# Mapas en el monstruo del Lago Ness

Ferrán Valdez

Centro de Ciencias Matemáticas. UNAM, Campus Morelia
www.matmor.unam.mx/∼ferran/

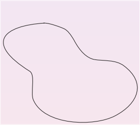
6 de marzo de 2013

# Superficies compactas

Las superficies compactas son variedades de dimensión dos. Se construyen "pegando" un número finito de toros entre sí.

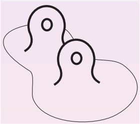
# Superficies compactas

Las superficies compactas (orientables) son variedades de dimensión dos (diferenciables). Se construyen "pegando" un número finito de toros entre sí.



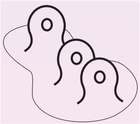
## Superficies compactas

Las superficies compactas (orientables) son variedades de dimensión dos (diferenciables). Se construyen "pegando" un número finito de toros entre sí.



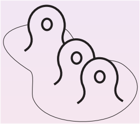
# Superficies compactas

Las superficies compactas (orientables) son variedades de dimensión dos (diferenciables). Se construyen “pegando” un número finito de toros entre sí.



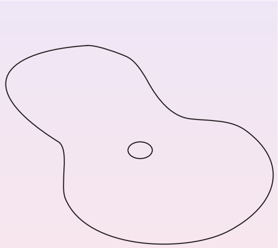
# Superficies compactas

Las superficies compactas (orientables) son variedades de dimensión dos (diferenciables). Se construyen "pegando" un número finito de toros entre sí.

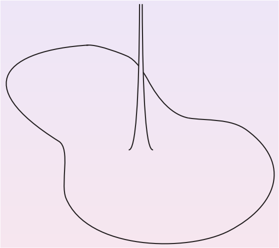


Las superficies compactas (sin frontera) quedan completamente determinadas por su género (número de toros que pegamos juntos).

# Superficies no compactas

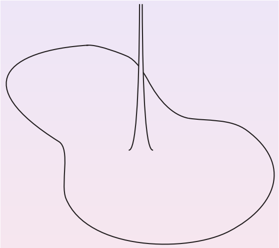


# Superficies no compactas



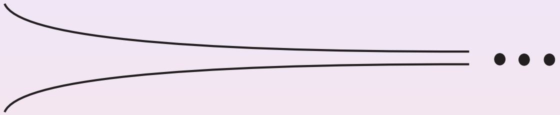
Aparecen los “fines” de una superficie. Son las maneras que hay de irse al infinito.

# Superficies no compactas



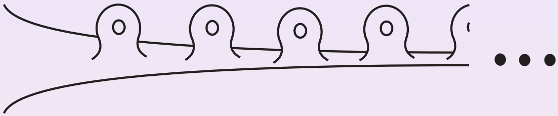
Aparecen los “fines” de una superficie.Son las maneras que hay de irse al infinito.

# Superficies no compactas



Los fines pueden ser “planos” (i.e. sin género).

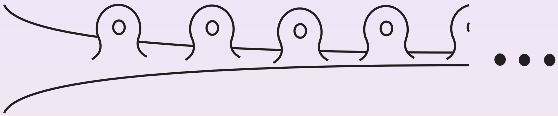
# Superficies no compactas



Los fines pueden tener género, necesariamente infinito.

Una superficie no compacta (orientable) queda determinada por su género y su espacio de fines. El espacio de fines es un subespacio del "conjunto" de Cantor. Es decir, en este caso el invariante topológico no es necesariamente discreto.

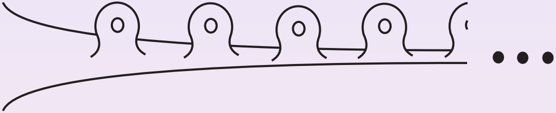
# Superficies no compactas



Los fines pueden tener género, necesariamente infinito.

Una superficie no compacta (orientable) queda determinada por su género y su espacio de fines. El espacio de fines es un subespacio del “conjunto” de Cantor. Es decir, en este caso el invariante topológico no es necesariamente discreto.

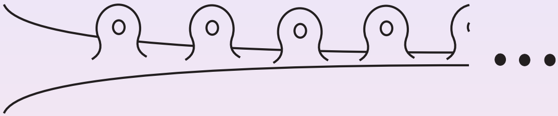
# Superficies no compactas



Los fines pueden tener género, necesariamente infinito.

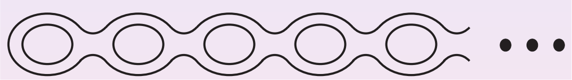
Una superficie no compacta (orientable) queda determinada por su género y su espacio de fines. El espacio de fines es un subespacio del “conjunto” de Cantor. Es decir, en este caso el invariante topológico no es necesariamente discreto.

# Superficies no compactas



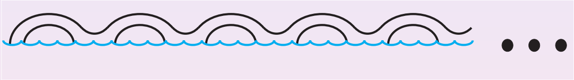
Los fines pueden tener género, necesariamente infinito.
Una superficie no compacta (orientable) queda determinada por su género y su espacio de fines. El espacio de fines es un subespacio del "conjunto" de Cantor. Es decir, en este caso el invariante topológico no es necesariamente discreto.

# Una superficie distinguida



El Monstruo del lago Ness

# Una superficie distinguida



El Monstruo del lago Ness

# Mapas

Un mapa es una gráfica $\Gamma$ junto con un encaje $f : \Gamma \hookrightarrow S$ tal que:

1. Dos aristas en $S$ se intersectan si y sólo si tienen un vértice en común en $\Gamma$.
2. $S \setminus f(\Gamma)$ es una unión disjunta de discos.

# Mapas

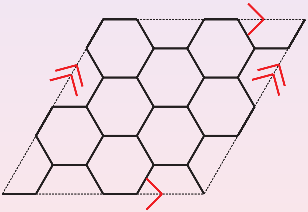
Un mapa es una gráfica $\Gamma$ junto con un encaje $f : \Gamma \hookrightarrow S$ tal que:

1. Dos aristas en $S$ se intersectan si y sólo si tienen un vértice en común en $\Gamma$.
2. $S \setminus f(\Gamma)$ es una unión disjunta de discos.

# Mapas

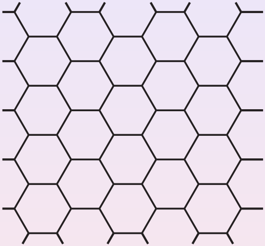
Un mapa es una gráfica $\Gamma$ junto con un encaje $f : \Gamma \hookrightarrow S$ tal que

1. Dos aristas en $S$ se intersectan si y sólo si tienen un vértice en común en $\Gamma$.
2. $S \setminus f(\Gamma)$ es una unión disjunta de discos.



Un mapa en el toro.

# Mapas



Un mapa en el plano.

Otros ejemplos: sólidos platónicos, teselaciones regulares del plano. Toda superficie triangulable tiene al menos un mapa.

# Automorfismos y simetrías de mapas

A cada mapa $M = (\Gamma, S)$ le podemos asociar *el grupo de automorfismos del mapa*. Éste está formado por todos los homeomorfismos de $h : S \to S$ que inducen un automorfismo $h_* : \Gamma \to \Gamma$ de la gráfica $\Gamma$.Notación:

$$Aut(M)$$

.

Cuando $S$ es una superficie con una métrica Riemanniana, a cada mapa $M = (\Gamma, S)$ le podemos asociar *el grupo de isometrías*. Éstas son las isometrías de $S$ que preservan el conjunto de vértices y aristas de $\Gamma$ globalmente.

Toda isometría es un automorfismo pero no todo automorfismo es una simetría (¡Ejercicio!)

# Automorfismos y simetrías de mapas

A cada mapa $M = (\Gamma, S)$ le podemos asociar *el grupo de automorfismos del mapa*. Éste está formado por todos los homeomorfismos de $h : S \to S$ que inducen un automorfismo $h_* : \Gamma \to \Gamma$ de la gráfica $\Gamma$. Notación:

$$Aut(M)$$

.

Cuando $S$ es una superficie con una métrica Riemanniana, a cada mapa $M = (\Gamma, S)$ le podemos asociar *el grupo de isometrías*. Éstas son las isometrías de $S$ que preservan el conjunto de vértices y aristas de $\Gamma$ globalmente.

Toda isometría es un automorfismo pero no todo automorfismo es una simetría (¡Ejercicio!)

# Automorfismos y simetrías de mapas

A cada mapa $M = (\Gamma, S)$ le podemos asociar *el grupo de automorfismos del mapa*. Éste está formado por todos los homeomorfismos de $h : S \to S$ que inducen un automorfismo $h_* : \Gamma \to \Gamma$ de la gráfica $\Gamma$.Notación:

$$Aut(M)$$

.

Cuando $S$ es una superficie con una métrica Riemanniana, a cada mapa $M = (\Gamma, S)$ le podemos asociar *el grupo de isometrías*. Éstas son las isometrías de $S$ que preservan el conjunto de vértices y aristas de $\Gamma$ globalmente.

Toda isometría es un automorfismo pero no todo automorfismo es una simetría (¡Ejercicio!)

# Automorfismos y simetrías de mapas

A cada mapa $M = (\Gamma, S)$ le podemos asociar *el grupo de automorfismos del mapa*. Éste está formado por todos los homeomorfismos de $h : S \to S$ que inducen un automorfismo $h_* : \Gamma \to \Gamma$ de la gráfica $\Gamma$.Notación:

$$Aut(M)$$

.

Cuando $S$ es una superficie con una métrica Riemanniana, a cada mapa $M = (\Gamma, S)$ le podemos asociar *el grupo de isometrías*. Éstas son las isometrías de $S$ que preservan el conjunto de vértices y aristas de $\Gamma$ globalmente.

Toda isometría es un automorfismo pero no todo automorfismo es una simetría (¡Ejercicio!)

# Automorfismos y simetrías de mapas

A cada mapa $M = (\Gamma, S)$ le podemos asociar *el grupo de automorfismos del mapa*. Éste está formado por todos los homeomorfismos de $h : S \to S$ que inducen un automorfismo $h_* : \Gamma \to \Gamma$ de la gráfica $\Gamma$.Notación:

$$Aut(M)$$

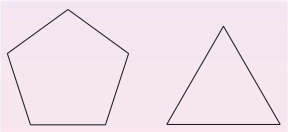
.

Cuando $S$ es una superficie con una métrica Riemanniana, a cada mapa $M = (\Gamma, S)$ le podemos asociar *el grupo de isometrías*. Éstas son las isometrías de $S$ que preservan el conjunto de vértices y aristas de $\Gamma$ globalmente.

Toda isometría es un automorfismo pero no todo automorfismo es una simetría (¡Ejercicio!)

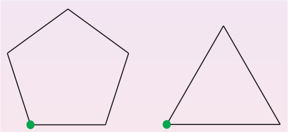
# Banderas de un mapa

Una *bandera* en un mapa $M = (\Gamma, S)$ es un triángulo cuyos vértices son: un vértice $v$ del mapa $M$, el punto medio de una arista $e$ de $M$ y un punto interior de una cara de $M$ que contiene a $e$.



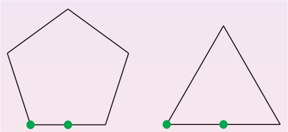
# Banderas de un mapa

Una *bandera* en un mapa $M = (\Gamma, S)$ es un triángulo cuyos vértices son: un vértice $v$ del mapa $M$, el punto medio de una arista $e$ de $M$ y un punto interior de una cara de $M$ que contiene a $e$.



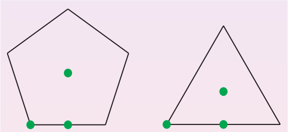
# Banderas de un mapa

Una *bandera* en un mapa $M = (\Gamma, S)$ es un triángulo cuyos vértices son: un vértice $v$ del mapa $M$, el punto medio de una arista $e$ de $M$ y un punto interior de una cara de $M$ que contiene a $e$.



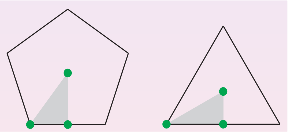
# Banderas de un mapa

Una *bandera* en un mapa $M = (\Gamma, S)$ es un triángulo cuyos vértices son: un vértice $v$ del mapa $M$, el punto medio de una arista $e$ de $M$ y un punto interior de una cara de $M$ que contiene a $e$.



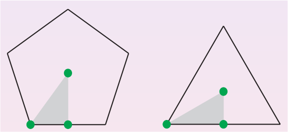
# Banderas de un mapa

Una *bandera* en un mapa $M = (\Gamma, S)$ es un triángulo cuyos vértices son: un vértice $v$ del mapa $M$, el punto medio de una arista $e$ de $M$ y un punto interior de una cara de $M$ que contiene a $e$.



# Banderas de un mapa

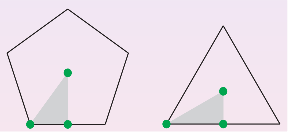
Una *bandera* en un mapa $M = (\Gamma, S)$ es un triángulo cuyos vértices son: un vértice $v$ del mapa $M$, el punto medio de una arista $e$ de $M$ y un punto interior de una cara de $M$ que contiene a $e$.



El grupo $Aut(M)$ actúa en el conjunto de banderas de $M$. Decimos que el mapa $M$ *es regular* si esta acción es transitiva.

# Banderas de un mapa

Una *bandera* en un mapa $M = (\Gamma, S)$ es un triángulo cuyos vértices son: un vértice $v$ del mapa $M$, el punto medio de una arista $e$ de $M$ y un punto interior de una cara de $M$ que contiene a $e$.



El grupo $Aut(M)$ actúa en el conjunto de banderas de $M$. Decimos que el mapa $M$ *es regular* si esta acción es transitiva.

Tomemos $G$ un grupo finitamente generado y $A$ un sistema de generadores. La gráfica de Cayley de $G$ es la gráfica $\Gamma(G, A)$ cuyos vértices son los elementos de $G$ y cuyas aristas son $(g, ga)$ para cada $a \in A$. La gráfica $\Gamma(G, A)$ se puede volver un espacio topológico decretando que cada arista tiene longitud 1. Definimos el espacio de fines de $G$ como el espacio de fines de la gráfica $\Gamma(G, A)$.

**Lema (Švarc-Milnor)**

Sea $S$ una superficie. Supongamos que $G$ actúa sobre $S$ por homeomorfismos de manera propia, discontinua y cocompacta. Entonces los espacios de fines de $S$ y de $G$ son homeomorfos.

Tomemos $G$ un grupo finitamente generado y $A$ un sistema de generadores.La gráfica de Cayley de $G$ es la gráfica $\Gamma(G, A)$ cuyos vértices son los elementos de $G$ y cuyas aristas son $(g, ga)$ para cada $a \in A$. La gráfica $\Gamma(G, A)$ se puede volver un espacio topológico decretando que cada arista tiene longitud 1.Definimos el espacio de fines de $G$ como el espacio de fines de la gráfica $\Gamma(G, A)$.

**Lema (Švarc-Milnor)**

Sea $S$ una superficie. Supongamos que $G$ actúa sobre $S$ por homeomorfismos de manera propia, discontinua y cocompacta. Entonces los espacios de fines de $S$ y de $G$ son homeomorfos.

# Teoría geométrica de grupos

Tomemos $G$ un grupo finitamente generado y $A$ un sistema de generadores.La gráfica de Cayley de $G$ es la gráfica $\Gamma(G, A)$ cuyos vértices son los elementos de $G$ y cuyas aristas son $(g, ga)$ para cada $a \in A$. La gráfica $\Gamma(G, A)$ se puede volver un espacio topológico decretando que cada arista tiene longitud 1.Definimos el espacio de fines de $G$ como el espacio de fines de la gráfica $\Gamma(G, A)$.

**Lema (Švarc-Milnor)**

Sea $S$ una superficie. Supongamos que $G$ actúa sobre $S$ por homeomorfismos de manera propia, discontinua y cocompacta. Entonces los espacios de fines de $S$ y de $G$ son homeomorfos.

# Teoría geométrica de grupos

Tomemos $G$ un grupo finitamente generado y $A$ un sistema de generadores.La gráfica de Cayley de $G$ es la gráfica $\Gamma(G, A)$ cuyos vértices son los elementos de $G$ y cuyas aristas son $(g, ga)$ para cada $a \in A$. La gráfica $\Gamma(G, A)$ se puede volver un espacio topológico decretando que cada arista tiene longitud 1.Definimos el espacio de fines de $G$ como el espacio de fines de la gráfica $\Gamma(G, A)$.

**Lema (Švarc-Milnor)**

Sea $S$ una superficie. Supongamos que $G$ actúa sobre $S$ por homeomorfismos de manera propia, discontinua y cocompacta. Entonces los espacios de fines de $S$ y de $G$ son homeomorfos.

# Teoría geométrica de grupos

Tomemos $G$ un grupo finitamente generado y $A$ un sistema de generadores.La gráfica de Cayley de $G$ es la gráfica $\Gamma(G,A)$ cuyos vértices son los elementos de $G$ y cuyas aristas son $(g,ga)$ para cada $a \in A$. La gráfica $\Gamma(G,A)$ se puede volver un espacio topológico decretando que cada arista tiene longitud 1.Definimos el espacio de fines de $G$ como el espacio de fines de la gráfica $\Gamma(G,A)$.

**Lema (Švarc-Milnor)**

Sea $S$ una superficie. Supongamos que $G$ actúa sobre $S$ por homeomorfismos de manera propia, discontinua y cocompacta. Entonces los espacios de fines de $S$ y de $G$ son homeomorfos.

# Teoría geométrica de grupos

**Teorema (Stallings)**

Sea $G$ un grupo finitamente generado. Entonces el espacio de fines de $G$ es uno de los siguientes:

1. El vacío sii $G$ es finito.
2. Un punto (e.g. $G$ virtualmente $\mathbb{Z}^k$ con $k \geq 2$).
3. Un conjunto con dos elementos sii $G$ es virtualmente $\mathbb{Z}$.
4. Un conjunto de Cantor sii $G$ se escinde como un producto libre no trivial o es una extensión HNN sobre un grupo finito.

# Teoría geométrica de grupos

**Teorema (Stallings)**

Sea $G$ un grupo finitamente generado. Entonces el espacio de fines de $G$ es uno de los siguientes:

1. El vacío sii $G$ es finito.
2. Un punto (e.g. $G$ virtualmente $\mathbb{Z}^k$ con $k \geq 2$).
3. Un conjunto con dos elementos sii $G$ es virtualmente $\mathbb{Z}$.
4. Un conjunto de Cantor sii $G$ se escinde como un producto libre no trivial o es una extensión HNN sobre un grupo finito.

# Teoría geométrica de grupos

**Teorema (Stallings)**

Sea $G$ un grupo finitamente generado. Entonces el espacio de fines de $G$ es uno de los siguientes:

1. El vacío sii $G$ es finito.
2. Un punto (e.g. $G$ virtualmente $\mathbb{Z}^k$ con $k \geq 2$).
3. Un conjunto con dos elementos sii $G$ es virtualmente $\mathbb{Z}$.
4. Un conjunto de Cantor sii $G$ se escinde como un producto libre no trivial o es una extensión HNN sobre un grupo finito.

# Teoría geométrica de grupos

## Teorema (Stallings)

Sea $G$ un grupo finitamente generado. Entonces el espacio de fines de $G$ es uno de los siguientes:

1. El vacío sii $G$ es finito.
2. Un punto (e.g. $G$ virtualmente $\mathbb{Z}^k$ con $k \geq 2$).
3. Un conjunto con dos elementos sii $G$ es virtualmente $\mathbb{Z}$.
4. Un conjunto de Cantor sii $G$ se escinde como un producto libre no trivial o es una extensión HNN sobre un grupo finito.

# Teoría geométrica de grupos

**Teorema (Stallings)**

Sea $G$ un grupo finitamente generado. Entonces el espacio de fines de $G$ es uno de los siguientes:

1. El vacío sii $G$ es finito.
2. Un punto (e.g. $G$ virtualmente $\mathbb{Z}^k$ con $k \geq 2$).
3. Un conjunto con dos elementos sii $G$ es virtualmente $\mathbb{Z}$.
4. Un conjunto de Cantor sii $G$ se escinde como un producto libre no trivial o es una extensión HNN sobre un grupo finito.

**Teorema (Stallings)**

Sea $G$ un grupo finitamente generado. Entonces el espacio de fines de $G$ es uno de los siguientes:

1. El vacío sii $G$ es finito.
2. Un punto (e.g. $G$ virtualmente $\mathbb{Z}^k$ con $k \geq 2$).
3. Un conjunto con dos elementos sii $G$ es virtualmente $\mathbb{Z}$.
4. Un conjunto de Cantor sii $G$ se escinde como un producto libre no trivial o es una extensión HNN sobre un grupo finito.

# Cubiertas mínimas regulares

Dado un mapa $M = (\Gamma, S)$ llamamos cubriente *regular* a un cubriente:

$$\pi : \widetilde{M} := (\widetilde{\Gamma}, \widetilde{S}) \to (\Gamma, S)$$

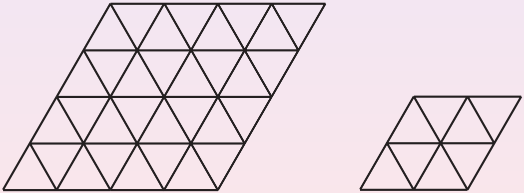
donde $\widetilde{M}$ es regular.

# Cubiertas mínimas regulares

Dado un mapa $M = (\Gamma, S)$ llamamos cubriente *regular* a un mapeo cubriente:

$$\pi : \widetilde{M} := (\widetilde{\Gamma}, \widetilde{S}) \to (\Gamma, S)$$

donde $\widetilde{M}$ es regular.

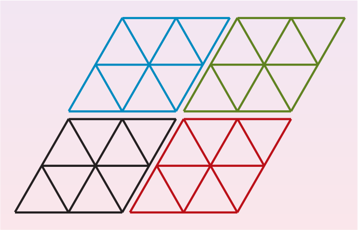


# Cubiertas mínimas regulares

Dado un mapa $M = (\Gamma, S)$ llamamos cubriente *regular* a un mapeo cubriente:

$$\pi : \widetilde{M} := (\widetilde{\Gamma}, \widetilde{S}) \to (\Gamma, S)$$

donde $\widetilde{M}$ es regular.

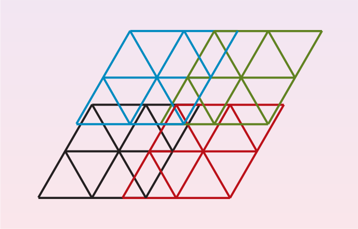


# Cubiertas mínimas regulares

Dado un mapa $M = (\Gamma, S)$ llamamos cubriente *regular* a un mapeo cubriente:

$$\pi : \widetilde{M} := (\widetilde{\Gamma}, \widetilde{S}) \to (\Gamma, S)$$

donde $\widetilde{M}$ es regular.

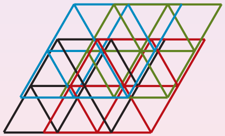


# Cubiertas mínimas regulares

Dado un mapa $M = (\Gamma, S)$ llamamos cubriente *regular* a un mapeo cubriente:

$$\pi : \widetilde{M} := (\widetilde{\Gamma}, \widetilde{S}) \to (\Gamma, S)$$

donde $\widetilde{M}$ es regular.

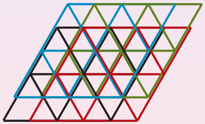


# Cubiertas mínimas regulares

Dado un mapa $M = (\Gamma, S)$ llamamos cubriente *regular* a un mapeo cubriente:

$$\pi : \widetilde{M} := (\widetilde{\Gamma}, \widetilde{S}) \to (\Gamma, S)$$

donde $\widetilde{M}$ es regular.

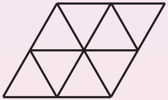


# Cubiertas mínimas regulares

Dado un mapa $M = (\Gamma, S)$ llamamos cubriente *regular* a un mapa cubriente:

$$\pi : \widetilde{M} := (\widetilde{\Gamma}, \widetilde{S}) \to (\Gamma, S)$$

donde $\widetilde{M}$ es regular.



# Resultado principal

**Teorema**

Sea $M = M(\Gamma, \mathbb{R}^2)$ un mapa con caras convexas con al menos dos caras de diferentes tamaños y tal que el grupo de simetrías de $M$ tiene al menos dos translaciones linealmente independientes. Entonces el cubriente mínimo regular $\widetilde{M} = \widetilde{M}(\widetilde{\Gamma}, \widetilde{S})$ toma lugar en una superficie $\widetilde{S}$ homeomorfa al monstruo del lago Ness.

# Resultado principal

**Teorema**

Sea $M = M(\Gamma, \mathbb{R}^2)$ un mapa con caras convexas con al menos dos caras de diferentes tamaños y tal que el grupo de simetrías de $M$ tiene al menos dos translaciones linealmente independientes. Entonces el cubriente mínimo regular $\widetilde{M} = \widetilde{M}(\widetilde{\Gamma}, \widetilde{S})$ toma lugar en una superficie $\widetilde{S}$ homeomorfa al monstruo del lago Ness.

# Resultado principal

**Teorema**

Sea $M = M(\Gamma, \mathbb{R}^2)$ un mapa con caras convexas con al menos dos caras de diferentes tamaños y tal que el grupo de simetrías de $M$ tiene al menos dos translaciones linealmente independientes. Entonces el cubriente mínimo regular $\widetilde{M} = \widetilde{M}(\widetilde{\Gamma}, \widetilde{S})$ toma lugar en una superficie $\widetilde{S}$ homeomorfa al monstruo del lago Ness.

# Resultado principal

**Teorema**

Sea $M = M(\Gamma, \mathbb{R}^2)$ un mapa con caras convexas con al menos dos caras de diferentes tamaños y tal que el grupo de simetrías de $M$ tiene al menos dos translaciones linealmente independientes. Entonces el cubriente mínimo regular $\widetilde{M} = \widetilde{M}(\widetilde{\Gamma}, \widetilde{S})$ toma lugar en una superficie $\widetilde{S}$ homeomorfa al monstruo del lago Ness.

*Idea de la prueba*. Un fin: el grupo $Aut(\widetilde{M})$ es *virtualmente* un grupo abeliano de rango mayor o igual a dos. Luego aplicamos el teorema de Stallings y el lema de Svarc-Milnor. Género infinito: basta probar que hay género y dejar actuar al grupo de automorfismos.

# Resultado principal

**Teorema**

Sea $M = M(\Gamma, \mathbb{R}^2)$ un mapa con caras convexas con al menos dos caras de diferentes tamaños y tal que el grupo de simetrías de $M$ tiene al menos dos translaciones linealmente independientes. Entonces el cubriente mínimo regular $\widetilde{M} = \widetilde{M}(\widetilde{\Gamma}, \widetilde{S})$ toma lugar en una superficie $\widetilde{S}$ homeomorfa al monstruo del lago Ness.

*Idea de la prueba*. Un fin: el grupo $Aut(\widetilde{M})$ es *virtualmente* un grupo abeliano de rango mayor o igual a dos. Luego aplicamos el teorema de Stallings y el lema de Svarc-Milnor. Género infinito: basta probar que hay género y dejar actuar al grupo de automorfismos.

# Resultado principal

**Teorema**

Sea $M = M(\Gamma, \mathbb{R}^2)$ un mapa con caras convexas con al menos dos caras de diferentes tamaños y tal que el grupo de simetrías de $M$ tiene al menos dos translaciones linealmente independientes. Entonces el cubriente mínimo regular $\widetilde{M} = \widetilde{M}(\widetilde{\Gamma}, \widetilde{S})$ toma lugar en una superficie $\widetilde{S}$ homeomorfa al monstruo del lago Ness.

*Idea de la prueba*. Un fin: el grupo $Aut(\widetilde{M})$ es *virtualmente* un grupo abeliano de rango mayor o igual a dos. Luego aplicamos el teorema de Stallings y el lema de Svarc-Milnor. Género infinito: basta probar que hay género y dejar actuar al grupo de automorfismos.

# Resultado principal

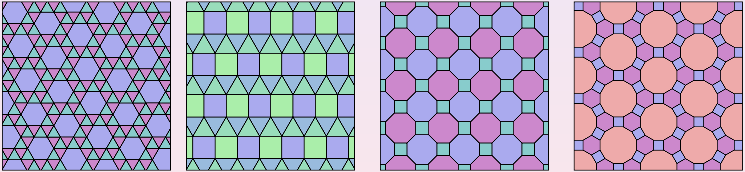
**Corolario**

El cubriente mínimo regular de un mapa arquimedeano toma lugar en una superficie homeomorfa al monstruo del lago Ness.

# Resultado principal

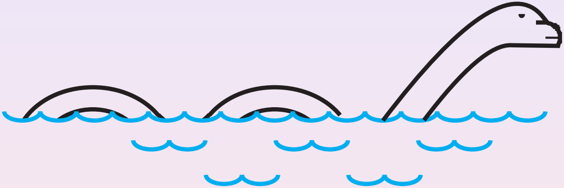
## Corolario

El cubriente mínimo regular de un mapa arquimedeano toma lugar en una superficie homeomorfa al monstruo del lago Ness.



Algunos mapas arquimedeanos.

# ¡Muchas gracias a todos por su atención!



Fin.
(arXiv:1210.1518)