E$.
2. Si $A \subseteq B$, entonces $r(A) \leq r(B)$
3. Para todo $A, B \subseteq E$,

$$r(A \cup B) + r(A \cap B) \leq r(A) + r(B) \text{ (submodularidad)}$$

Función de rango en gráficas

Para una gráfica conexa $G = (V, E)$ definimos la función $r : \wp(E) \to \mathbb{N}$, como $r(A)$ es el tamaño de un bosque generador maximo en $H = (V, A)$.

1. $0 \leq r(A) \leq |A|$, para todo $A \subseteq E$.
2. Si $A \subseteq B$, entonces $r(A) \leq r(B)$
3. Para todo $A, B \subseteq E$,

$$r(A \cup B) + r(A \cap B) \leq r(A) + r(B) \text{ (submodularidad)}$$

Equivalentemente, $r(A) = |V| - \kappa(H)$, por lo que $r(E) - r(A) = \kappa(H) - \kappa(G)$

Definición

Un matroide M es un par (E, r), donde E es un conjunto finito y $r : \wp(E) \to \mathbb{N}$, la *función de rango*, satisface

1. $0 \leq r(A) \leq |A|$, para todo $A \subseteq E$.
2. Si $A \subseteq B$, entonces $r(A) \leq r(B)$
3. Para todo $A, B \subseteq E$,

$$r(A \cup B) + r(A \cap B) \leq r(A) + r(B) \text{ (submodularidad)}$$

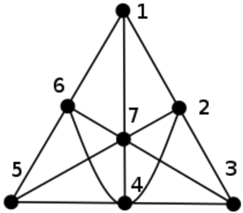
Los cerrados de un matroide

Dado $M = (E, r)$ un matroide, un conjunto $F \subseteq E$ es cerrado si para todo $e \in E \setminus F$, $r(F + e) > r(F)$.
Un matroide esta determinado por sus cerrados.

Ejemplo: matroides representables

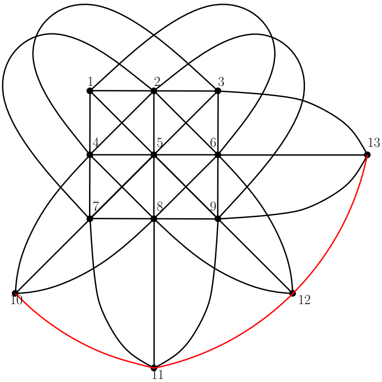
Sea A una matriz de $m \times n$ sobre un campo $\mathbb{F}$ con las columnas etiquetadas $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Sea $M[A]$ el matroide sobre las etiquetas y cuyo rango $r(X)$ es el rango de A_X (dimension de $< A_X >$)

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 3 & 5 & 2 & 6 & 4 & 7 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

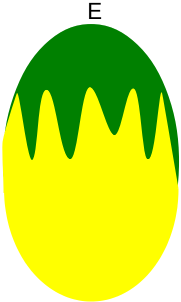


Ejemplo: matroides representables

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13
\end{array}\\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2\\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0
\end{pmatrix}.
\end{array}
$$

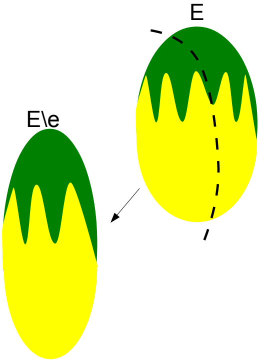


Borrado y contracción



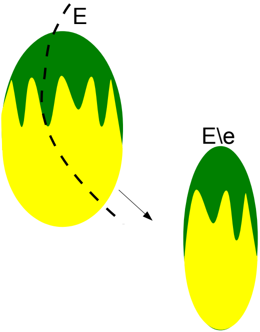
Sea $M = (E, r)$ un matroide.

Borrado y contracción



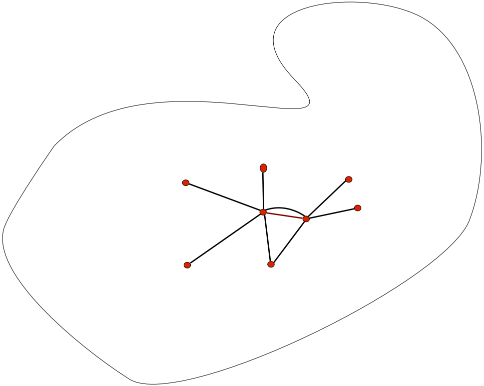
Sea $M = (E, r)$ un matroide.El borrado del elemento e, $M \setminus e$, es el matroide $(E \setminus e,\ r')$, donde $r' = r$ en $E \setminus e$.

Borrado y contracción

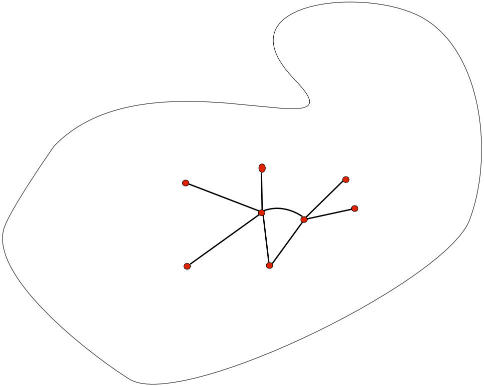


Sea $M = (E, r)$ un matroide.El borrado del elemento e, $M \setminus e$, es el matroide $(E \setminus e,\ r')$, donde $r' = r$ en $E \setminus e$. La contracción del elemento e, M/e es el matroide $(E \setminus e,\ r'')$, donde $r''(A) = r(A + e) - r(e)$.

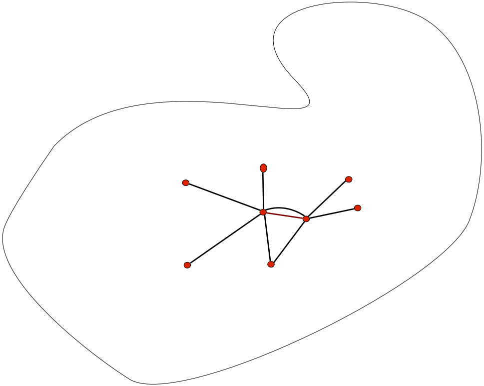
Ejemplo: Gráficas



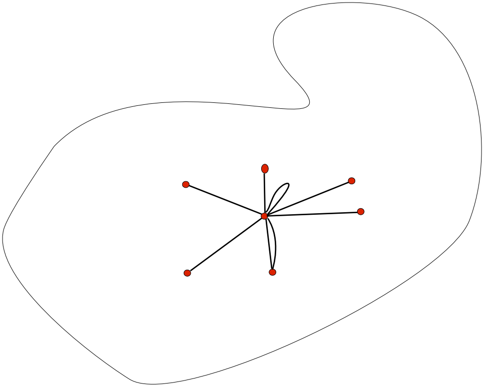
Ejemplo: Gráficas



Ejemplo: Gráficas

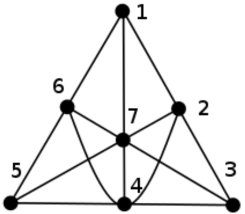


Ejemplo: Gráficas



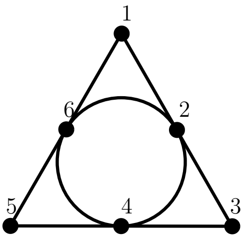
Ejemplo: Matroides representables

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 3 & 5 & 2 & 6 & 4 & 7 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$



Ejemplo: Matroides representables

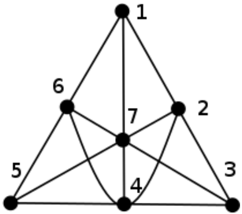
$$
\begin{array}{cccccc}
1 & 3 & 5 & 2 & 6 & 4
\end{array}
$$
$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}.
$$



Ejemplo: Matroides representables

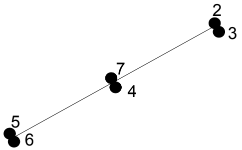
$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & 3 & 5 & 2 & 6 & 4 & 7
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}.
$$



Ejemplo: Matroides representables

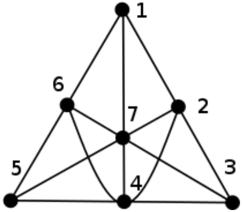
$$\begin{array}{cccccc} 3 & 5 & 2 & 6 & 4 & 7 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$



Matroides representables y geometrias proyectivas

Theorem

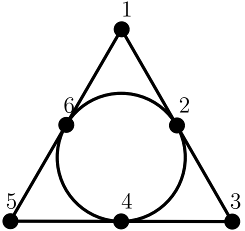
Sea M un matroide (simple) de rango r y $\mathbb{F}$ un campo finito de orden q. Entonces M es representable sobre $\mathbb{F}$ sii $M \cong GP(r-1,q) \setminus T$, para algún conjunto T de elementos.



Matroides representables y geometrias proyectivas

Theorem

Sea M un matroide (simple) de rango r y $\mathbb{F}$ un campo finito de orden q. Entonces M es representable sobre $\mathbb{F}$ sii $M \cong GP(r-1, q) \setminus T$, para algún conjunto T de elementos.



El polinomio de malas coloraciones

Para un entero λ, una λ-coloración de G es $\phi : V(G) \to [\lambda]$.

1. Hay λ^n coloraciones para G con n vértices.
2. Si ϕ es una λ-coloración tal que $\phi(i) \neq \phi(j)$ para toda arista $ij \in E$, ϕ se llama *propia*.
3. Deseamos conocer el número, $\chi(G; \lambda)$, λ-coloraciones propias de G.

Consideramos primero una gráfica G y *todas* las coloraciones de sus vértices con λ colores. Para diferencias las coloraciones propias de las impropias, mantenemos un registro de las aristas entre vértices del mismo color. Llamamos a estas aristas *aristas malas*.

El polinomio de malas coloraciones

Definition

El polinomio de malas coloraciones es la función generatriz

$$B(G;\lambda,t)=\sum_{\phi:V\to[\lambda]} t^{|b(\phi)|}, \tag{1}$$

donde $b(\phi)$ es el conjunto de aristas malas en la λ-coloración ϕ.

El polinomio de malas coloraciones

Hay una expresión para el polinomio de malas coloraciones que usa la función de rango.

$$B(G; \lambda, t+1) = \sum_{\phi : V \to [\lambda]} (1+t)^{|b(\phi)|}, \tag{2}$$

y ahora desarrollamos

El polinomio de malas coloraciones

$$\begin{aligned}
B(G;\lambda,t+1) &= \sum_{\phi:V\to[\lambda]} (1+t)^{|b(\phi)|} \\
&= \sum_{\phi:V\to[\lambda]} \sum_{A\subseteq b(\phi)} t^{|A|} \\
&= \sum_{A\subseteq E} \sum_{\substack{\phi:V\to[\lambda] \\ A\subseteq b(\phi)}} t^{|A|} \\
&= \sum_{A\subseteq E} t^{|A|}\lambda^{\kappa(A)} \\
&= \lambda^{\kappa(E)} \sum_{A\subseteq E} t^{|A|}\lambda^{r(E)-r(A)}.
\end{aligned}$$

Polinomio cromático

Ahora tenemos una expresión para el polinomio cromático, que es debido a G. D. Birkhoff e independientemente a H. Whitney.

Theorem

Si $G = (V, E)$ es gráfica, entonces

$$\chi(G;\lambda) = \lambda^{\kappa(E)} \sum_{A\subseteq E} (-1)^{|A|} \lambda^{r(E)-r(A)}. \tag{3}$$

Polinomio cromático: Propiedades

1. $\chi(K_n;\lambda) = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)$.
2. Si G tiene un lazo, entonces $\chi(G;\lambda) \equiv 0$.
3. Si G tiene un puente e, entonces $\chi(G;\lambda) = (\lambda-1)\chi(G\setminus e;\lambda)$.
4. Si e es una arista de G que no es puente, entonces

$$\chi(G;\lambda) = \chi(G\setminus e;\lambda) - \chi(G/e;\lambda).$$

5. Si G tiene dos aristas en paralelo e y f entonces $\chi(G;\lambda) = \chi(G\setminus e;\lambda) = \chi(G\setminus f;\lambda)$

Polinomio cromático

Theorem

Si G es la unión de dos subgráficas inducidas H_1 y H_2 tal que la intersección $H_1 \cap H_2$ es una subgráfica inducida isomorfa a K_p, entonces

$$\chi(G;\lambda) = \frac{\chi(H_1;\lambda)\chi(H_2;\lambda)}{\chi(K_p;\lambda)}.$$

El polinomio característico

Definition

Para un matroide $M = (E, r)$ definimos

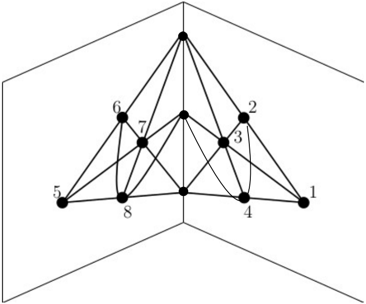
$$\chi(M; \lambda) = \sum_{A \subseteq E} (-1)^{|A|} \lambda^{r(E)-r(A)}. \tag{4}$$

El polinomio característico

1. $\chi(PG(r-1,q);\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-q)(\lambda-q^2)\cdots(\lambda-q^{r-1})$
2. Si M tiene un lazo, entonces $\chi(M;\lambda) \equiv 0$.
3. Si M tiene un puente e, entonces $\chi(M;\lambda) = (\lambda-1)\chi(M\setminus e;\lambda)$.
4. Si e es un elemento de M que no es puente, entonces
$$\chi(M;\lambda) = \chi(M\setminus e;\lambda) - \chi(M/e;\lambda).$$
5. Si M tiene dos elementos en paralelo e y f $(r(\{e,f\})=1)$ entonces $\chi(M;\lambda) = \chi(M\setminus e;\lambda) = \chi(M\setminus f;\lambda)$

Conección paralela generalizada

Dados dos matroides $M_1 = (E_1, r_1)$ y $M_2 = (E_2, r_2)$ definimos la *conección paralela generalizada*, $P_N(M_1, M_2)$, es el matroide sobre $E_1 \cup E_2$ cuyos cerrados son los subconjuntos X de $E_1 \cup E_2$ tales que $X \cap E_1$ es cerrado en M_1 y $X \cap E_2$ es cerrado en M_2 y donde $N \cong M_1|T \cong M_2|T$ y $T = E_1 \cap E_2$.



El polinomio característico

La extensión del resultado de Read es

Theorem

Sea $P_N(M_1, M_2)$ la conección paralela generalizada de los matroides M_1 y M_2 cuya intersección es N. Entonces

$$\chi(P_N(M_1, M_2); \lambda) = \frac{\chi(M_1; \lambda)\chi(M_2; \lambda)}{\chi(N; \lambda)}. \tag{5}$$

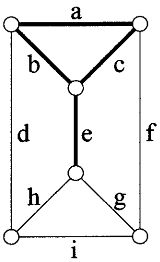
Ancho de rama:definición

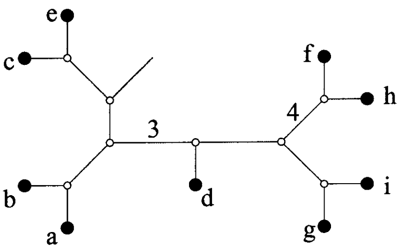
$l : \wp(S) \to \mathbb{N}$ es

1. simétrica si $l(S') = l(S \setminus S')$, para todo $S' \subseteq S$.
2. submodular si $l(A) + l(B) \geq l(A \cup B) + l(A \cap B)$, para todo $A, B \subseteq S$.

Ancho de rama:definición

Una descomposición por ramas de una función submodular simétrica I sobre un conjunto finito S es un árbol cúbico T tal que S esta contenido en las hojas de T.Un subconjunto A de S es *mostrado* por una arista e si A consiste de los elementos en uno de los dos subárboles en $T \setminus e$.



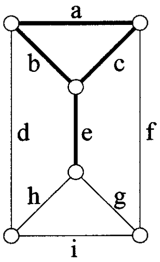


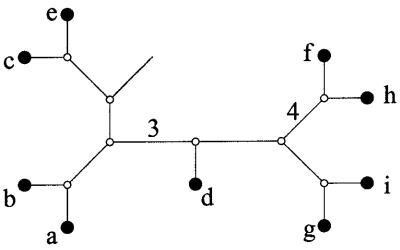
Ancho de rama:definición

EL ancho $l(e)$ de una arista en T es el valor de l en uno de los dos subconjuntos mostrados por la arista e. El ancho de una descomposición por ramas es el máximo de los anchos de sus aristas. Y el ancho de rama de S es el mínimo de los anchos de todas las descomposiciones por ramas posibles.

Ancho de rama:Gráficas

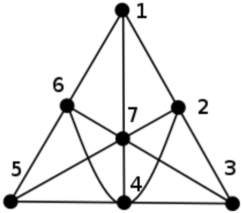
Para $G = (V, E)$ usamos $E = S$ y $I(A)$ es el número de vértices que son adyacentes a aristas en A y $E \setminus A$.





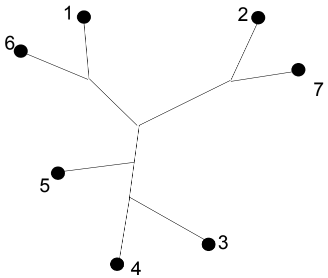
Ancho de rama:matroides

Para $M = (E, r)$ usamos $E = S$ y
$l(A) = r(A) + r(E \setminus A) - r(E) + 1$.



Ancho de rama:matroides

Para $M = (E, r)$ usamos $E = S$ y
$l(A) = r(A) + r(E \setminus A) - r(E) + 1.$



Resultado

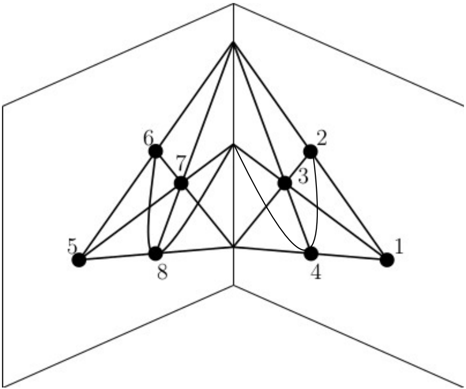
Theorem

Sea $\mathbb{F}$ un campo finito y $k \geq 1$. Entonces, existe una constante $c_{k,\mathbb{F}} = c$ tal que para todo matroide $\mathbb{F}$-representable M de ancho de rama a lo más k y toda $\lambda > c$, $\chi(M;\lambda) > 0$.

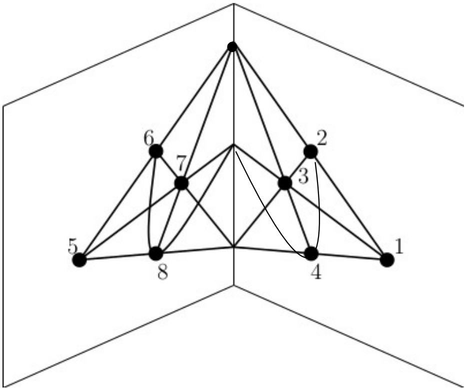
idea

Si $r(M) \geq 2k - 1$ existe e que muestra X y Y tal que $r(X), r(Y) < r(M)$

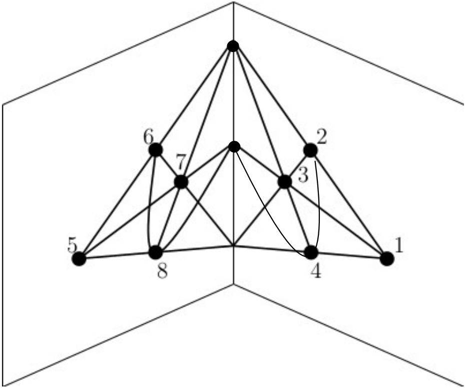
idea



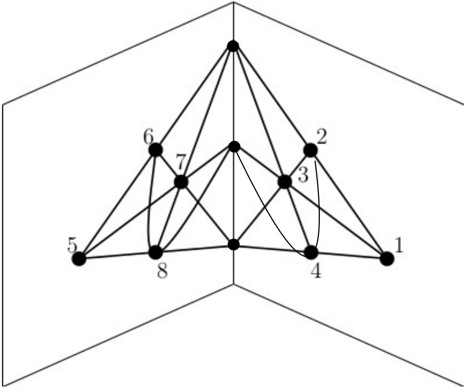
idea



idea



idea



idea

Tenemos una sucesión $M_0, M_1, \ldots, M_p$

$$\begin{aligned}\chi(M_0;\lambda) &= \chi(M_1;\lambda) + \chi(M_1/e_1;\lambda)\\ &= \chi(M_2;\lambda) + \chi(M_1/e_1;\lambda) + \chi(M_2/e_2;\lambda)\\ &= \vdots \\ &= \chi(M_p;\lambda) + \sum_{i=0}^{p} \chi(M_i/e_i;\lambda).\end{aligned} \tag{6}$$

idea

Ahora, podemos usar la generalización del resultado de Read

$$\chi(M_p;\lambda) = \frac{\chi(N_1;\lambda)\chi(N_2;\lambda)}{\chi(PG(l-1,q);\lambda)}.$$

idea

Por tanto,

$$\chi(M_0;\lambda) = \frac{\chi(N_1;\lambda)\chi(N_2;\lambda)}{\chi(PG(l-1,q);\lambda)} + \sum_{i=0}^{p} \chi(M_i/e_i;\lambda). \qquad (7)$$

Para $1 \leq i \leq p$, $r(M_i/e_i) < r(M)$. También, $r(N_1) = r(X)$ y $r(N_2) = r(Y)$ que son ambos estrictamente menores a $r(M)$. Usando inducción hay c tal que todos los polinomios $\chi_{N_1}(\lambda)$, $\chi_{N_2}(\lambda)$ y $\chi_{M_i/e_i}(\lambda)$ para $1 \leq i \leq p$, son positivos para toda $\lambda > c$.

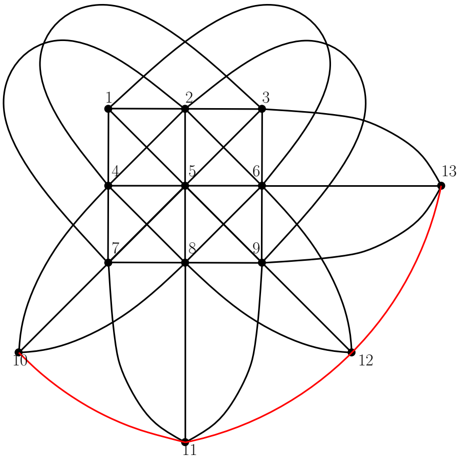
idea

Si $r(M) < 2k - 1$ no podemos garantizar la existencia de e. Ponemos todos los elementos hasta obtener una geometría proyectiva.

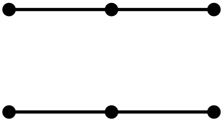
$$\chi(M;\lambda) = \chi(PG(r-1,q);\lambda) + \sum_{i=0}^{s} \chi(M_i';\lambda), \tag{8}$$

y el cero más grande de $\chi(PG(r-1,q);\lambda)$ es $q^{r-1} \leq q^{2k-3}$. Hasta el momento sólo podemos decir que el valor más pequeño posible esta en $[q^{k-1}, q^{2k-3}]$.

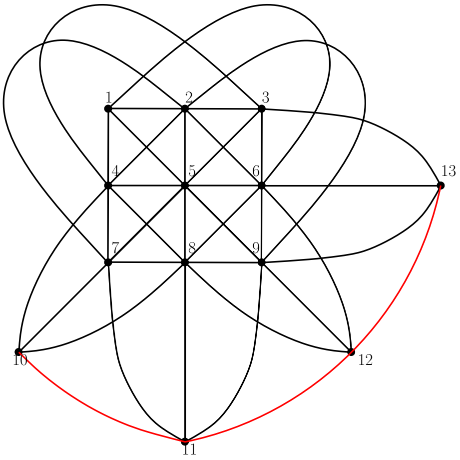
Ejemplo: teorema



Ejemplo: teorema

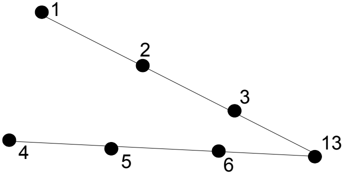


Ejemplo: teorema



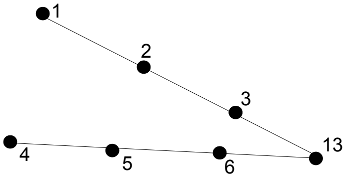
Ejemplo: teorema

$$\chi(U_{2,4};\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-3)$$
$$\chi(P_p(U_{2,4},U_{2,4});\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-3)^2$$



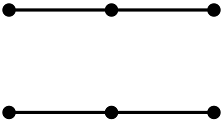
Ejemplo: teorema

$$\chi(P_p(U_{2,4}, U_{2,4})/p; \lambda) = (\lambda - 1)^2$$



Ejemplo: teorema

$$\chi(R_6;\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 8)$$



Gracias