

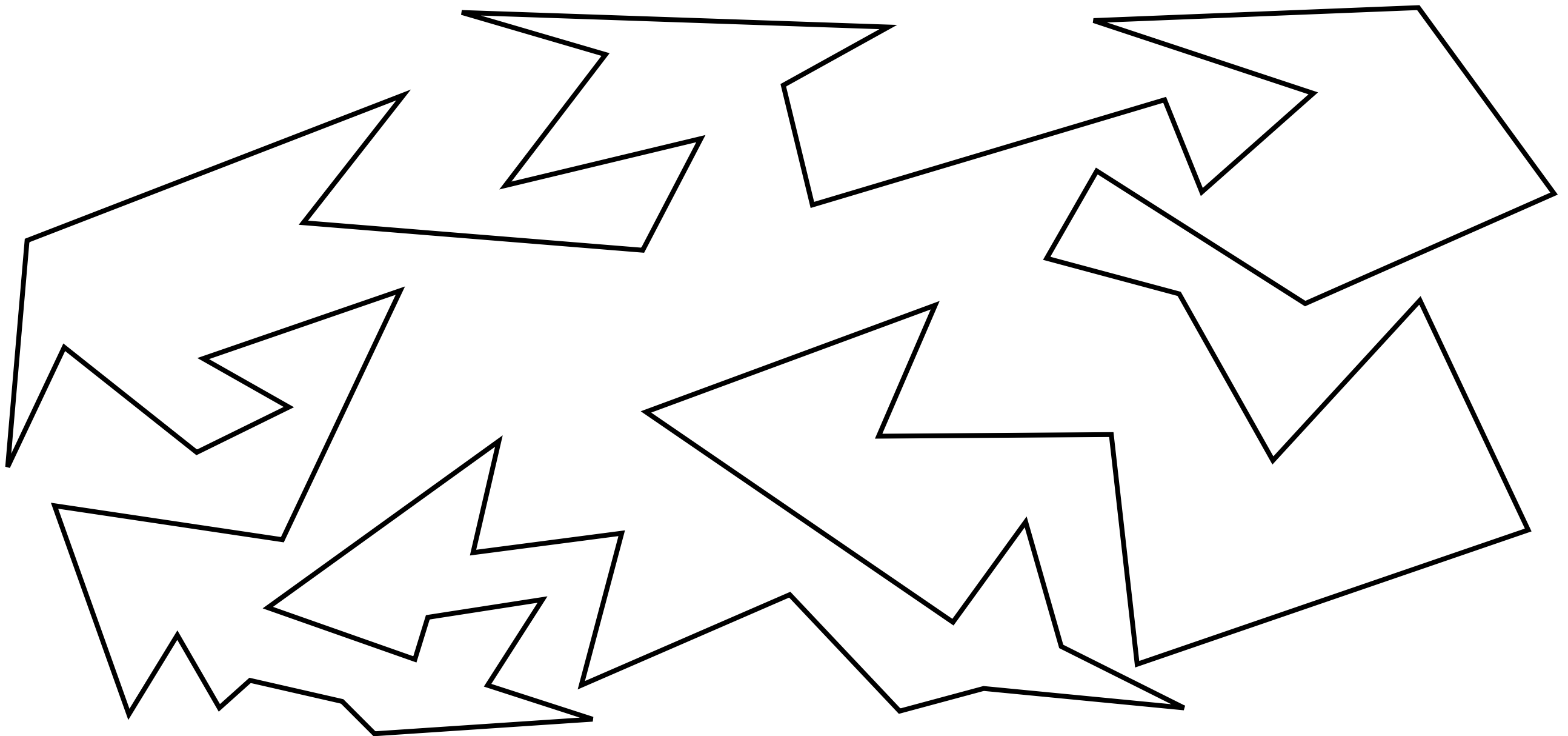
Iluminando galerías de arte en 3D

Javier Cano, Csaba D.Tóth and Jorge Urrutia

XVIII Coloquio Víctor Neumann-Lara de Teoría de Gráficas, Combinatoria y sus Aplicaciones, 2013

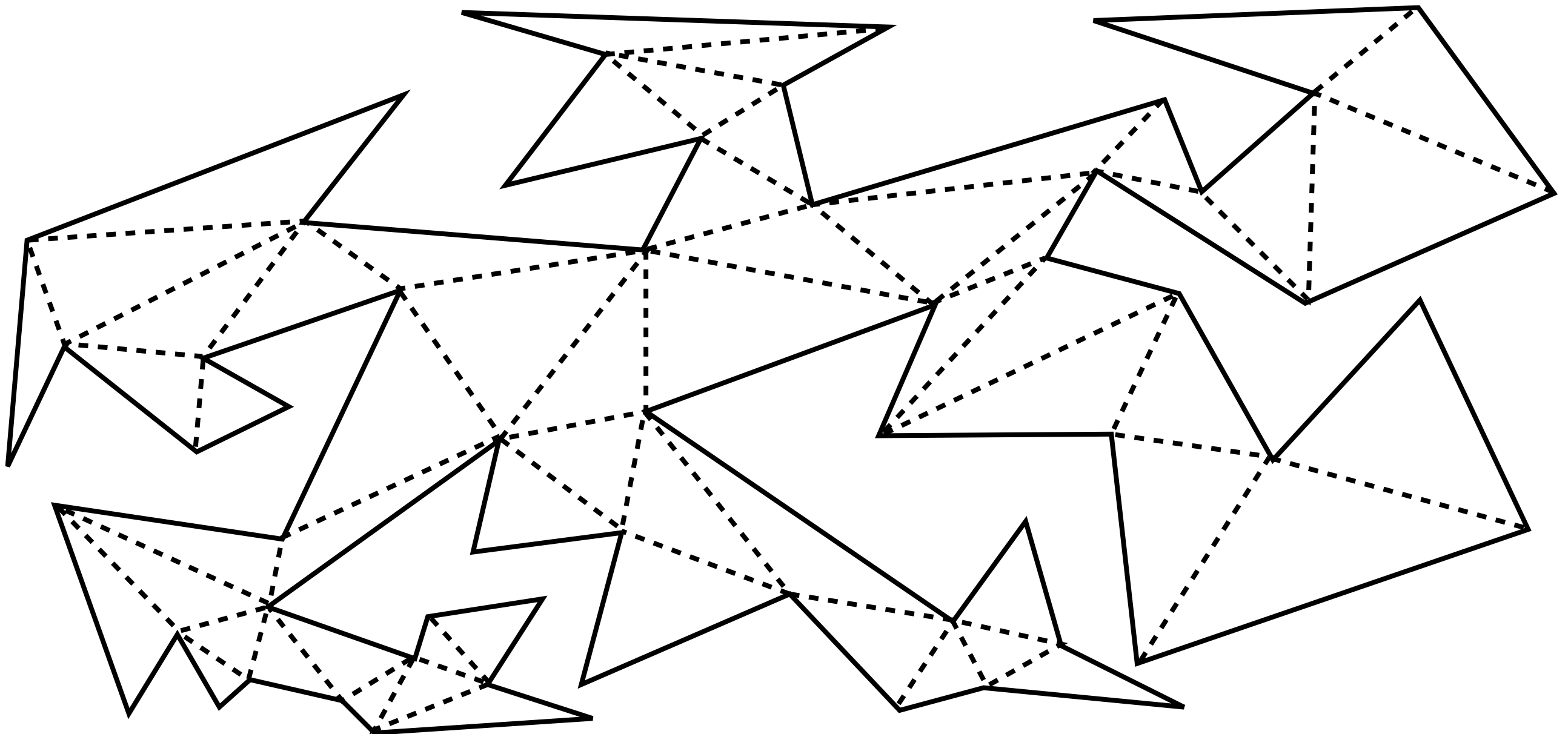
Problema de la galería de arte

¿Cuántos focos son suficientes y a veces necesarios para iluminar el interior de una galería de arte?



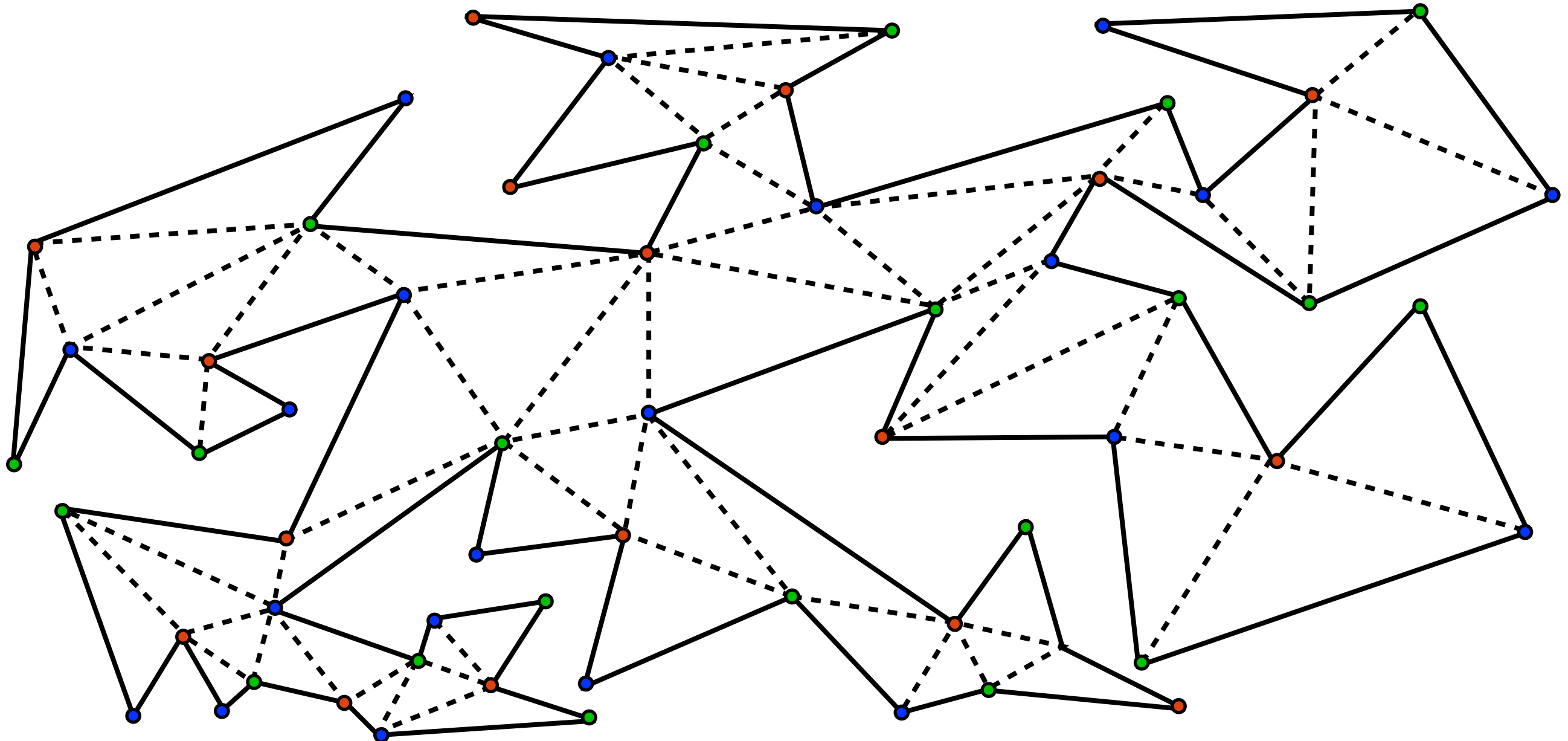
Problema de la galería de arte

¿Cuántos focos son suficientes y a veces necesarios para iluminar el interior de una galería de arte?



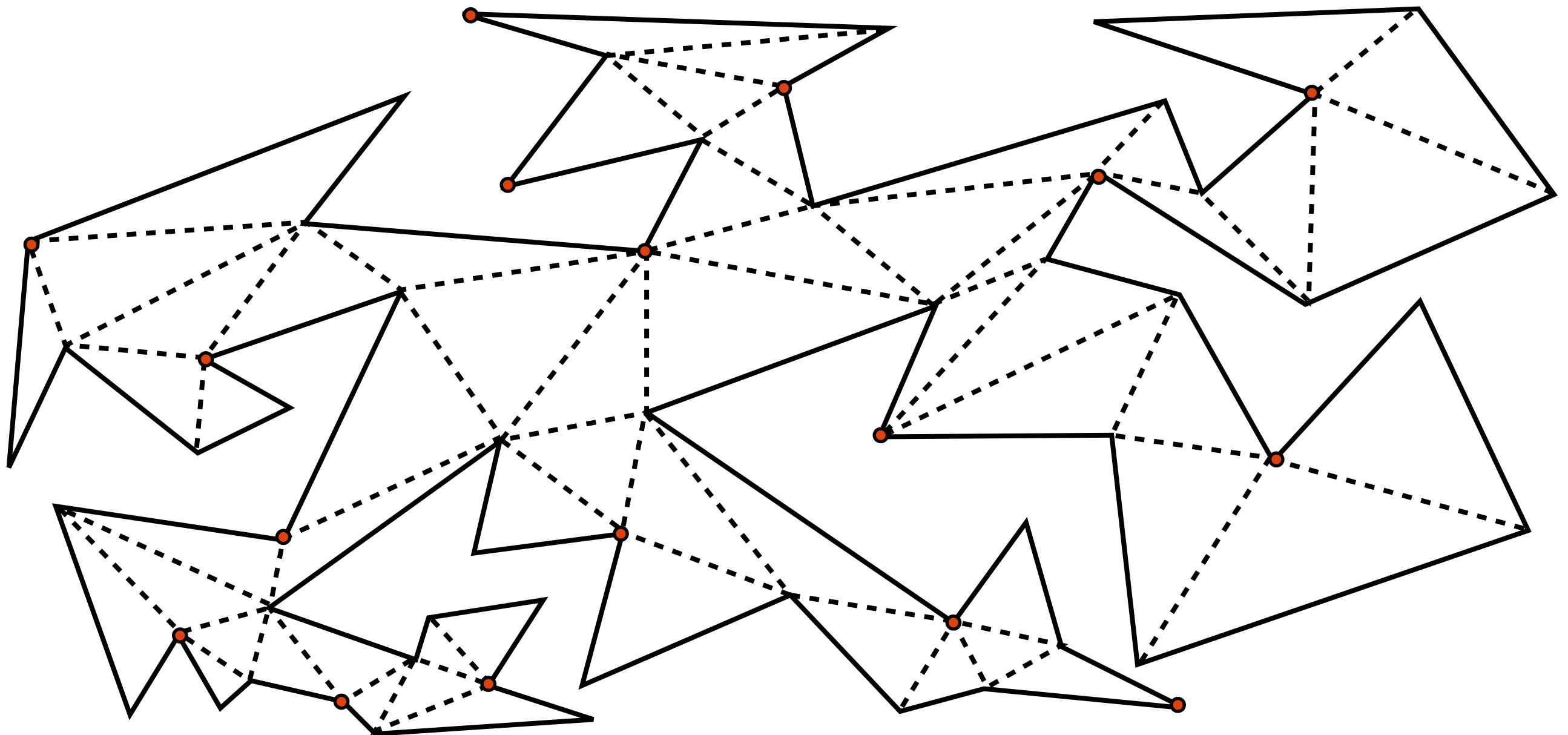
Problema de la galería de arte

¿Cuántos focos son suficientes y a veces necesarios para iluminar el interior de una galería de arte?



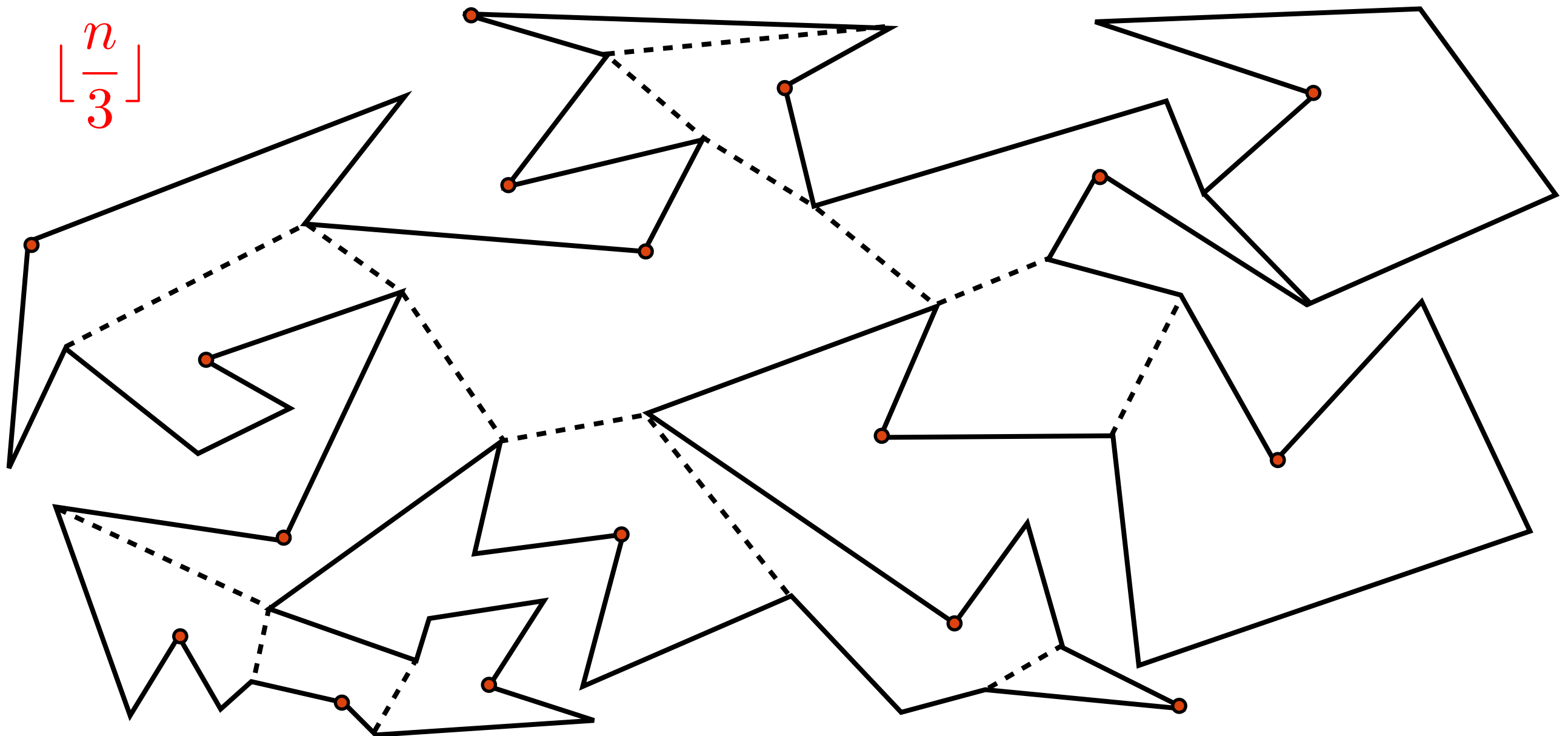
Problema de la galería de arte

¿Cuántos focos son suficientes y a veces necesarios para iluminar el interior de una galería de arte?



Problema de la galería de arte

¿Cuántos focos son suficientes y a veces necesarios para iluminar el interior de una galería de arte?



Iluminando poliedros

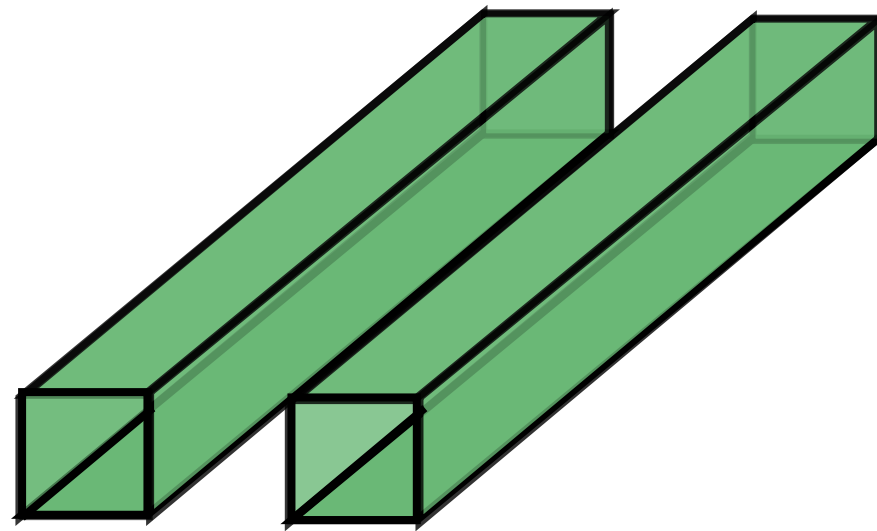
¿Cuántos focos son suficientes y a veces necesarios para iluminar el interior de una galería de arte, en 3-D?

Iluminando poliedros

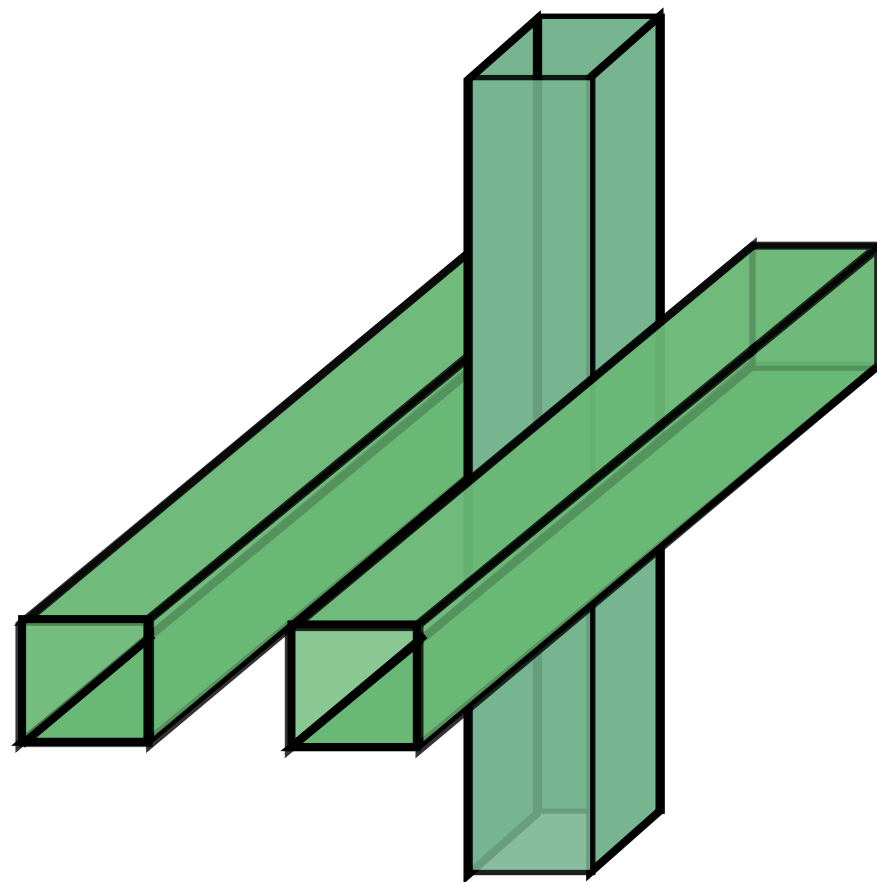
¿Cuántos focos son suficientes y a veces necesarios para iluminar el interior de una galería de arte, en 3-D?

¡¡No siempre se puede con vértices, y a veces $\omega(n)$ puntos son necesarios!!

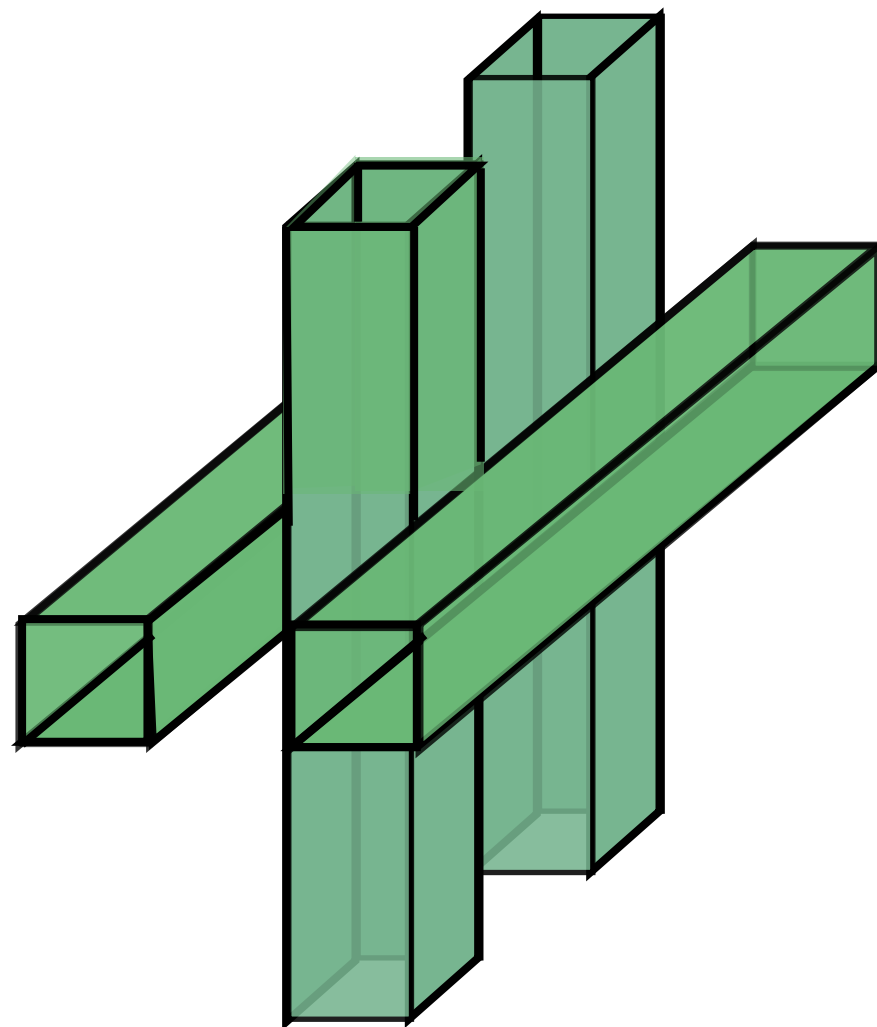
Los vértices no son suficientes



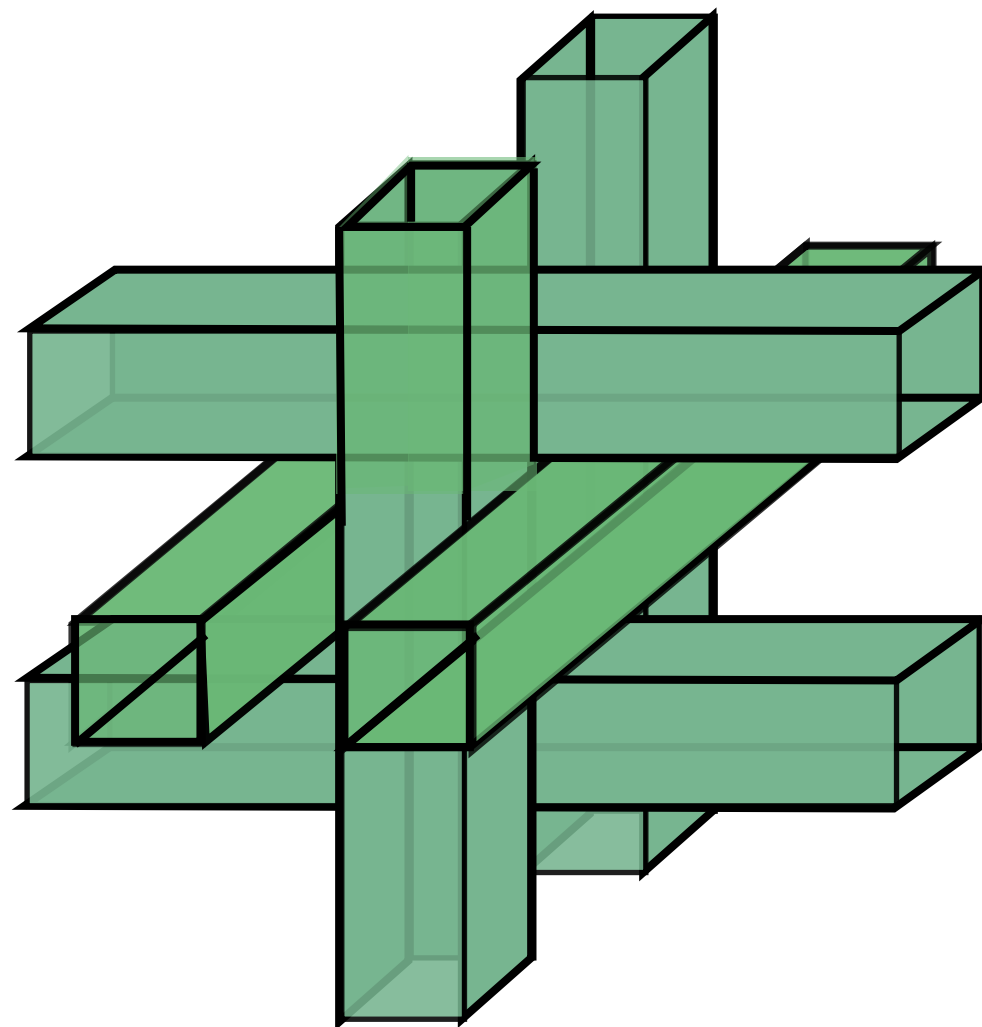
Los vértices no son suficientes



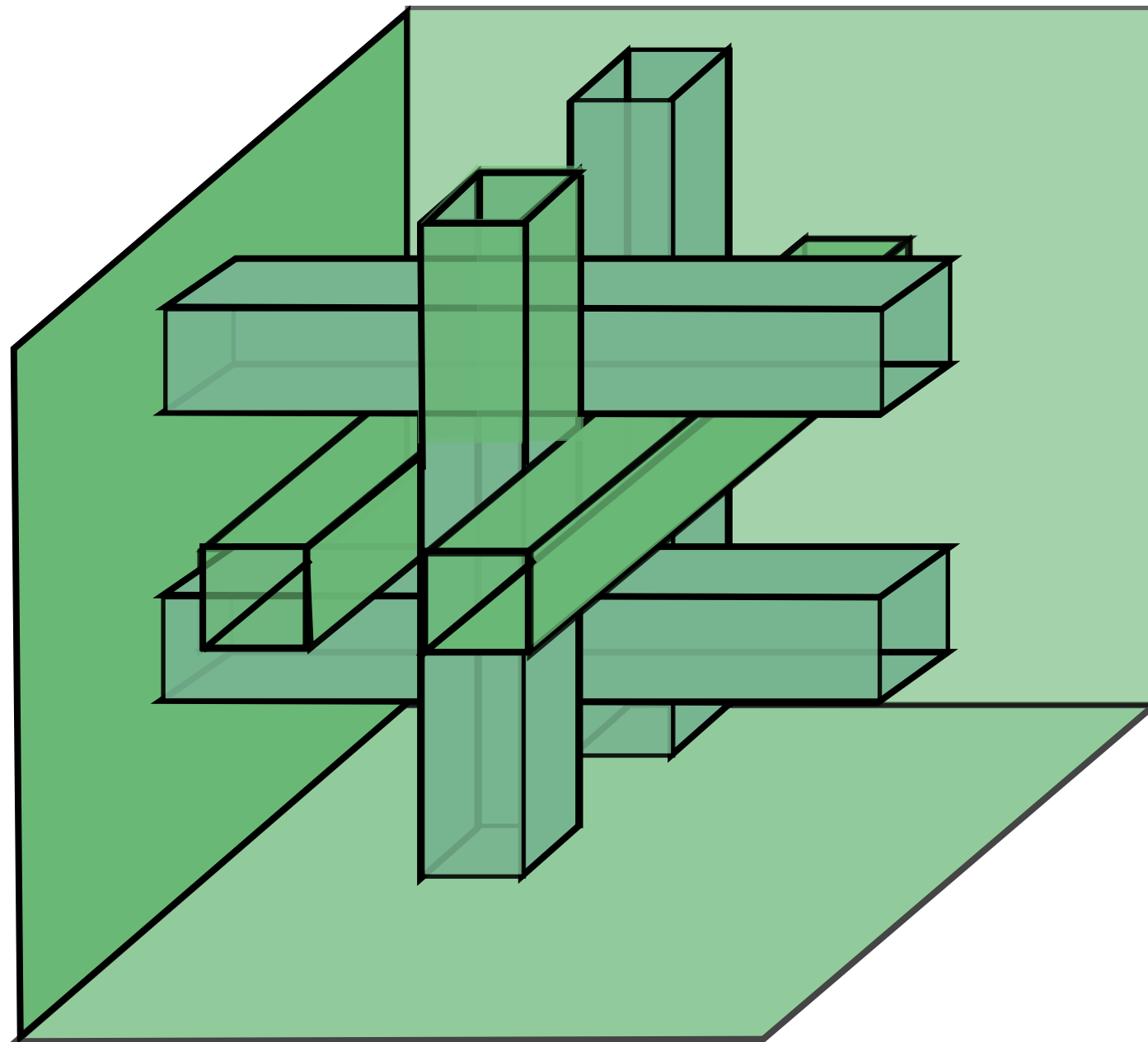
Los vértices no son suficientes



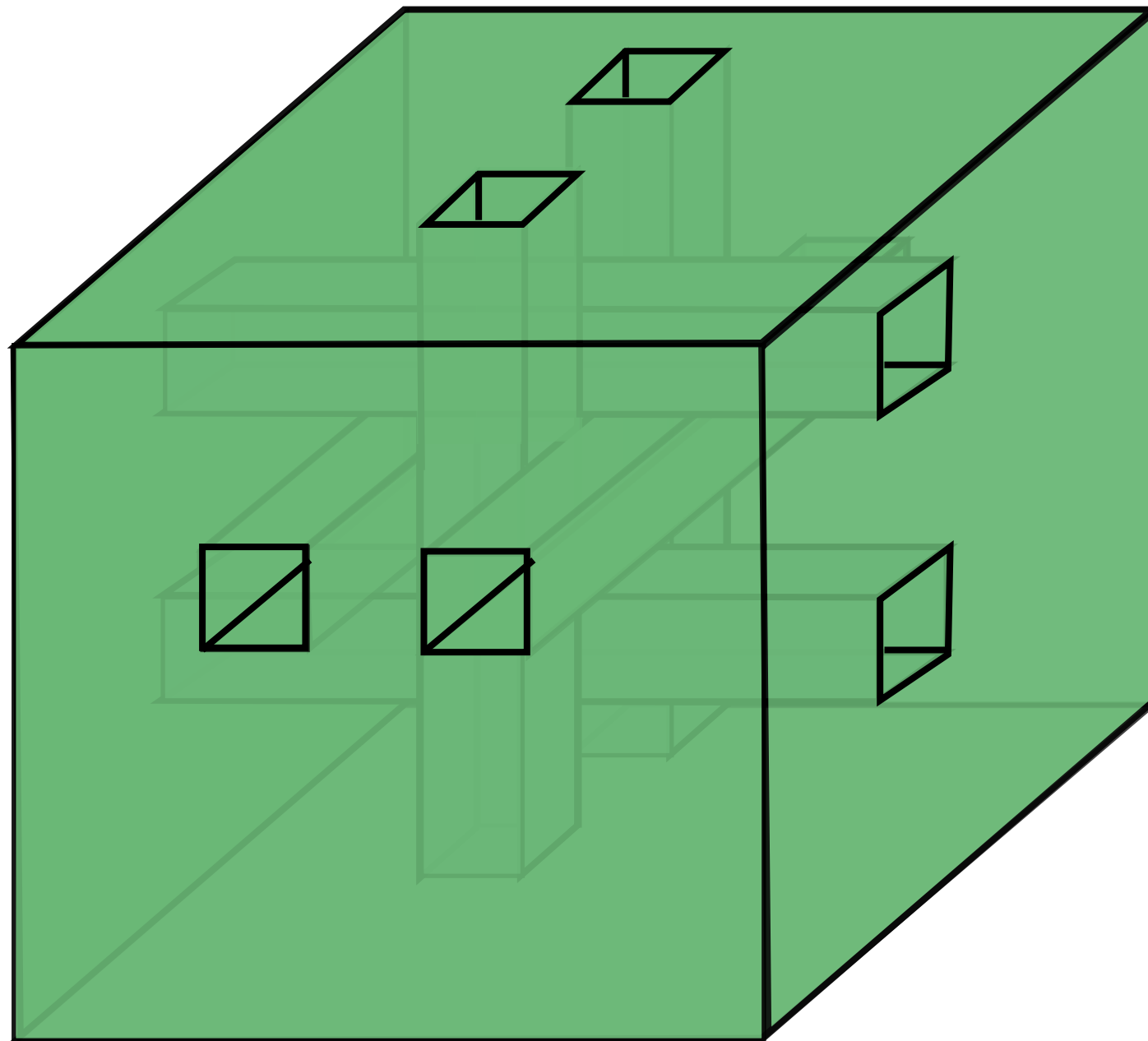
Los vértices no son suficientes



Los vértices no son suficientes



Los vértices no son suficientes



(lámparas-arista)

¡¡Mejor lámparas ahorradoras!!



(lámparas-arista)

¡¡Mejor lámparas ahorradoras!!



**¿Cuántas lámparas-arista son
suficientes para iluminar un poliedro?**

¿Cuántas lámparas-arista son suficientes para iluminar un poliedro?

Es fácil probar una cota superior de $m - O(1)$ lámparas-arista, donde m es el número de aristas.

¿Cuántas lámparas-arista son suficientes para iluminar un poliedro?

Es fácil probar una cota superior de $m - O(1)$ lámparas-arista, donde m es el número de aristas.

En 1998 Jorge se preguntó si era posible iluminar un poliedro usando cm lámparas-arista, con $c < 1$

¿Cuántas lámparas-arista son suficientes para iluminar un poliedro?

Es fácil probar una cota superior de $m - O(1)$ lámparas-arista, donde m es el número de aristas.

En 1998 Jorge se preguntó si era posible iluminar un poliedro usando cm lámparas-arista, con $c < 1$

Por fin, pudimos contestar que sí es posible...

¿Cuántas lámparas-arista son suficientes para iluminar un poliedro?

La estrategia:

¿Cuántas lámparas-arista son suficientes para iluminar un poliedro?

La estrategia:

Primero, encontramos un conjunto E_1 de aristas que cubra todos los vértices

¿Cuántas lámparas-arista son suficientes para iluminar un poliedro?

La estrategia:

Primero, encontramos un conjunto E_1 de aristas que cubra todos los vértices

Después, partimos el resto de aristas en 4 clases, tales que cualquier punto del poliedro que no vea ningún vértice ve al menos 2 aristas en clases distintas. Tomamos las tres clases más pequeñas.

¿Cuántas lámparas-arista son suficientes para iluminar un poliedro?

La estrategia:

Primero, encontramos un conjunto E_1 de aristas que cubra todos los vértices

Después, partimos el resto de aristas en 4 clases, tales que cualquier punto del poliedro que no vea ningún vértice ve al menos 2 aristas en clases distintas. Tomamos las tres clases más pequeñas.

Usamos: $|E_1| + \frac{3}{4}(m - |E_1|) = \frac{3m + |E_1|}{4}$ lámparas

Cubriendo los vértices

Cubriendo los vértices

Un cubrimiento mínimo con aristas de los vértices, contiene un emparejamiento maximal M y una arista por cada vértice que no cubre M .

Cubriendo los vértices

Un cubrimiento mínimo con aristas de los vértices, contiene un emparejamiento maximal M y una arista por cada vértice que no cubre M .

(Edmonds-Gallai) Si M es un emparejamiento maximal de G , entonces existe un subconjunto de vértices U con las propiedades siguientes:

Cubriendo los vértices

Un cubrimiento mínimo con aristas de los vértices, contiene un emparejamiento maximal M y una arista por cada vértice que no cubre M .

(Edmonds-Gallai) Si M es un emparejamiento maximal de G , entonces existe un subconjunto de vértices U con las propiedades siguientes:

- M tiene un emparejamiento perfecto de las componentes pares de $G[V \setminus U]$.
- M tiene un emparejamiento casi perfecto de las componentes impares de $G[V \setminus U]$.
- M empareja a todos los vértices de U con vértices en componentes impares de $G[V \setminus U]$.

Cubriendo los vértices

El 1-esqueleto de un poliedro será una gráfica en la que toda componente es 3-conexa.

Cubriendo los vértices

El 1-esqueleto de un poliedro será una gráfica en la que toda componente es 3-conexa.

¡Veamos qué podemos hacer para gráficas 3-conexas!

Cubriendo los vértices

Cubriendo los vértices

Si $U = \emptyset$ entonces M es un emparejamiento casi perfecto de G con $\lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor$ aristas, y con una más obtenemos un cubrimiento con $\lceil \frac{|V|}{2} \rceil$ aristas.

Cubriendo los vértices

Si $U = \emptyset$ entonces M es un emparejamiento casi perfecto de G con $\lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor$ aristas, y con una más obtenemos un cubrimiento con $\lceil \frac{|V|}{2} \rceil$ aristas.

Pero queremos hacer las cuentas en términos del número de aristas de G .

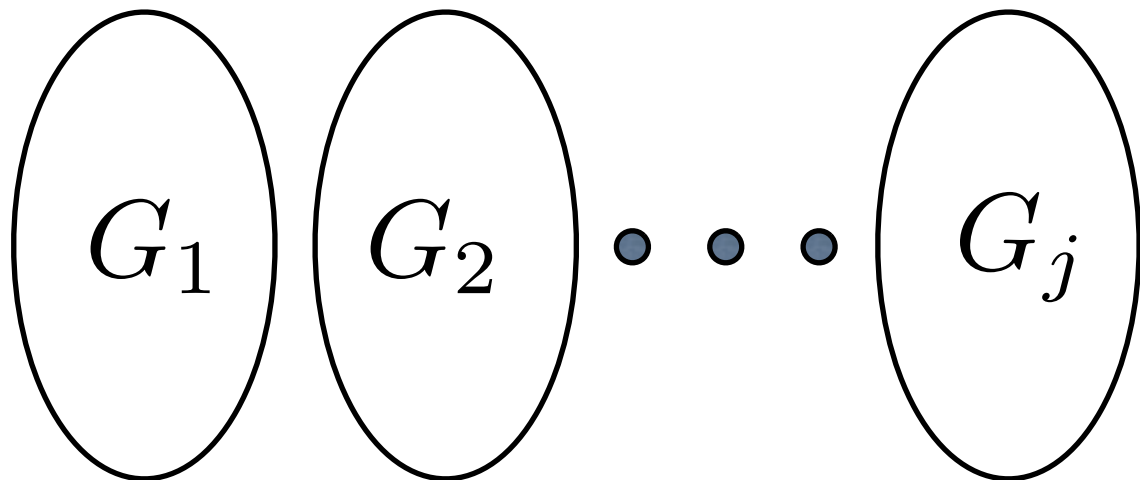
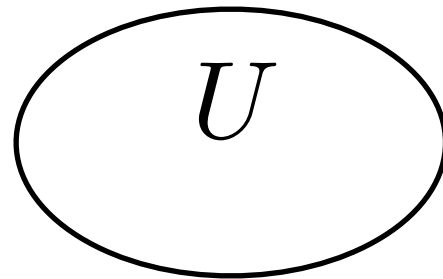
Cubriendo los vértices

Si $U = \emptyset$ entonces M es un emparejamiento casi perfecto de G con $\lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor$ aristas, y con una más obtenemos un cubrimiento con $\lceil \frac{|V|}{2} \rceil$ aristas.

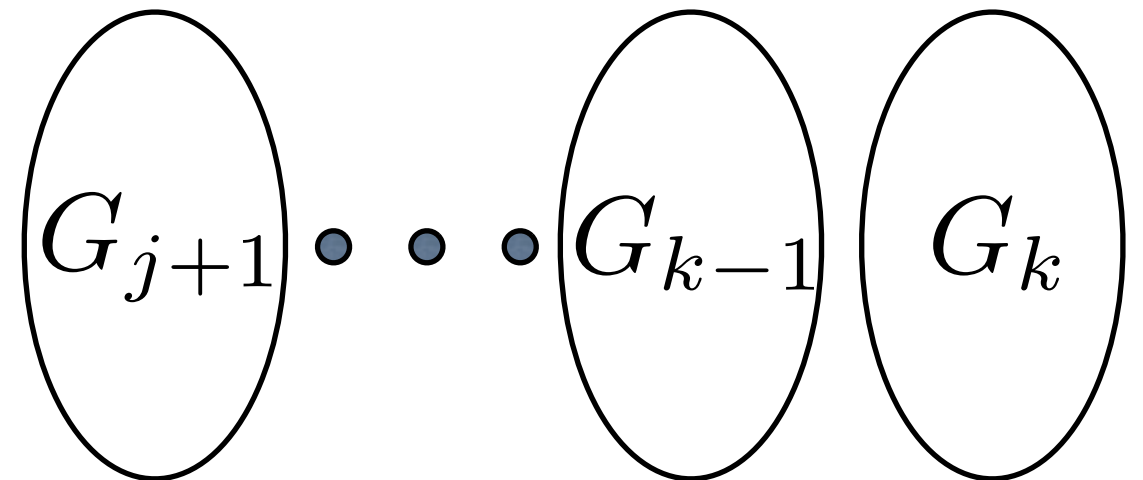
Pero queremos hacer las cuentas en términos del número de aristas de G .

G es 3-conexa así que tiene grado mínimo 3, por lo que tenemos $m \geq 3|V|/2$, así que nuestro cubrimiento tiene a lo más $(m + 1)/3$ aristas.

Cubriendo los vértices

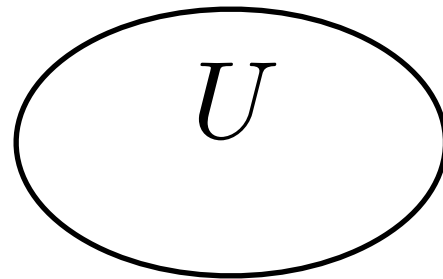


Componentes pares

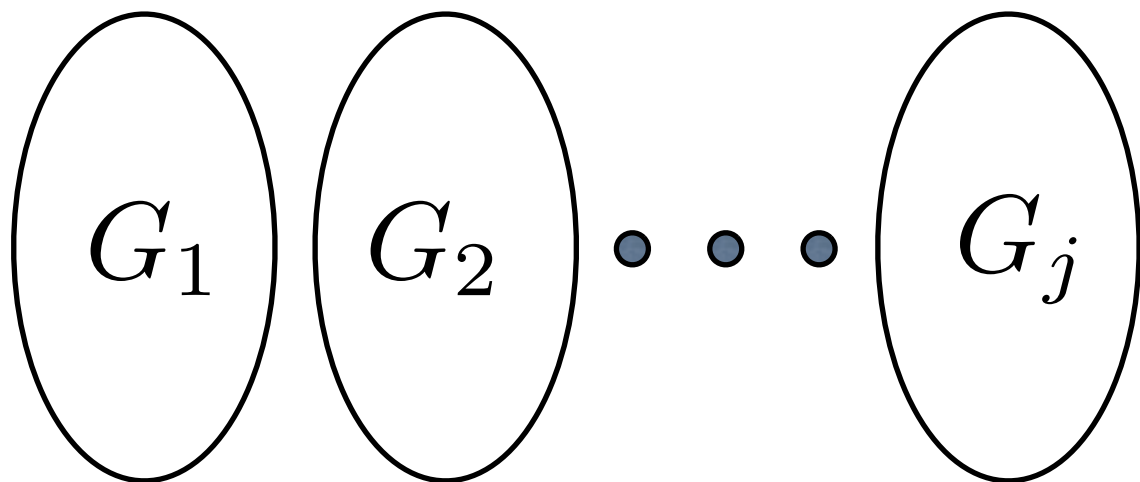


Componentes impares

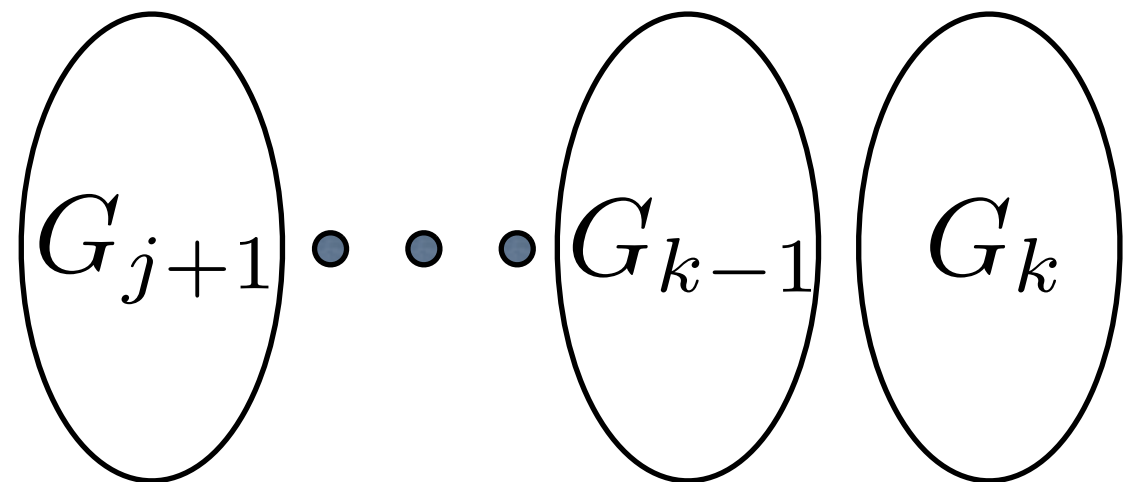
Cubriendo los vértices



Sean $\bar{E}_i$ las aristas con al menos un extremo en G .

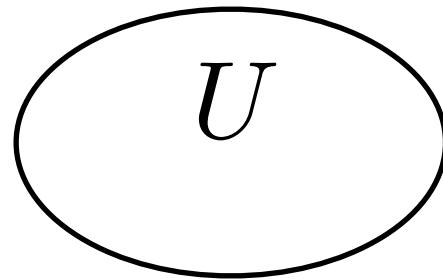


Componentes pares



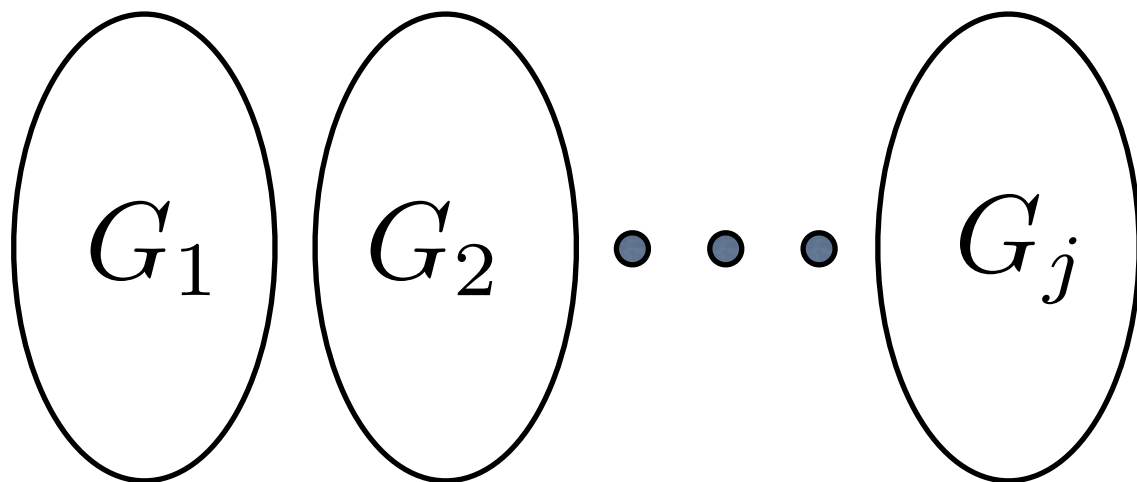
Componentes impares

Cubriendo los vértices

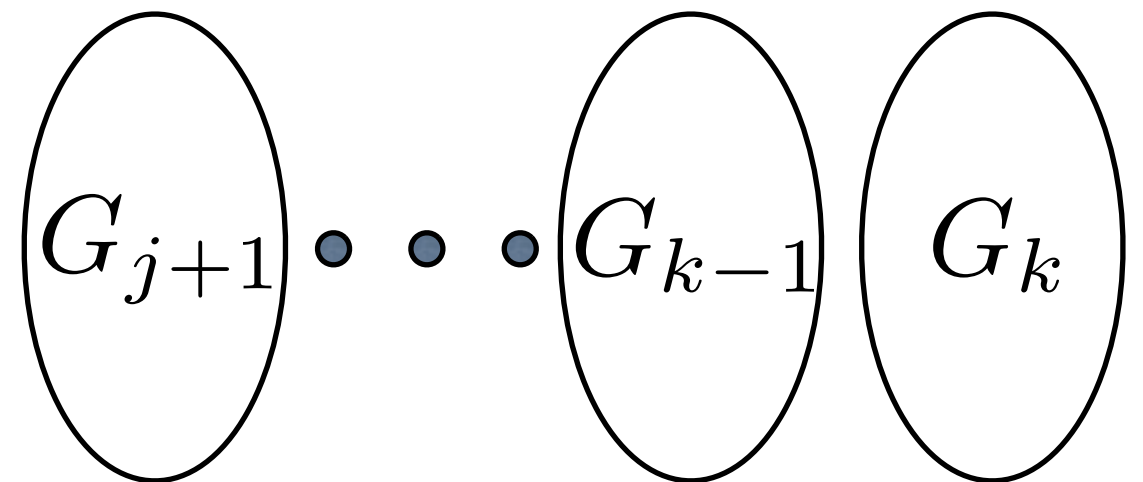


Sean $\bar{E}_i$ las aristas con al menos un extremo en G_i .

Tenemos $|\bar{E}_i| \geq 3(|V_i| + 1)/2$.

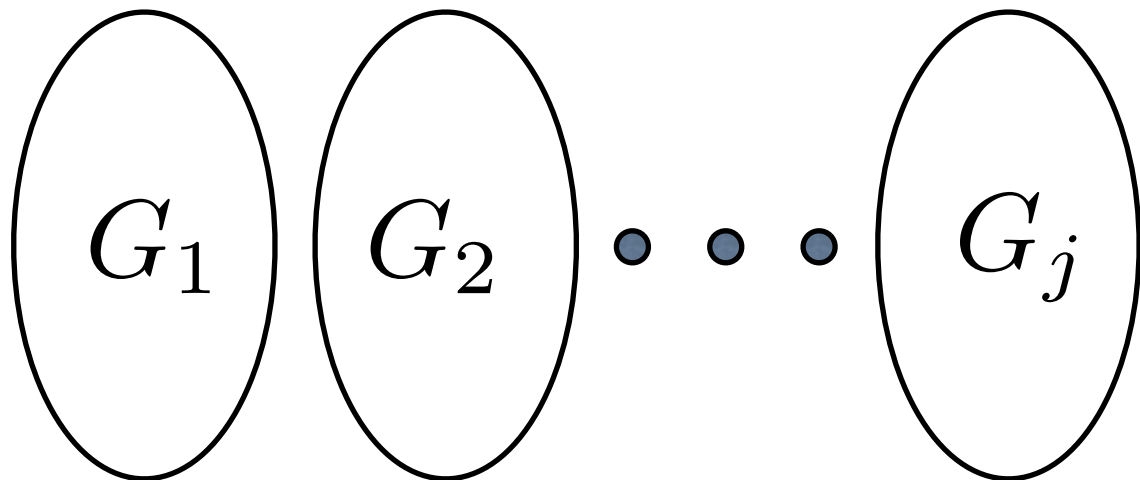
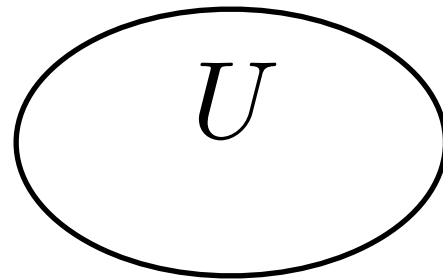


Componentes pares

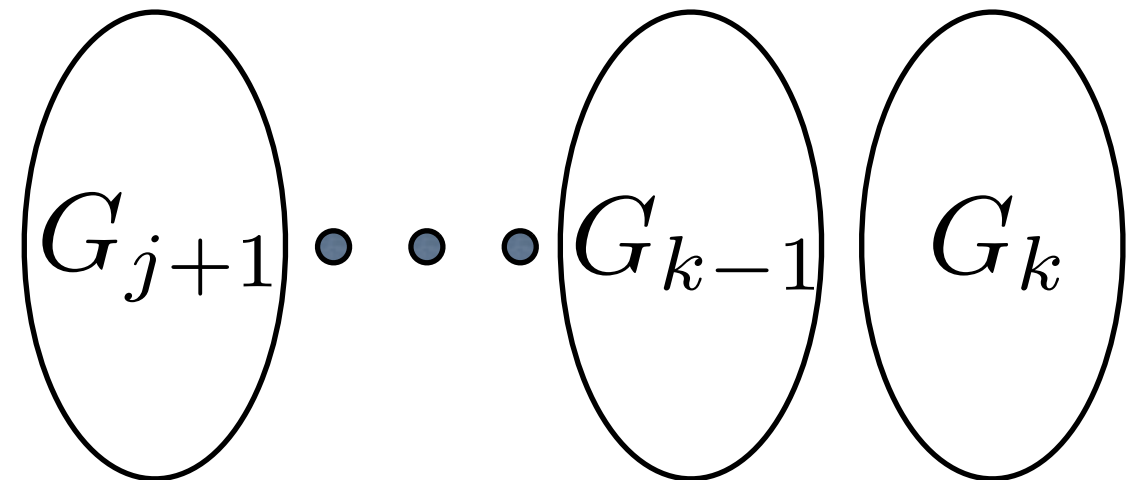


Componentes impares

Cubriendo los vértices

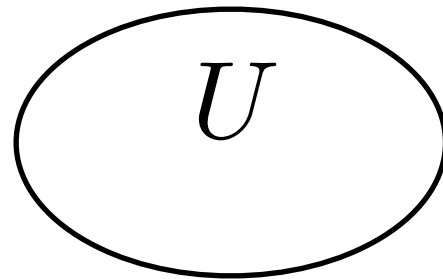


Componentes pares

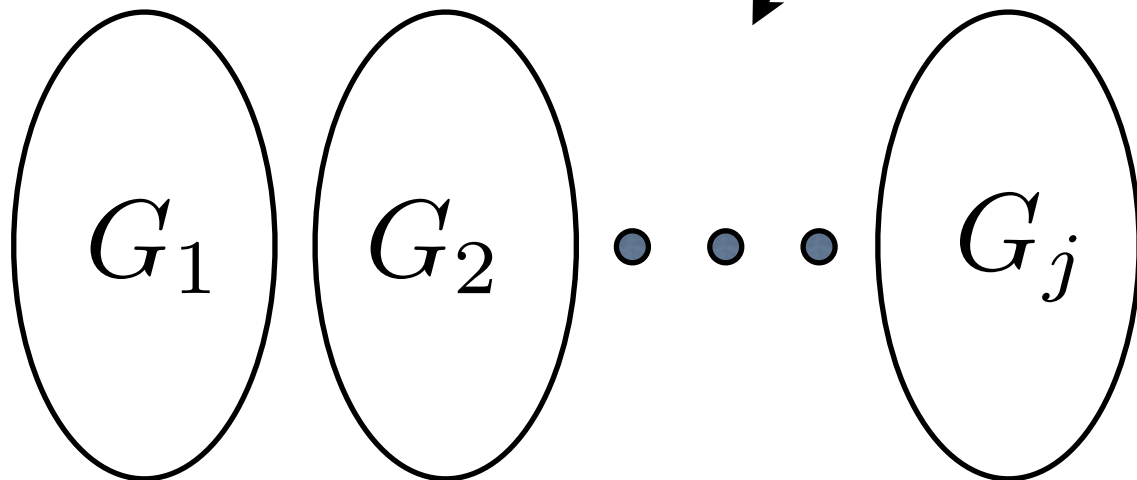
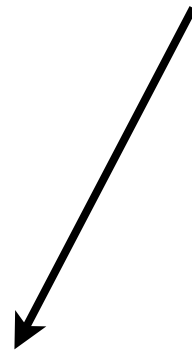


Componentes impares

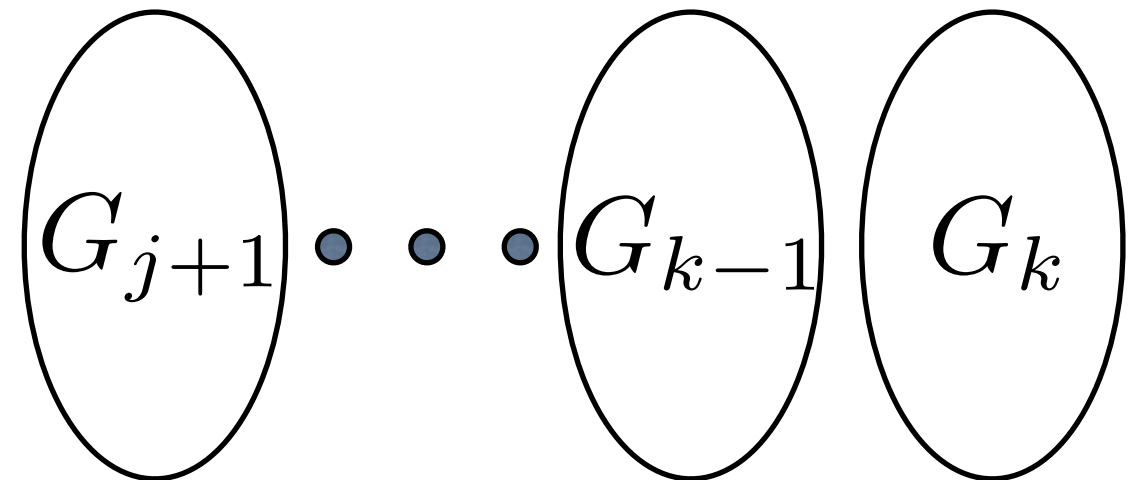
Cubriendo los vértices



Tenemos un emparejamiento perfecto acá

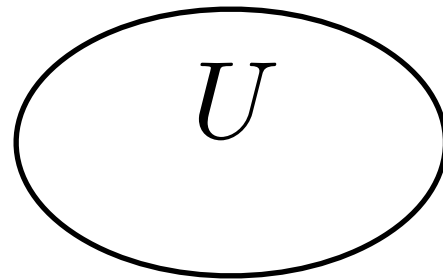


Componentes pares



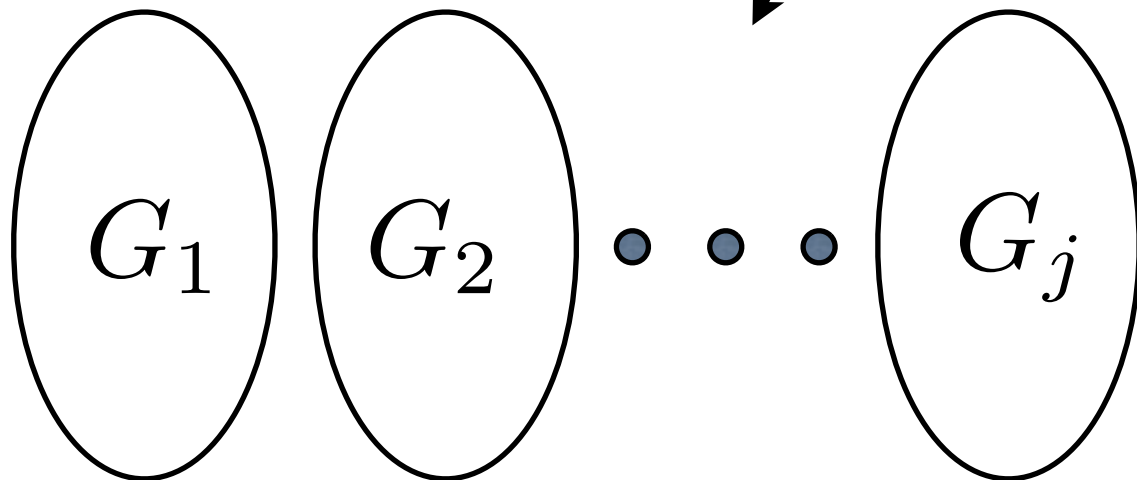
Componentes impares

Cubriendo los vértices

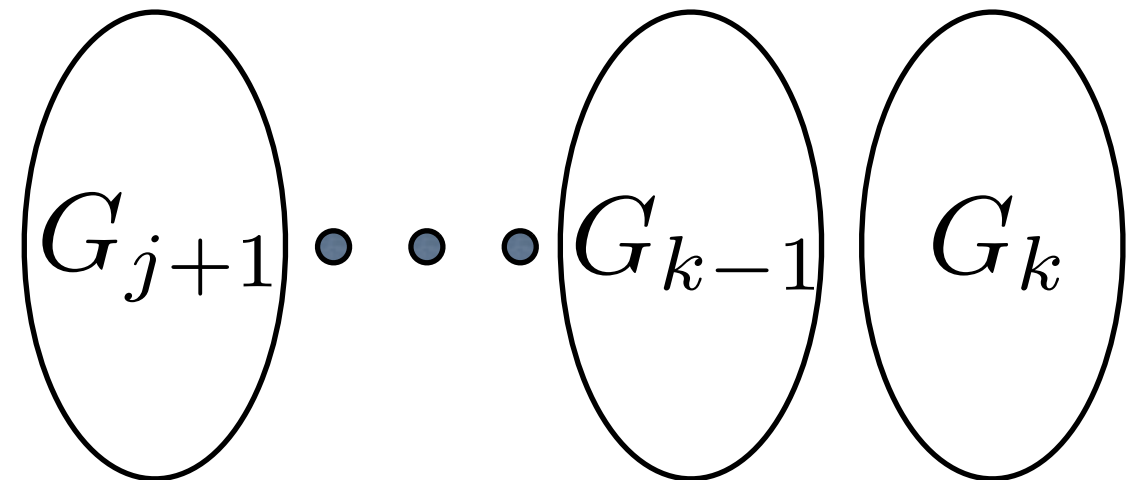


Tenemos un emparejamiento perfecto acá

Entonces cubrimos sus vértices
con la tercera parte de aristas

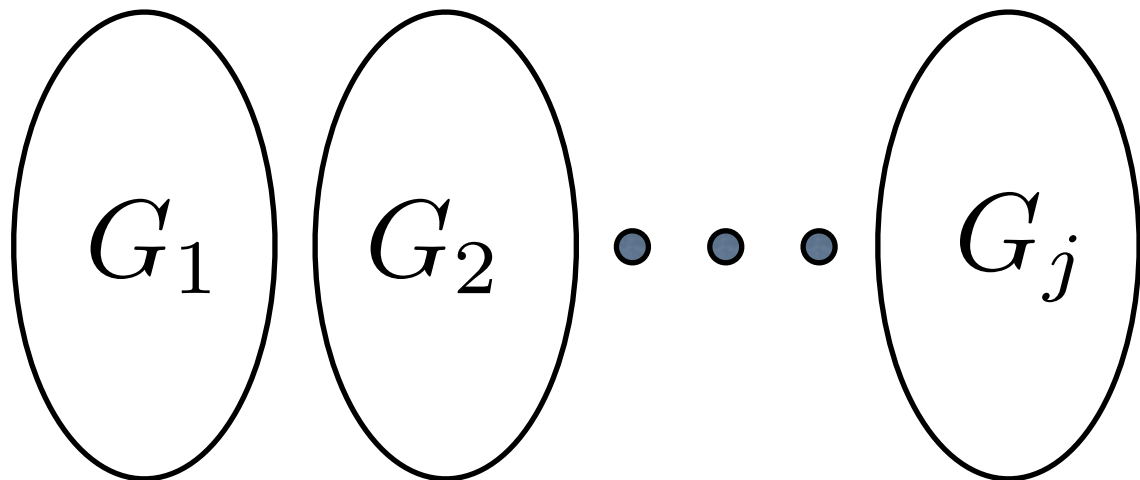
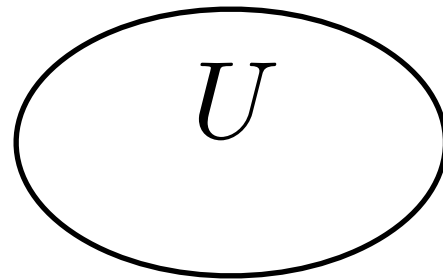


Componentes pares

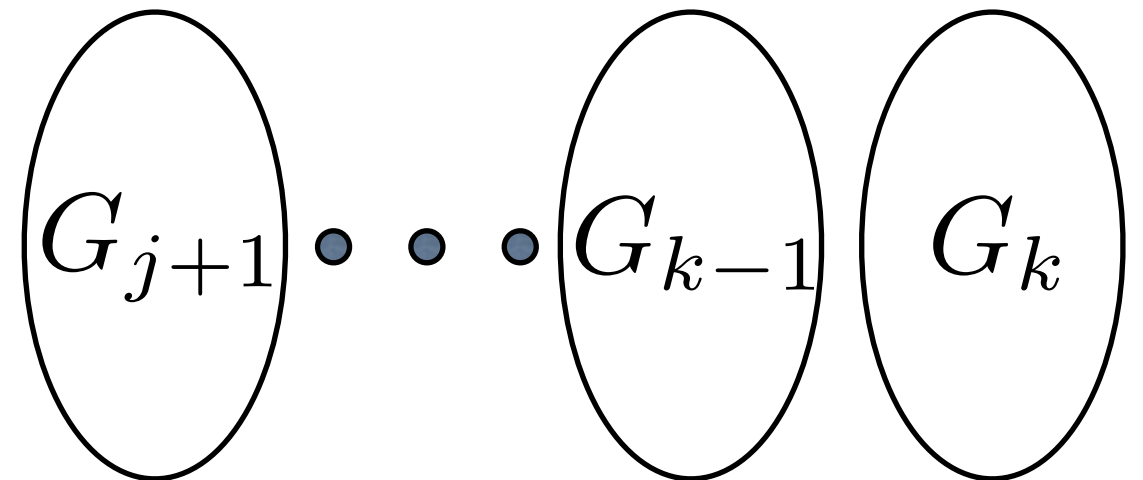


Componentes impares

Cubriendo los vértices

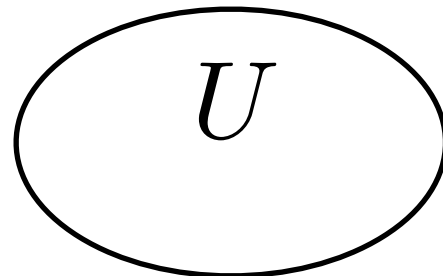


Componentes pares

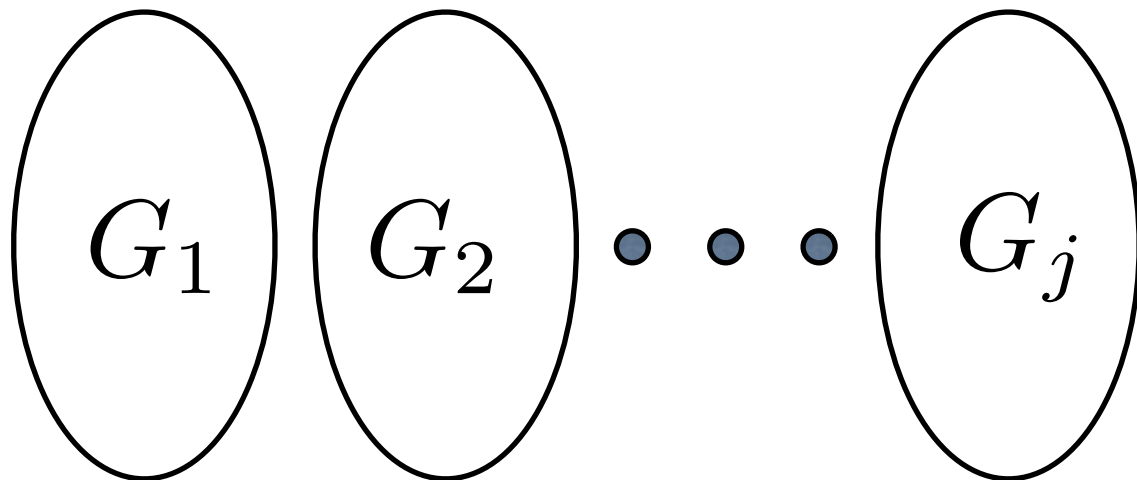


Componentes impares

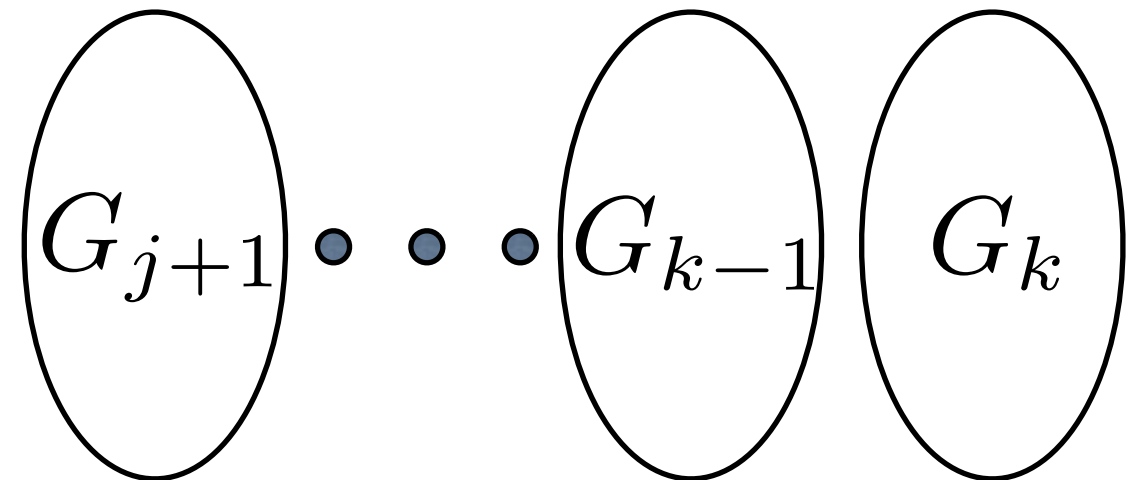
Cubriendo los vértices



Acá tenemos uno casi perfecto

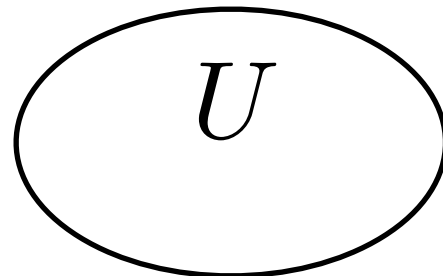


Componentes pares



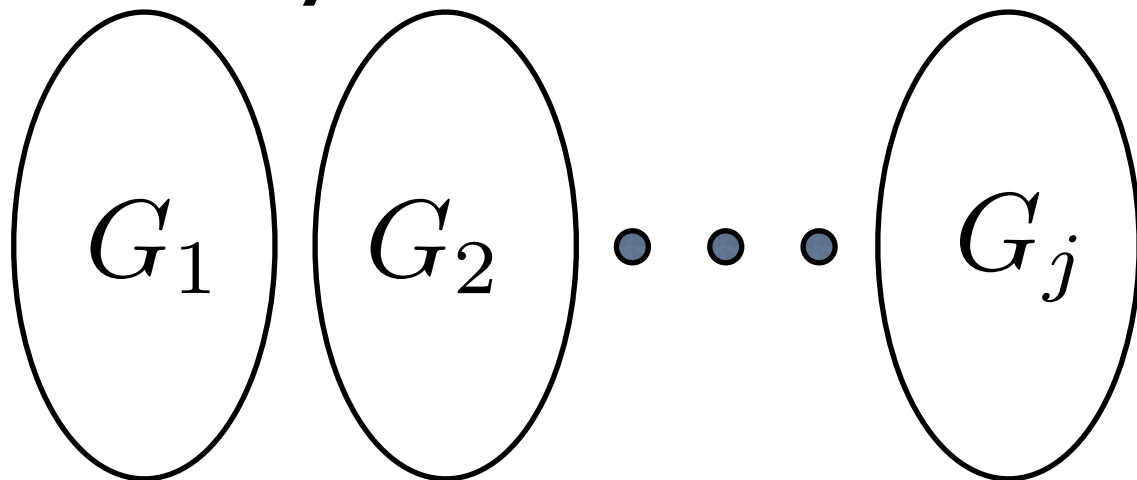
Componentes impares

Cubriendo los vértices

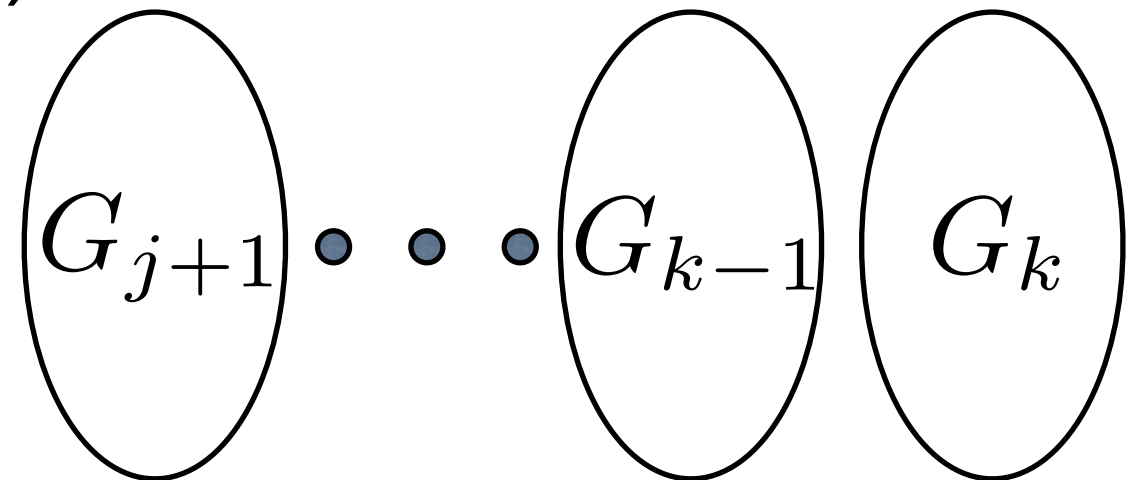


Acá tenemos uno casi perfecto

Para el vértice sin emparejar
agregamos una arista más (¡si es
adyacente a uno en U mejor!).

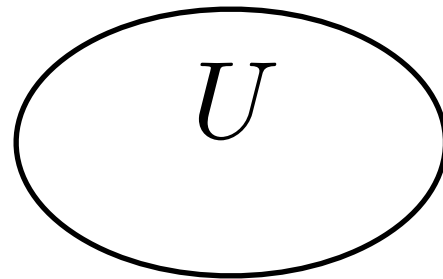


Componentes pares

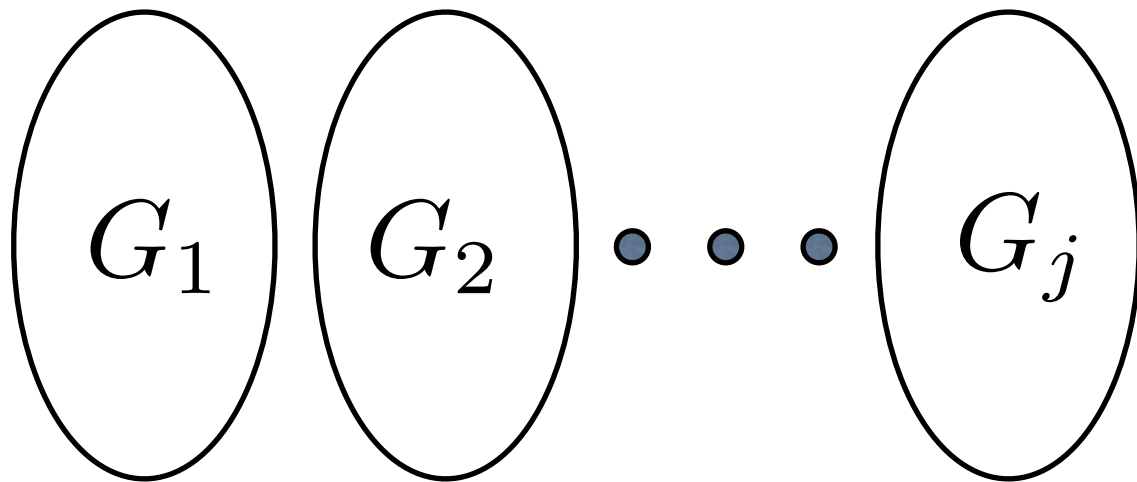


Componentes impares

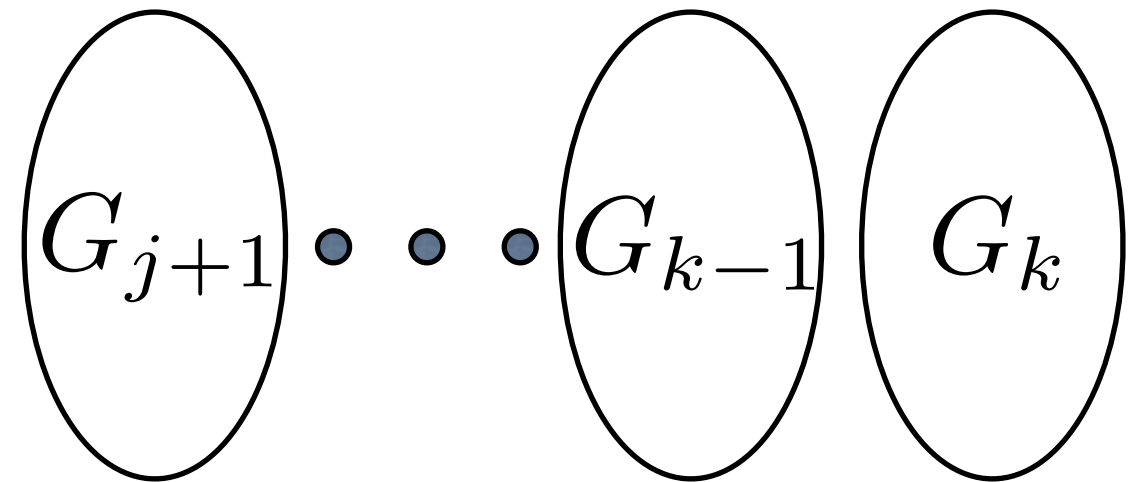
Cubriendo los vértices



Haciendo cuentas, ¡no usamos más de la tercera parte de las aristas!

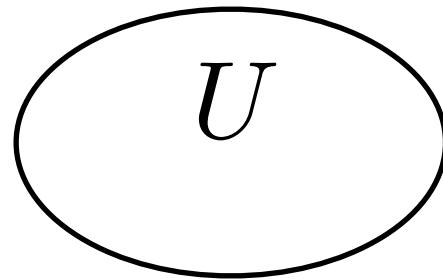


Componentes pares



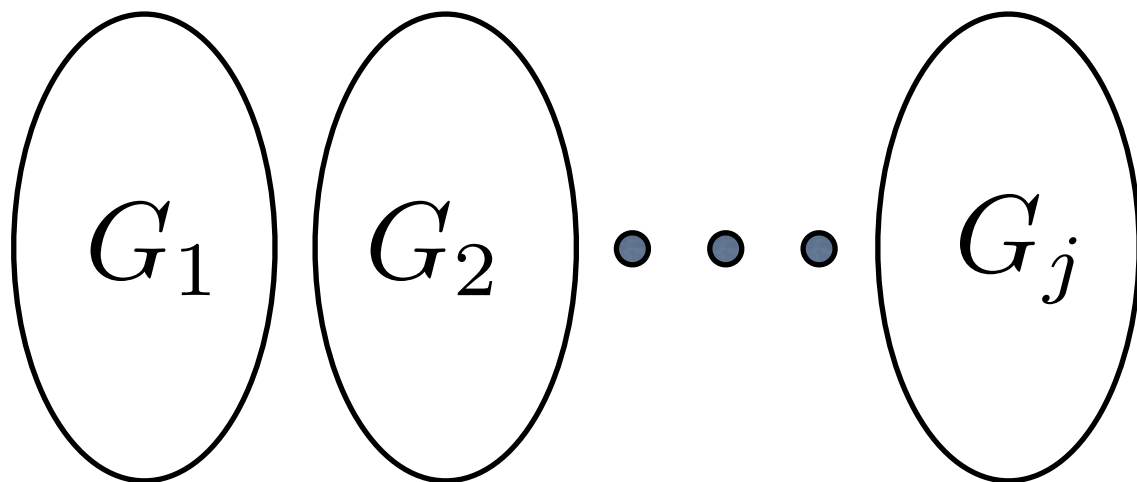
Componentes impares

Cubriendo los vértices

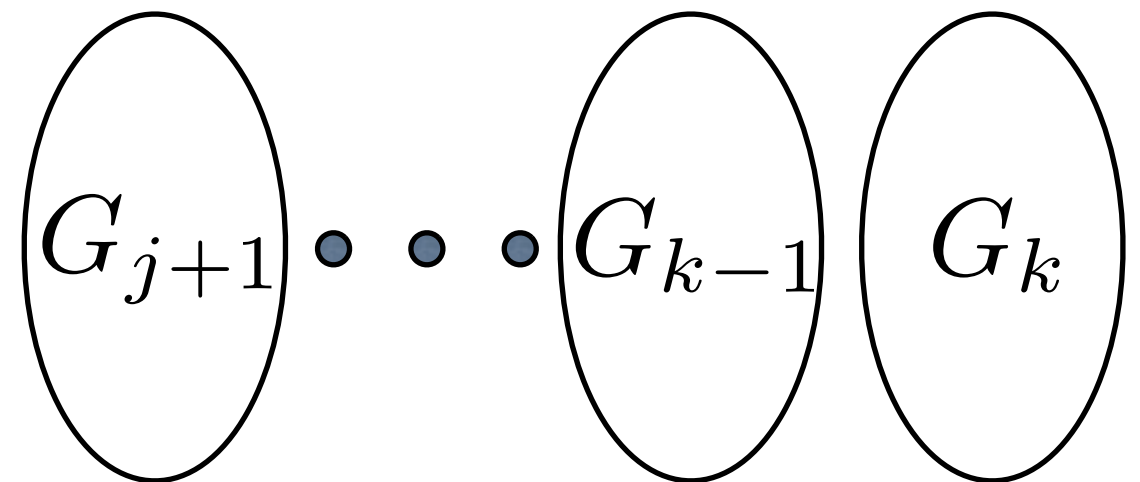


Haciendo cuentas, ¡no usamos más de la tercera parte de las aristas!

$$\left\lfloor \frac{m+1}{3} \right\rfloor$$

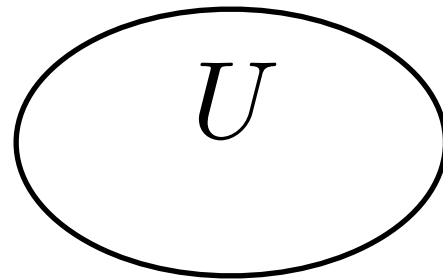


Componentes pares

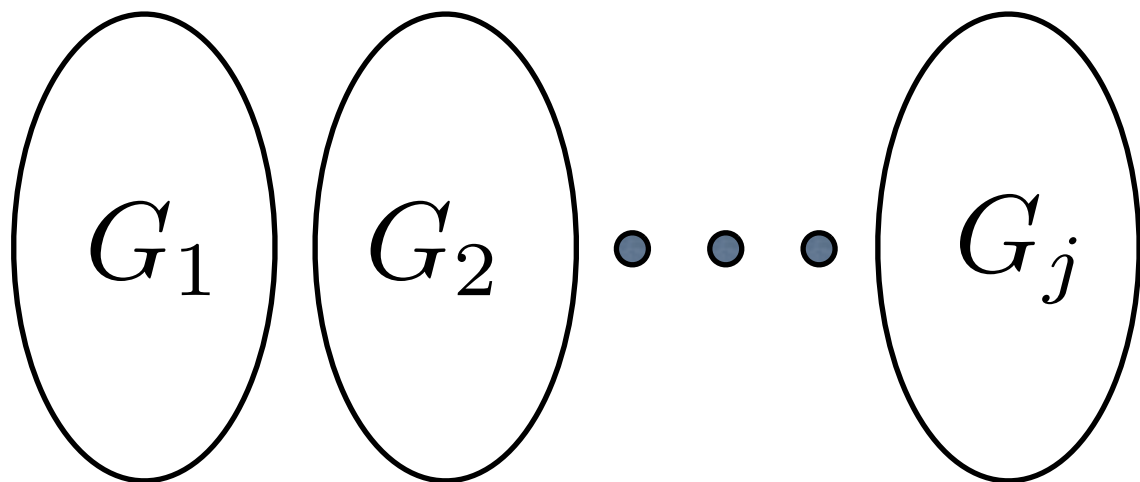


Componentes impares

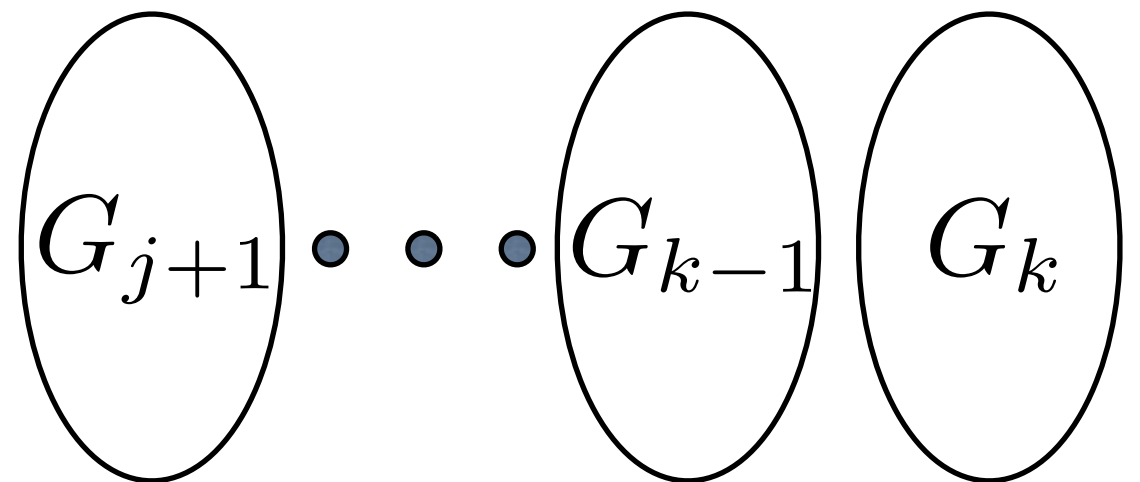
Cubriendo los vértices



Si G no es conexa, podemos llegar a que en el peor caso usaríamos $3m/8$ aristas.

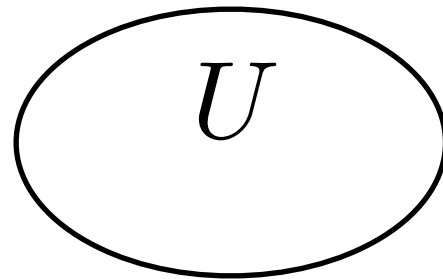


Componentes pares

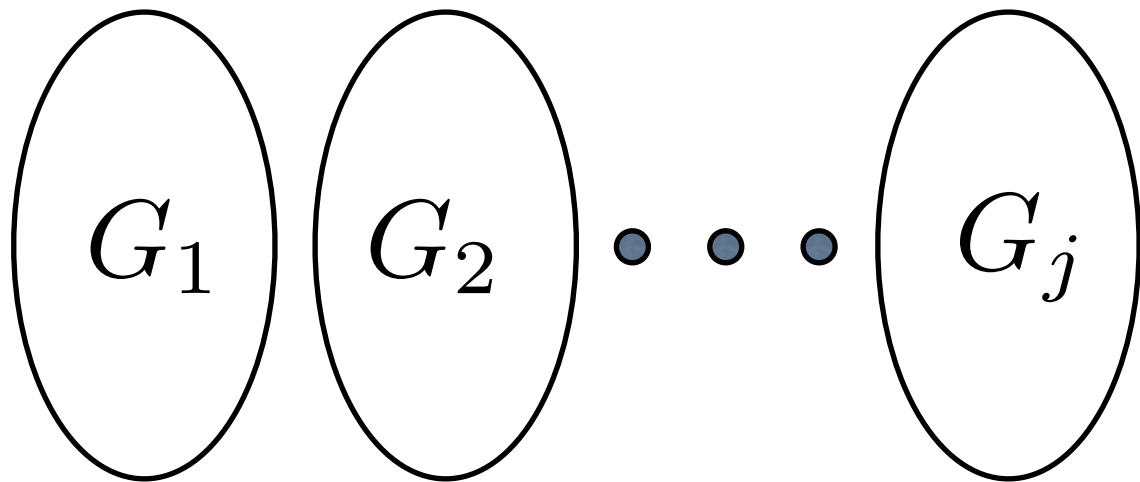


Componentes impares

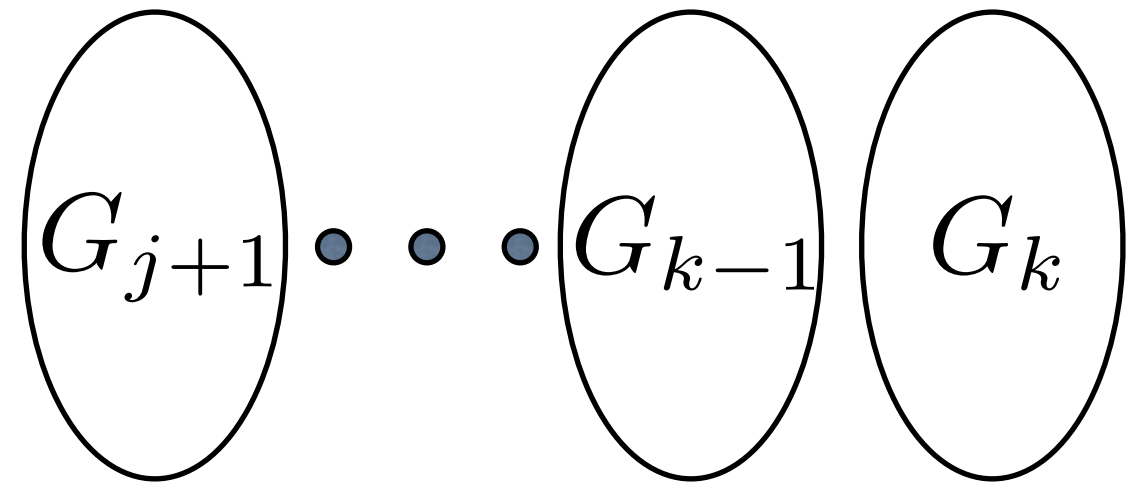
Cubriendo los vértices



Ahora tenemos iluminado a cada punto del poliedro que ve algún vértice. ¡Veamos qué hacer con el resto!

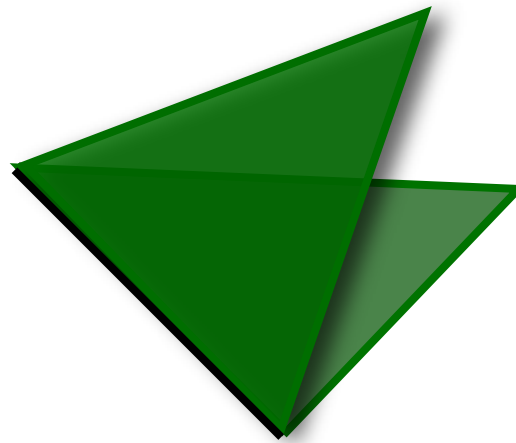
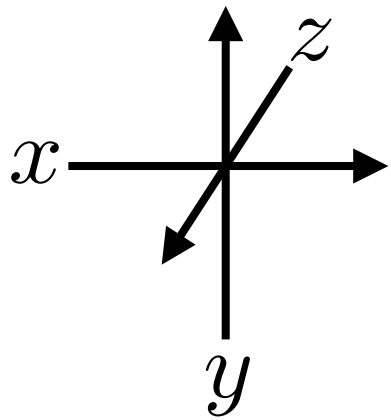


Componentes pares

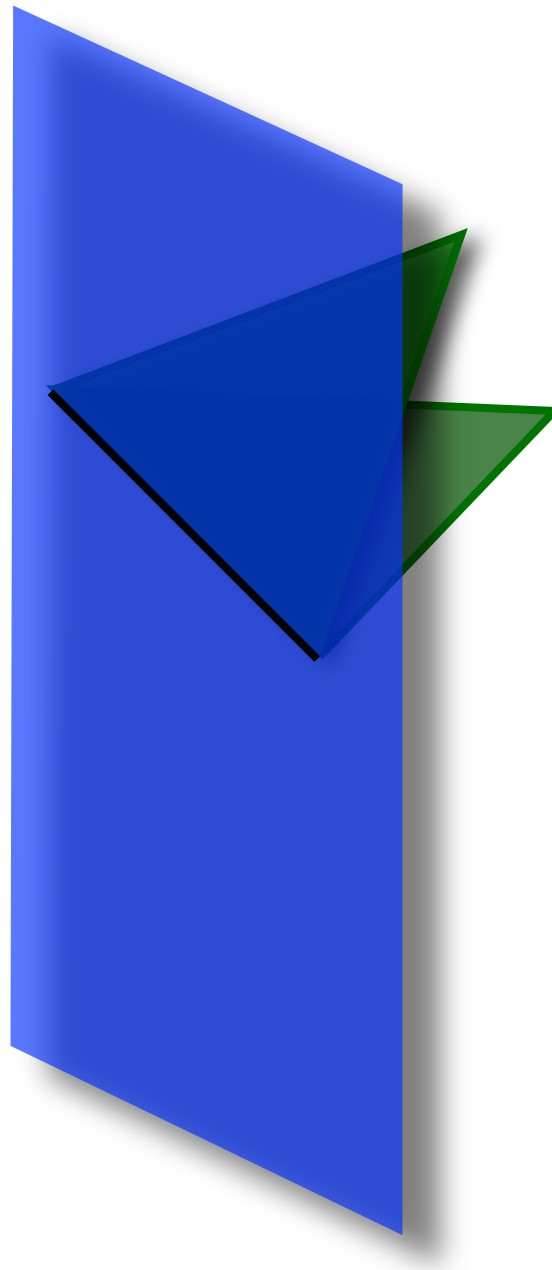
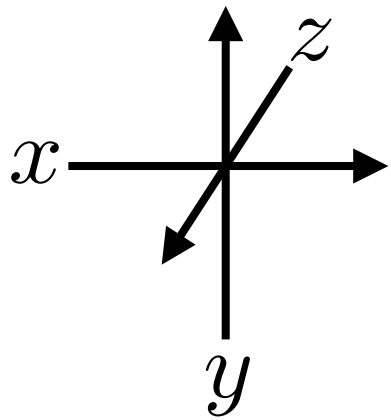


Componentes impares

Las cuatro clases

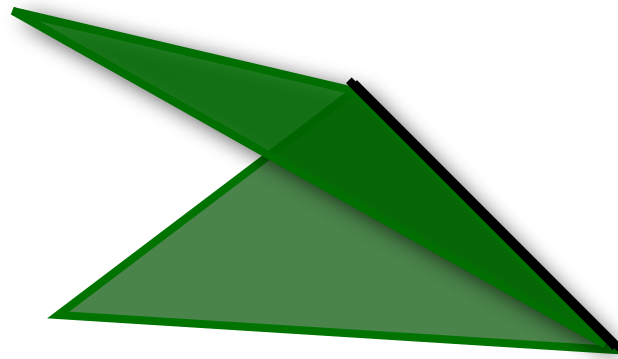
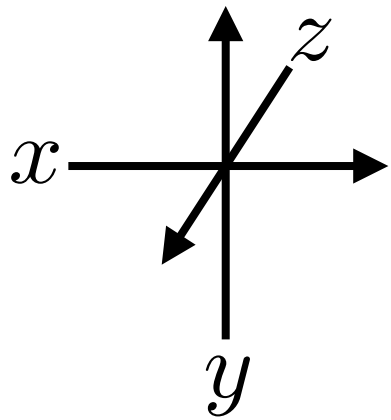


Las cuatro clases

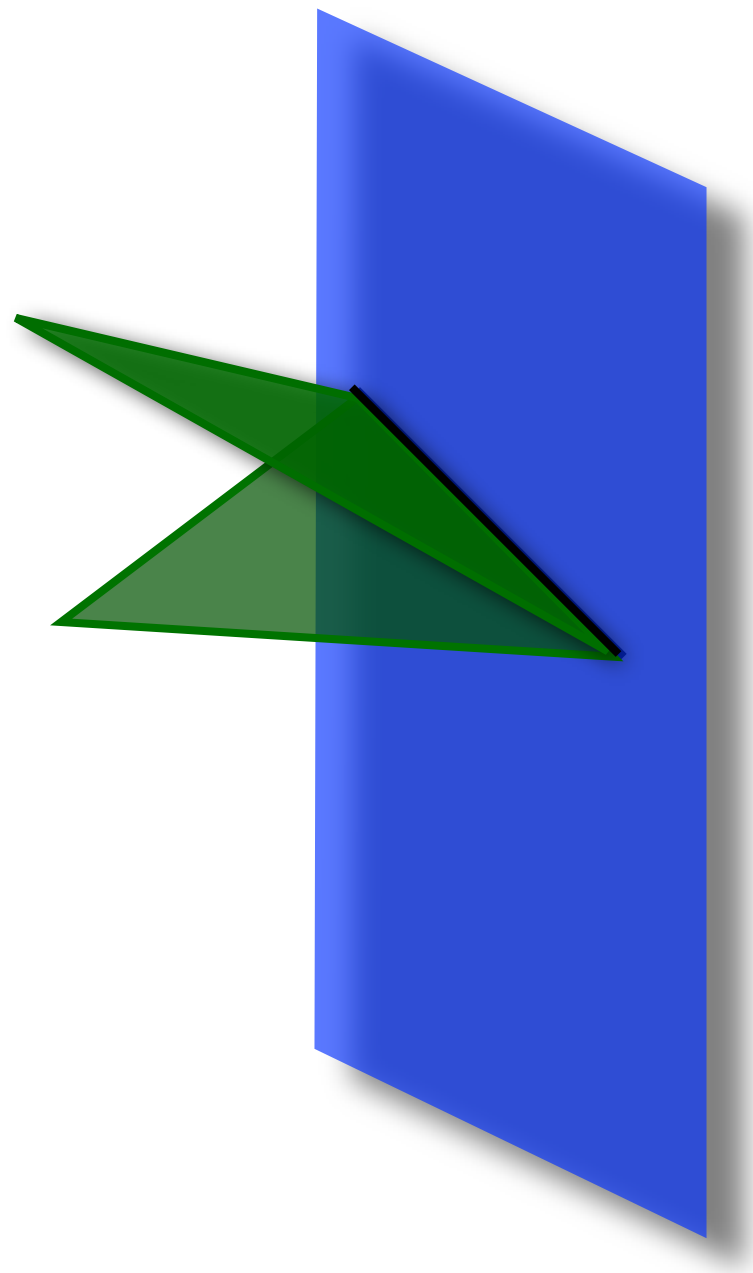
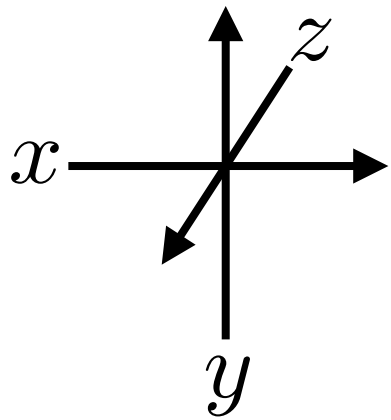


Arista derecha

Las cuatro clases

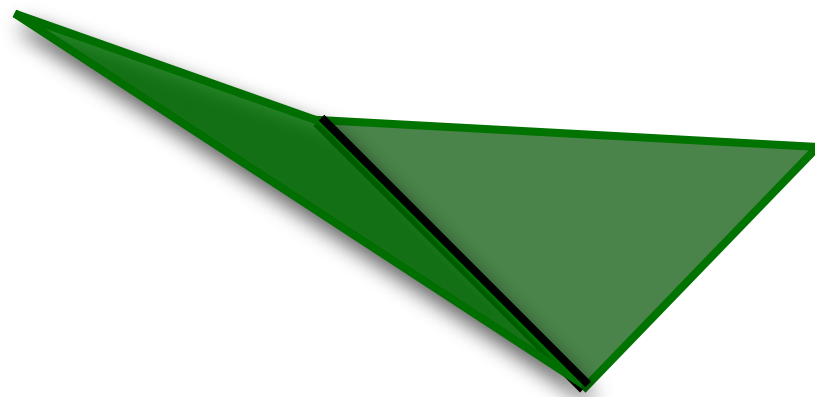
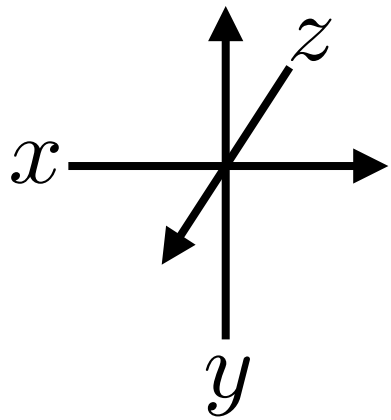


Las cuatro clases

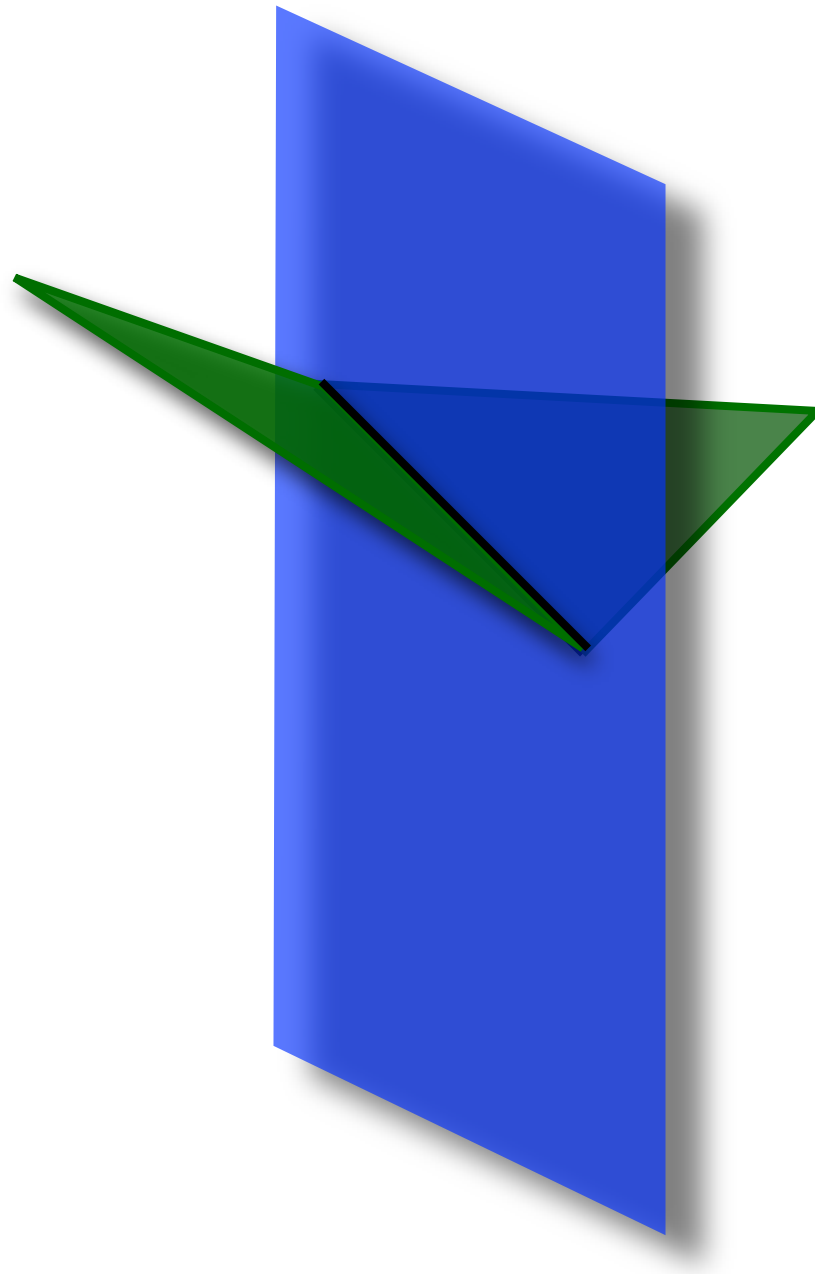
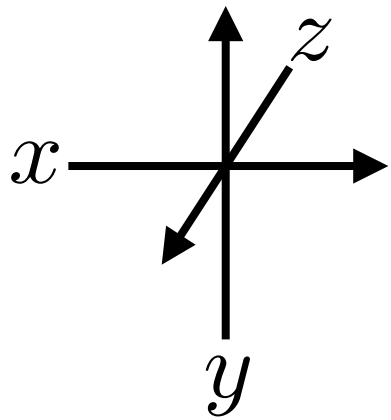


Arista izquierda

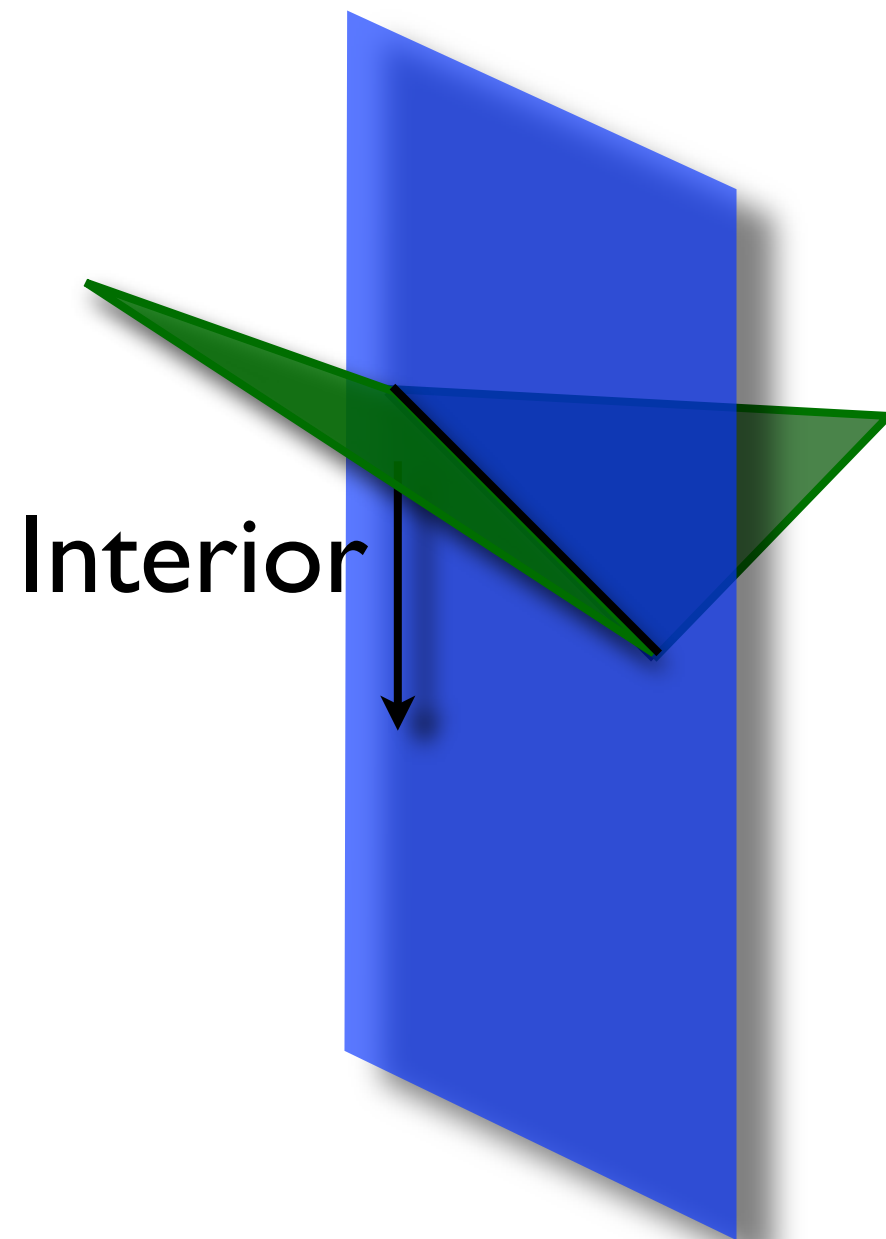
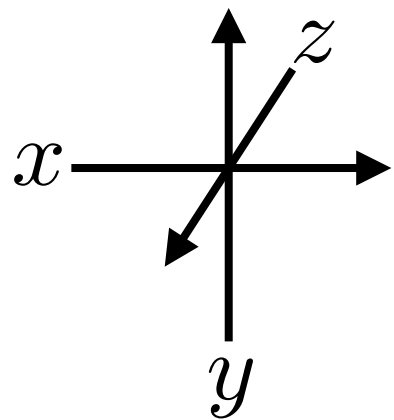
Las cuatro clases



Las cuatro clases

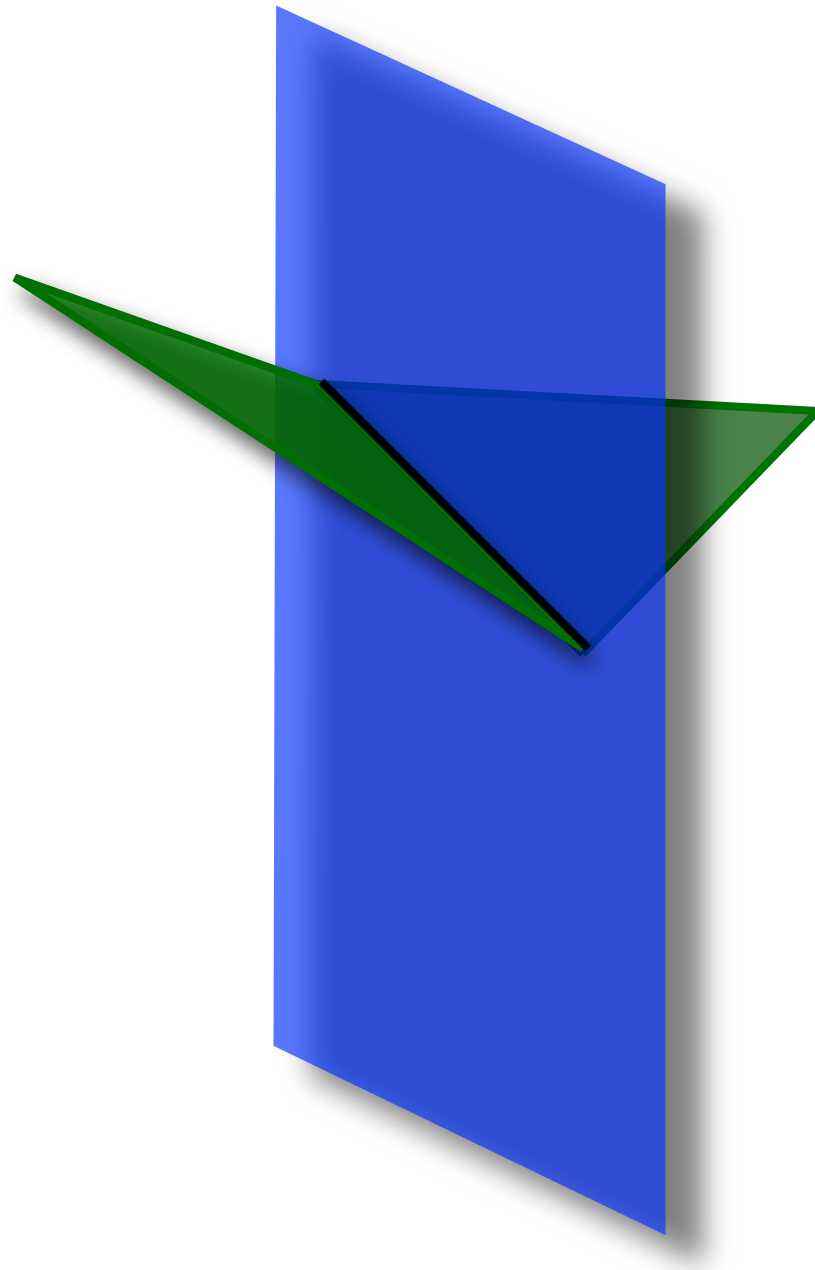
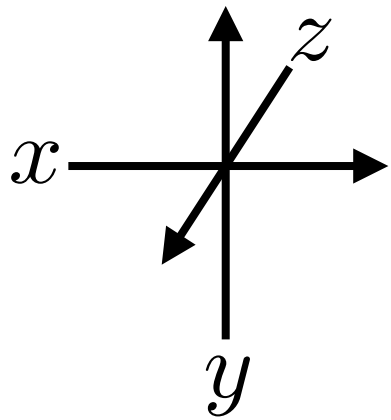


Las cuatro clases

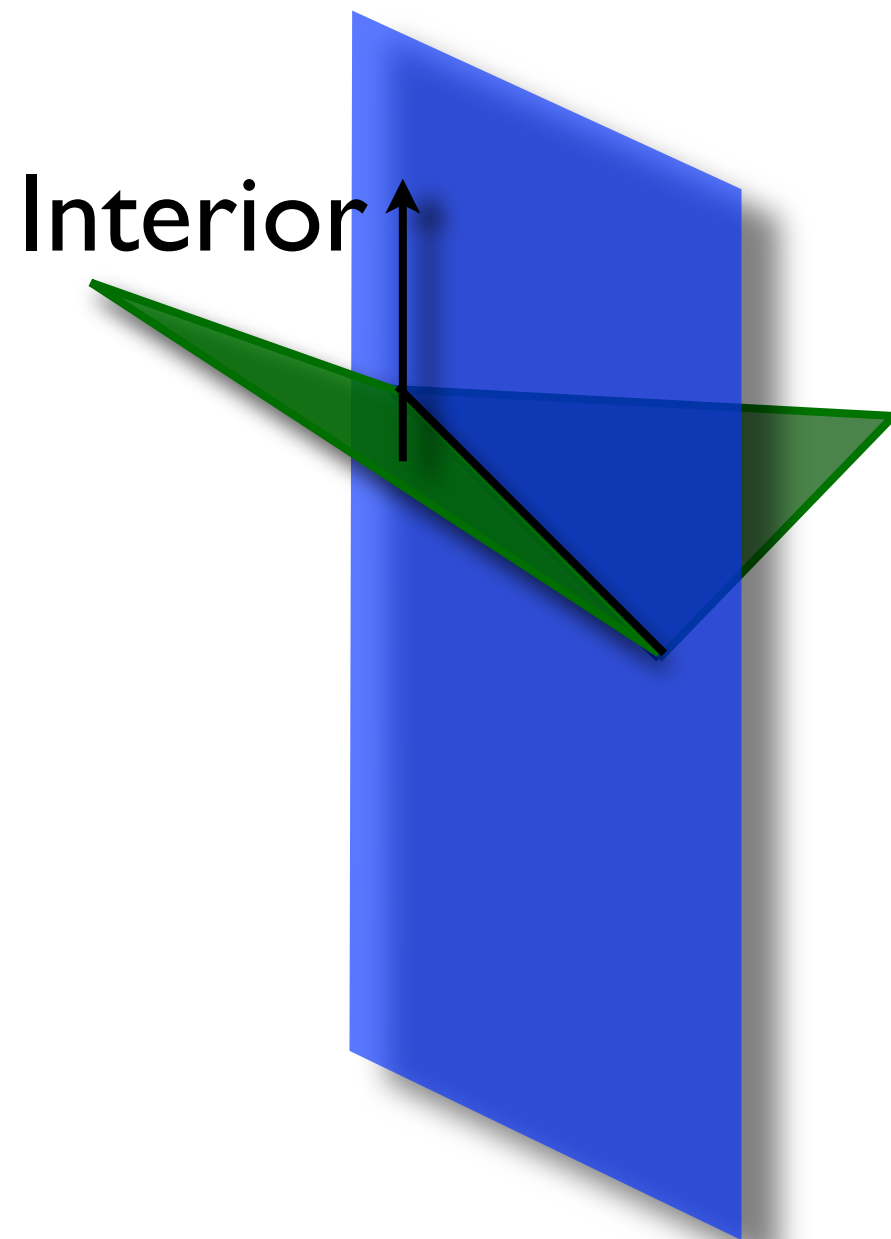
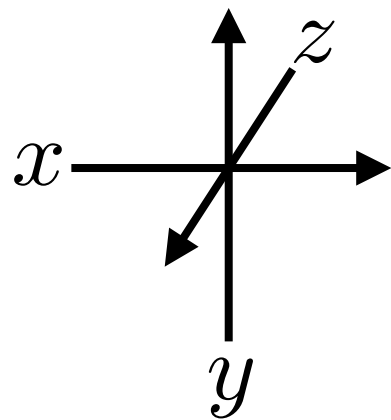


Arista techo

Las cuatro clases

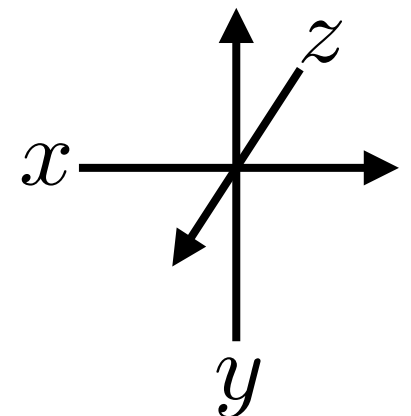


Las cuatro clases

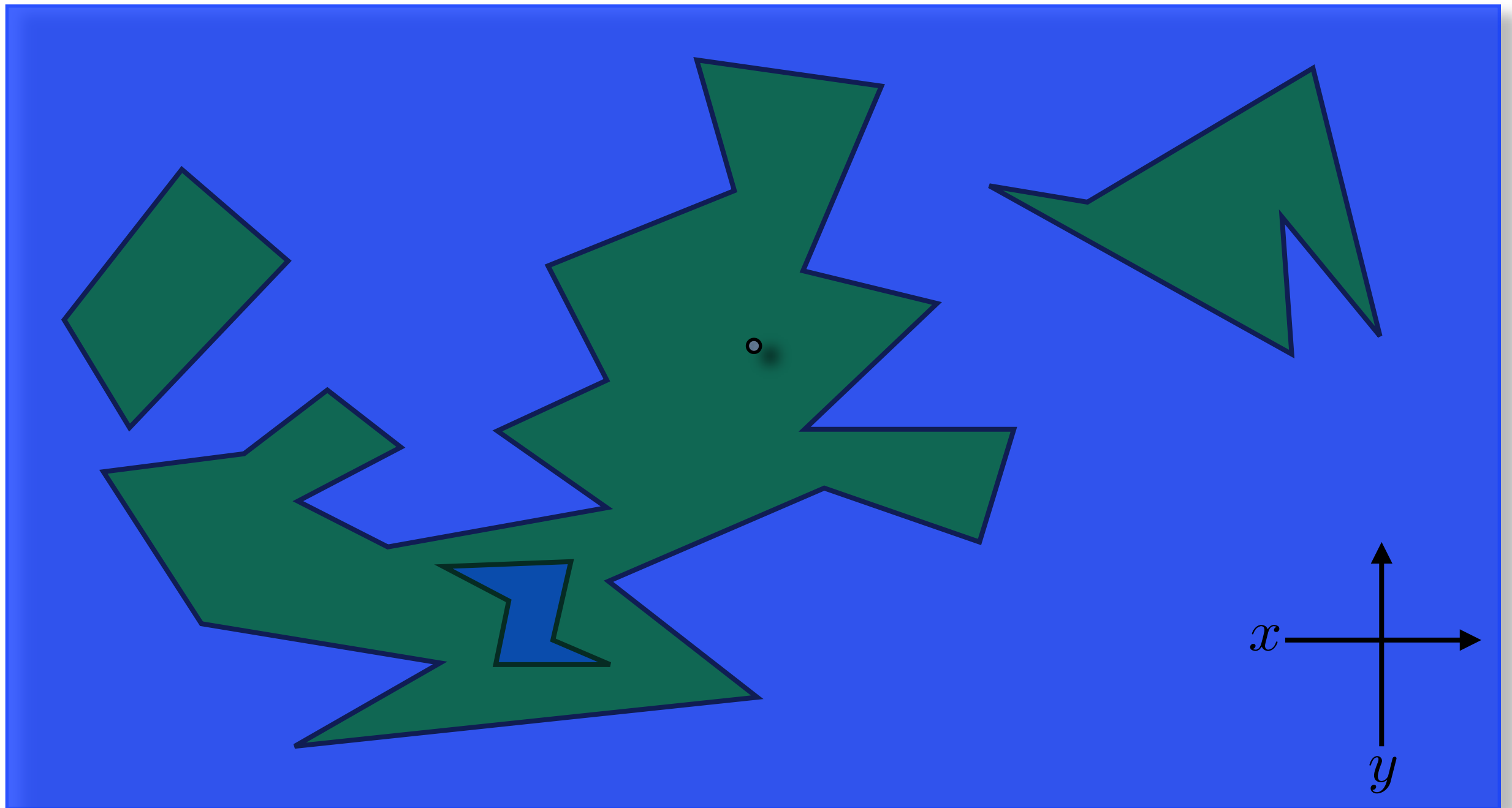


Arista piso

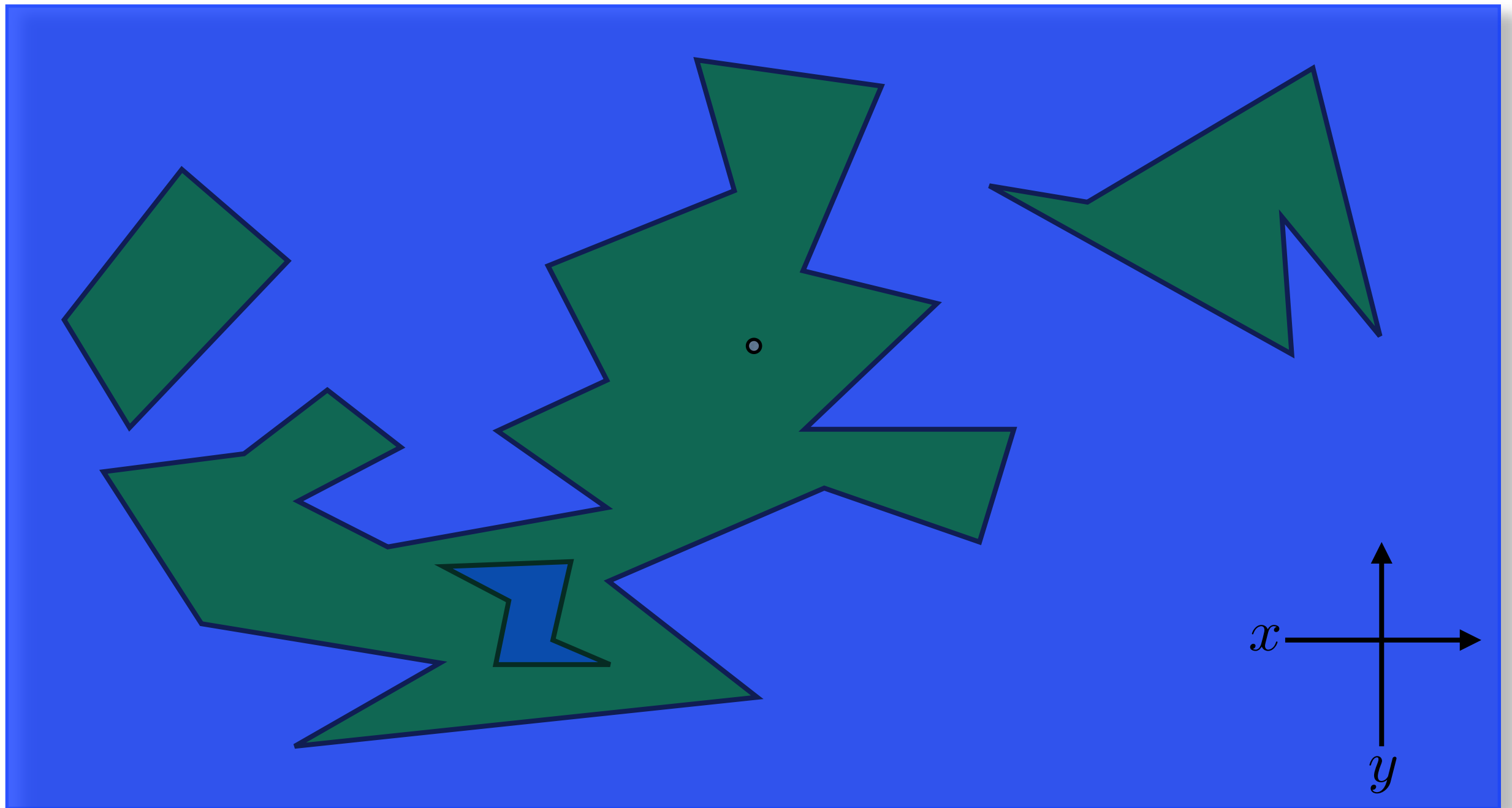
Si no ves un vértice, no puedes ver sólo aristas izquierdas (igual derechas)



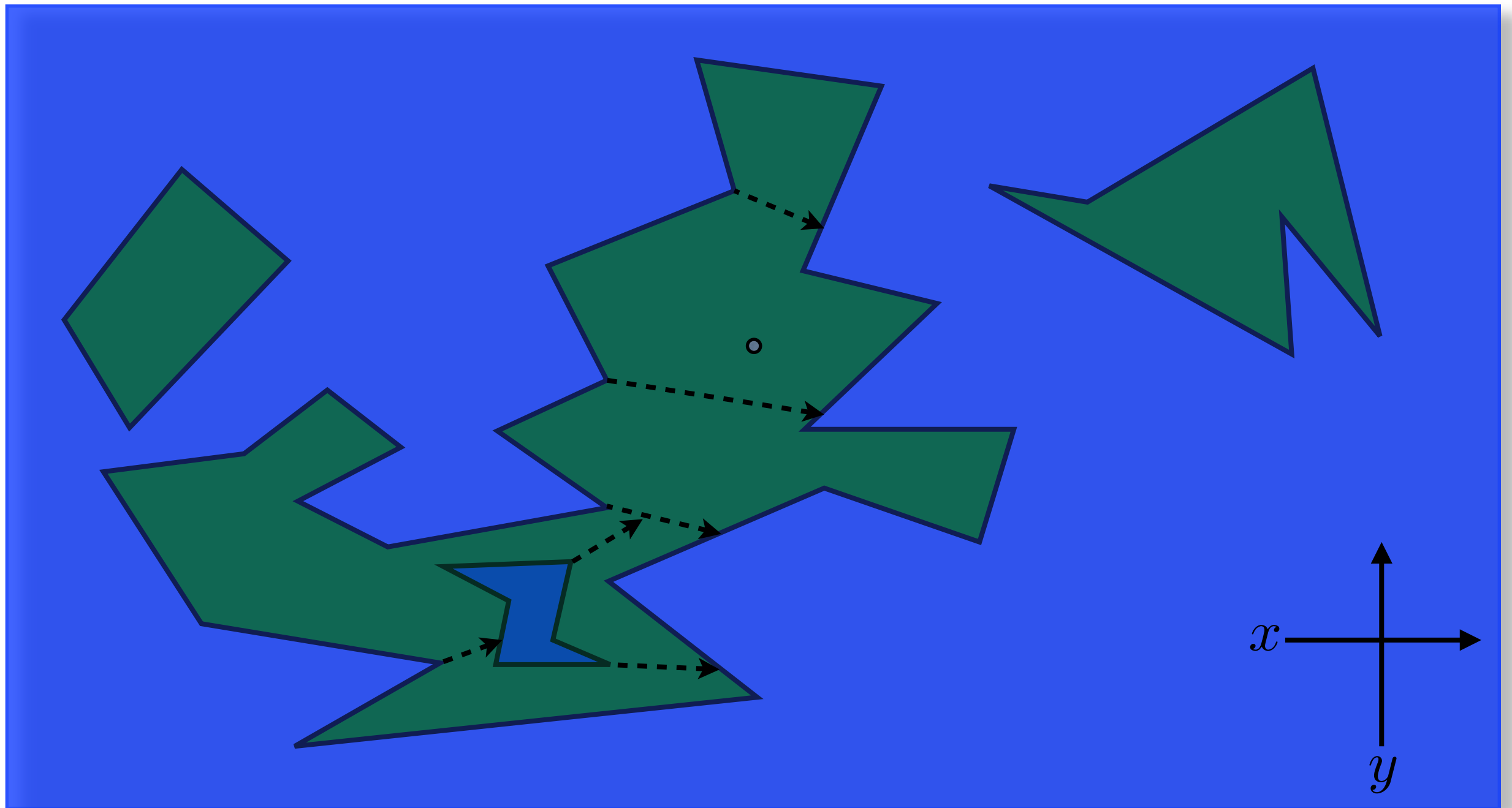
Si no ves un vértice, no puedes ver sólo aristas izquierdas (igual derechas)



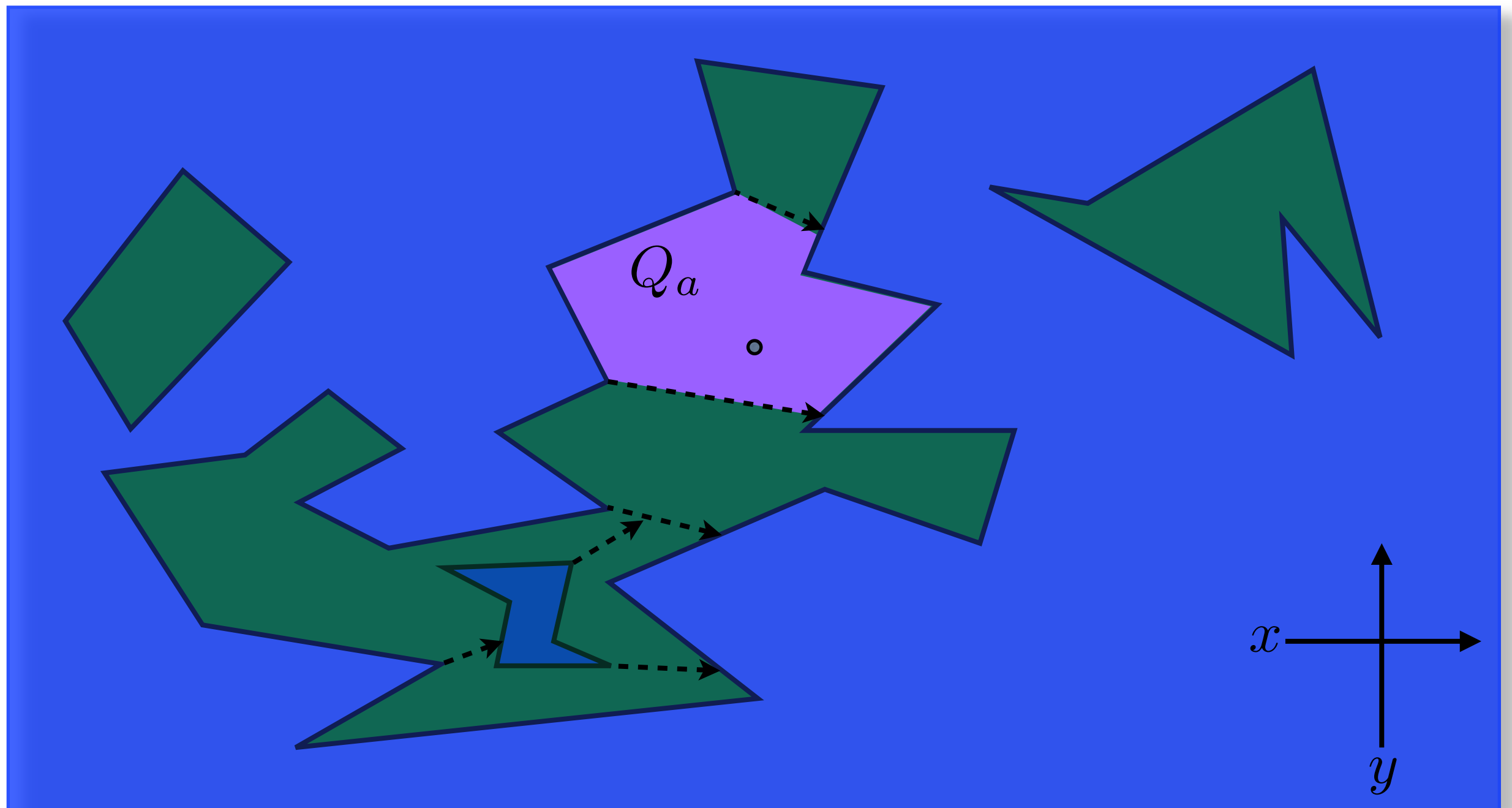
Si no ves un vértice, no puedes ver sólo aristas izquierdas (igual derechas)



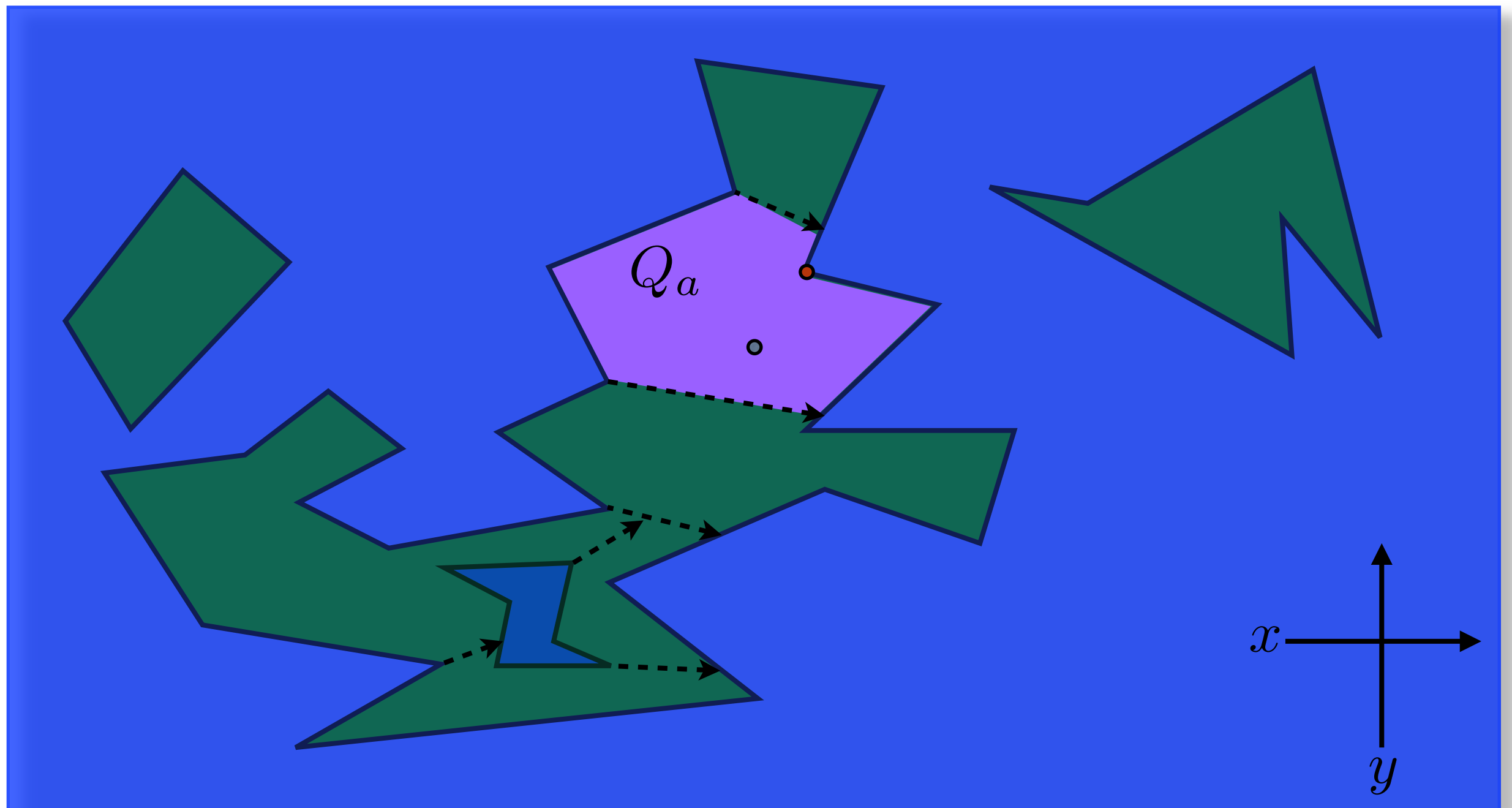
Si no ves un vértice, no puedes ver sólo aristas izquierdas (igual derechas)



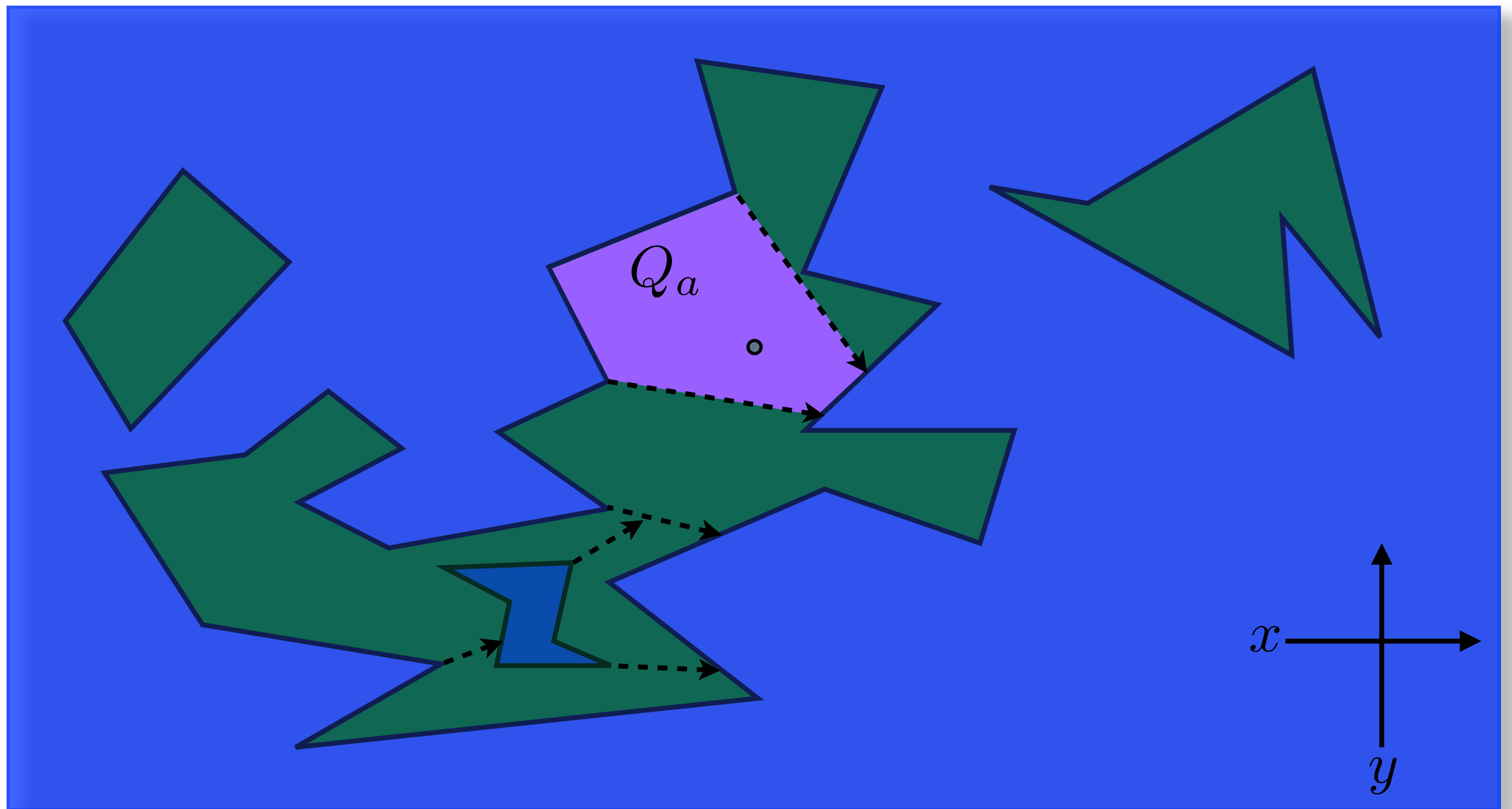
Si no ves un vértice, no puedes ver sólo aristas izquierdas (igual derechas)



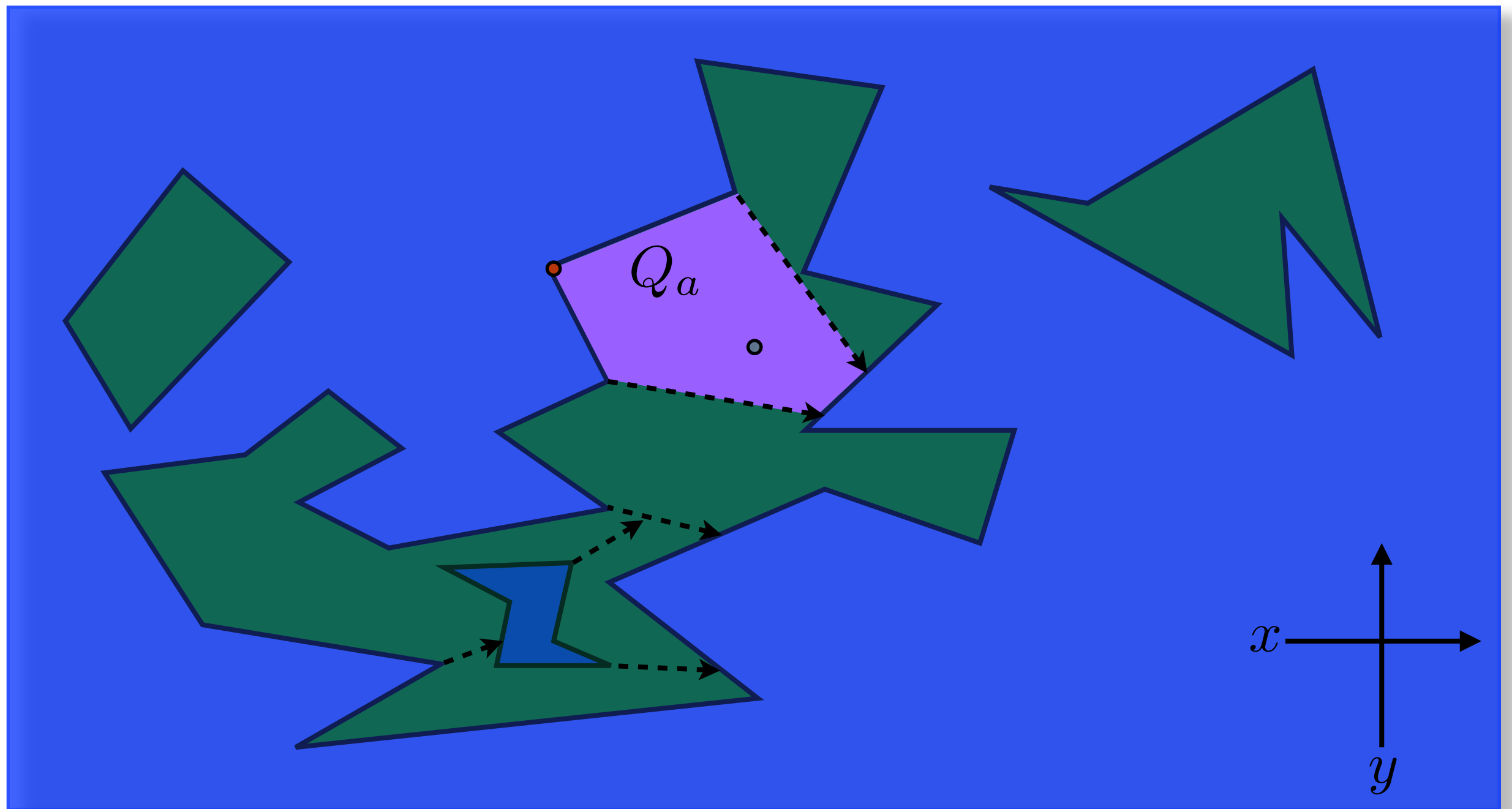
Si no ves un vértice, no puedes ver sólo aristas izquierdas (igual derechas)



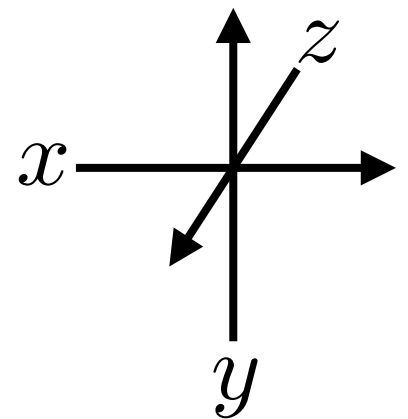
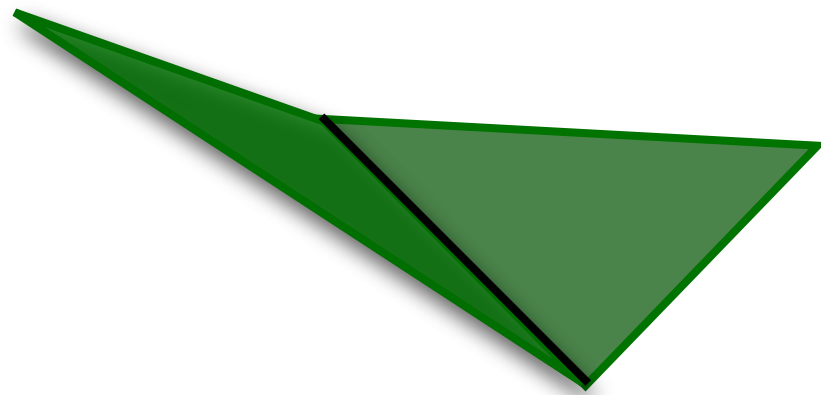
Si no ves un vértice, no puedes ver sólo aristas izquierdas (igual derechas)



Si no ves un vértice, no puedes ver sólo aristas izquierdas (igual derechas)

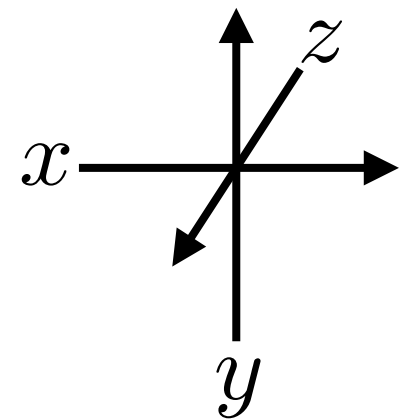
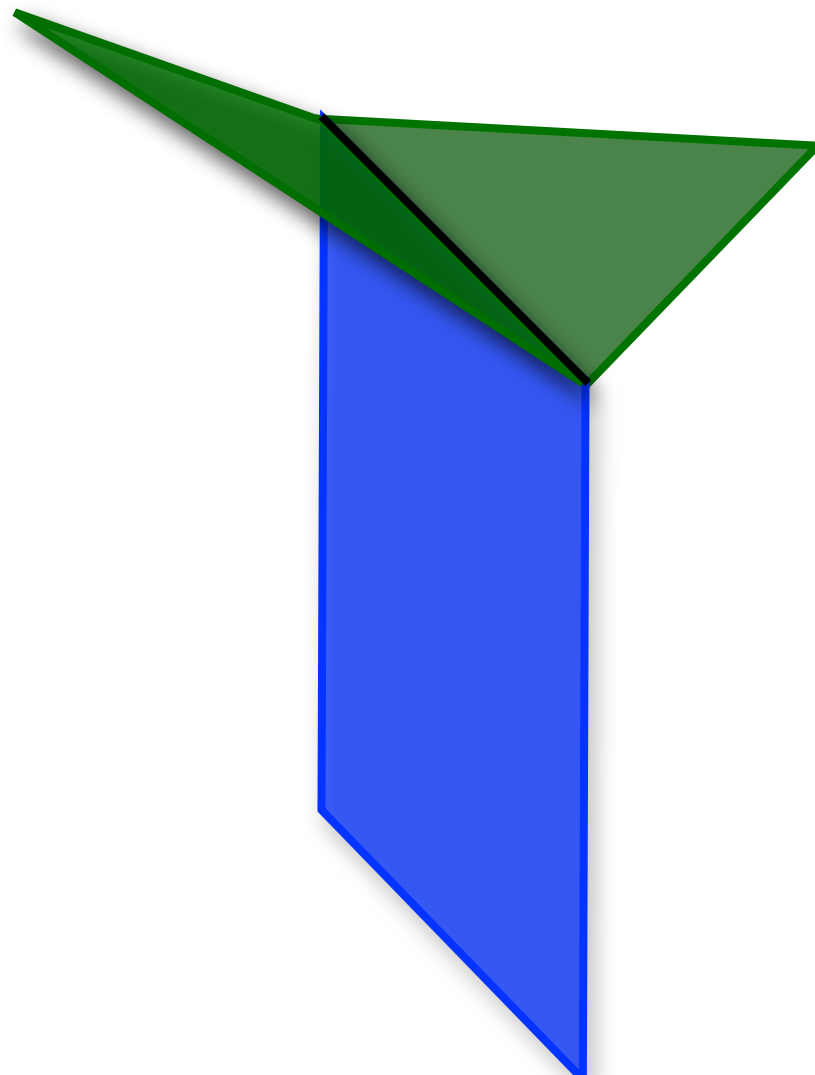


Si no ves un vértice, no puedes ver sólo aristas techo (igual Piso)



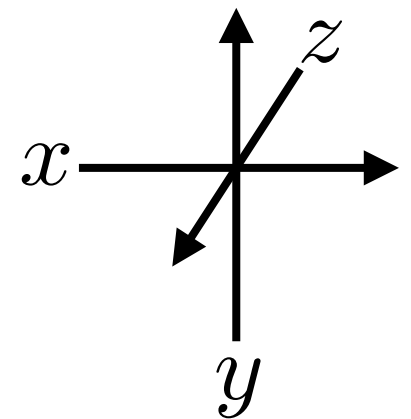
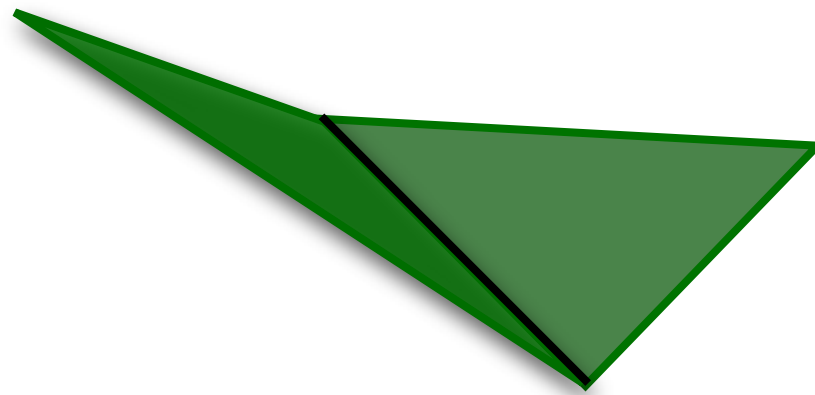
Si no ves un vértice, no puedes ver sólo aristas techo (igual Piso)

Cortina



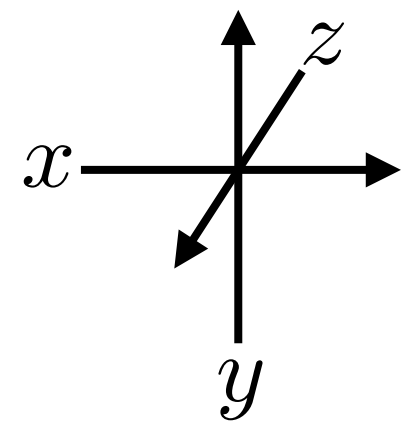
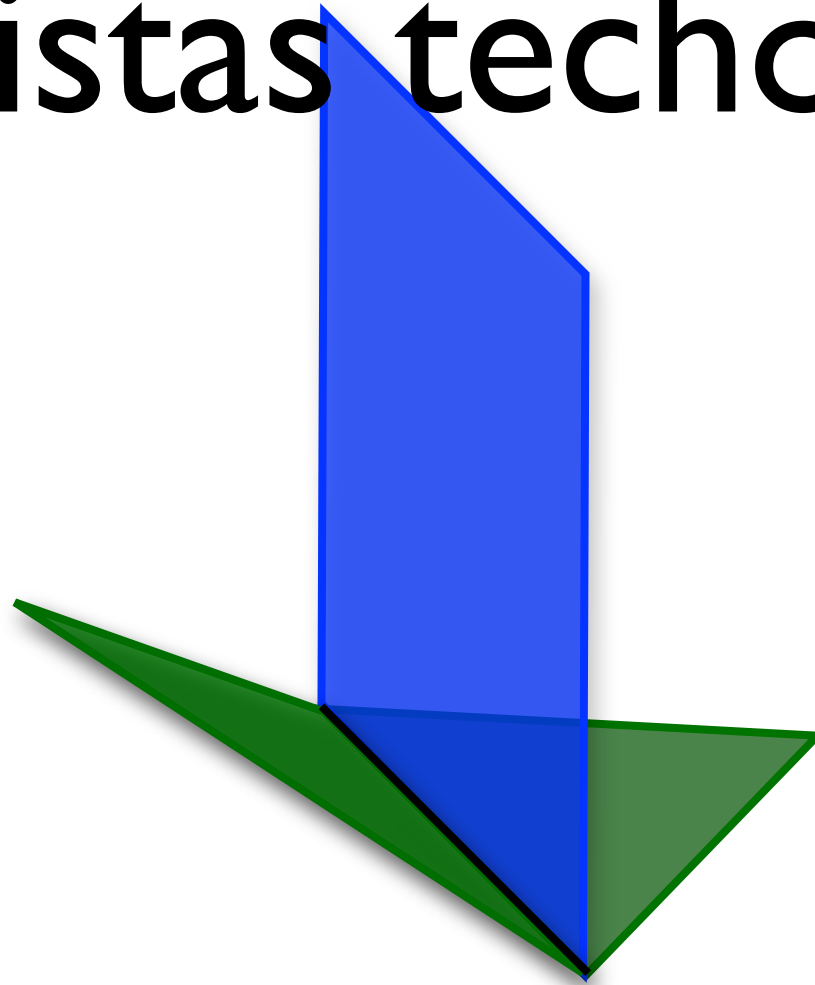
Si no ves un vértice, no puedes ver sólo aristas techo (igual Piso)

Cortina



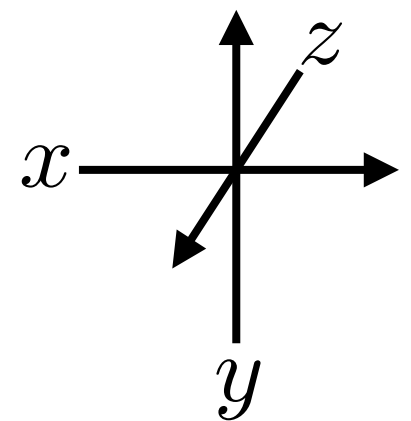
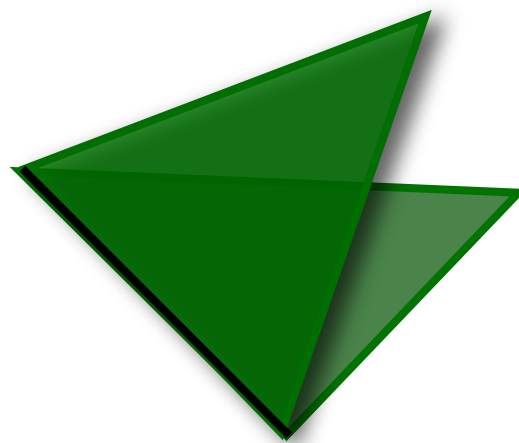
Si no ves un vértice, no puedes ver sólo aristas techo (igual Piso)

Cortina



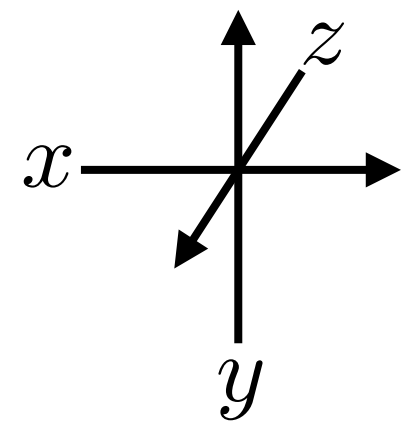
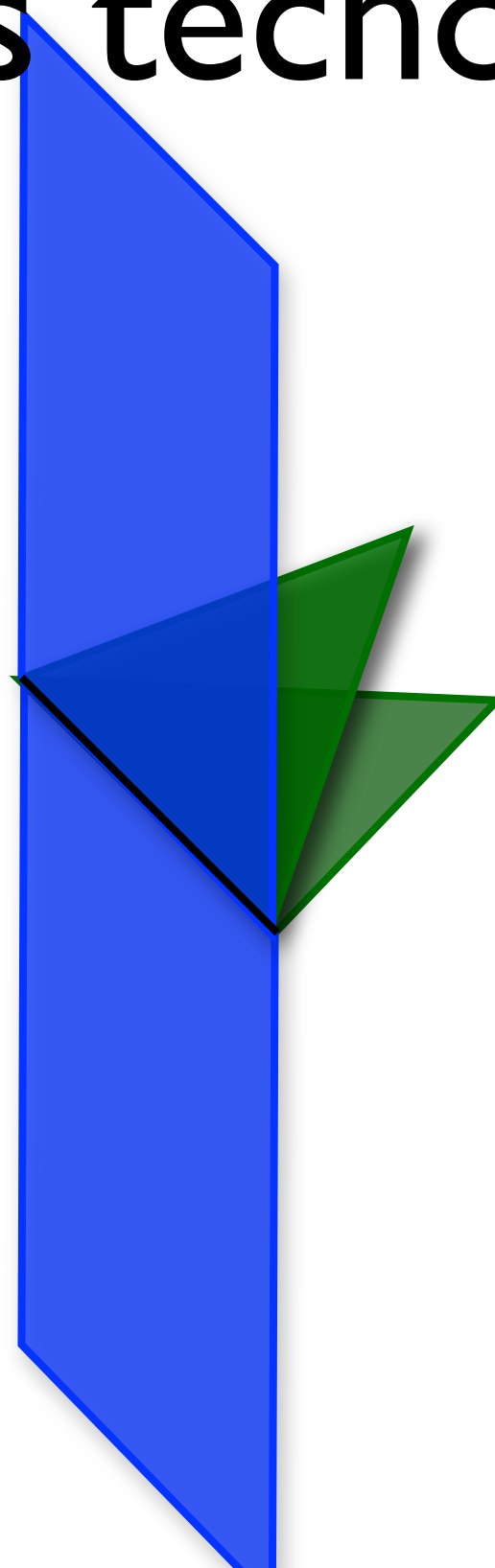
Si no ves un vértice, no puedes ver sólo aristas techo (igual Piso)

Cortina

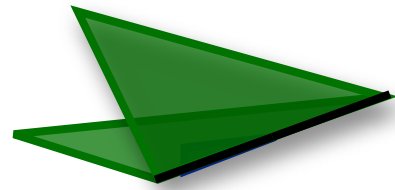


Si no ves un vértice, no puedes ver sólo aristas techo (igual Piso)

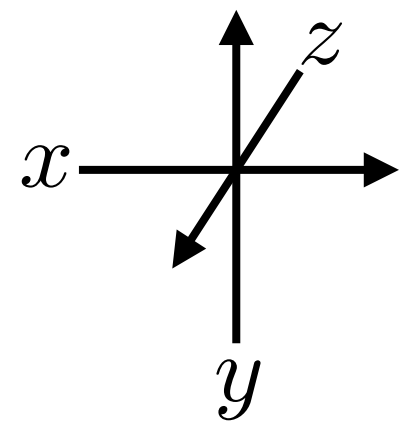
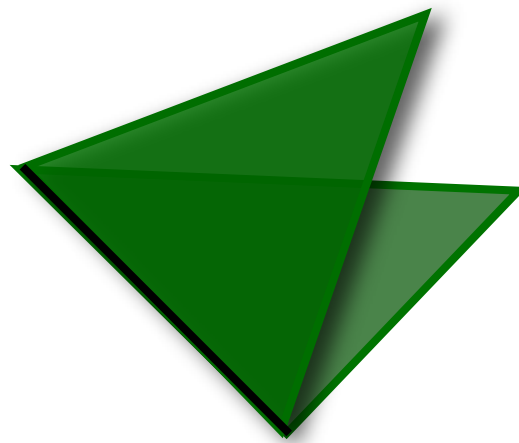
Cortina



Si no ves un vértice, no puedes ver sólo aristas techo (igual Piso)

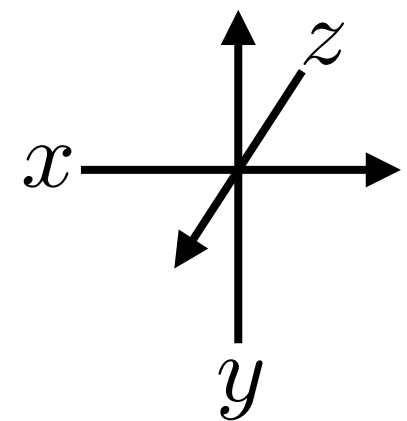
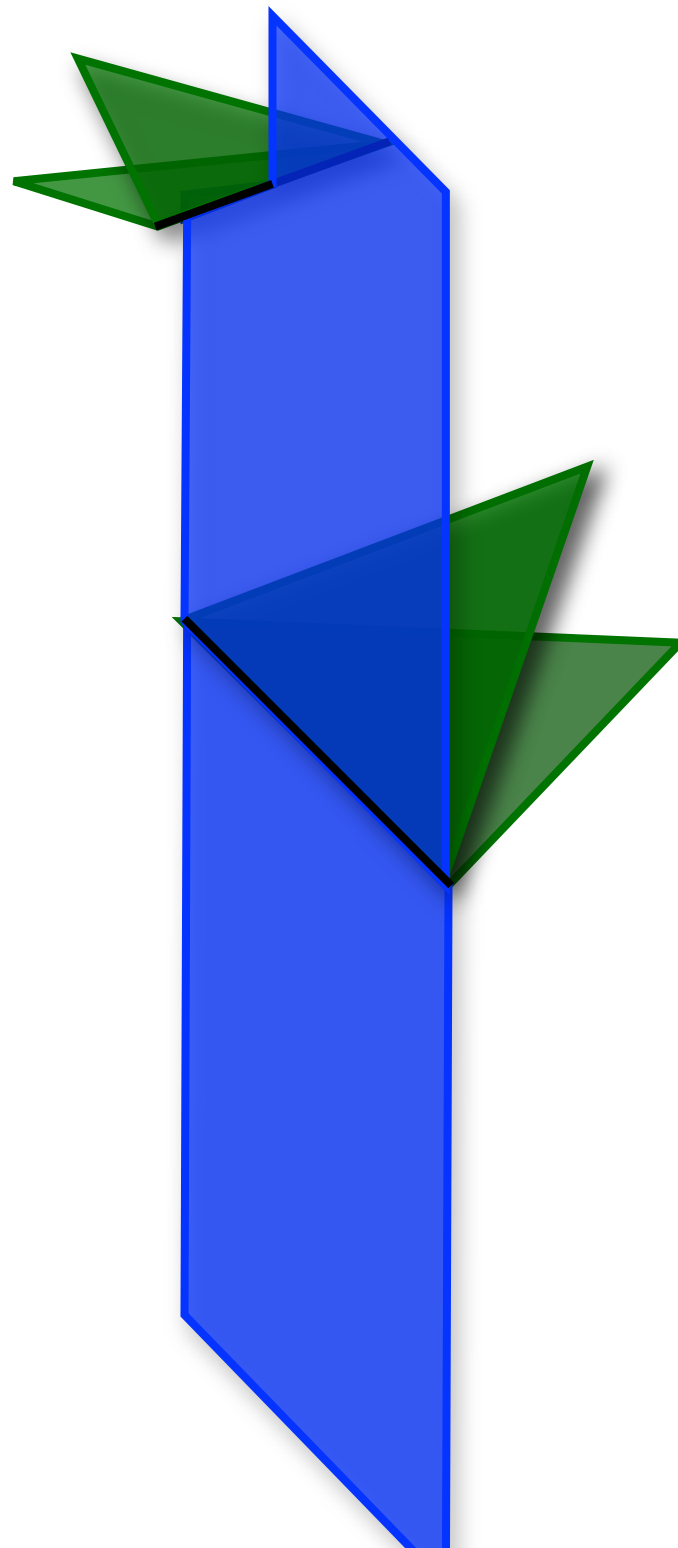


Cortina

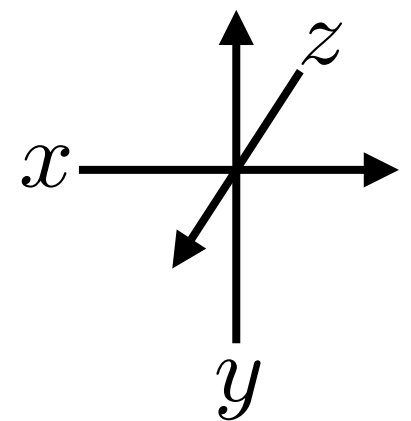


Si no ves un vértice, no puedes ver sólo aristas techo (igual Piso)

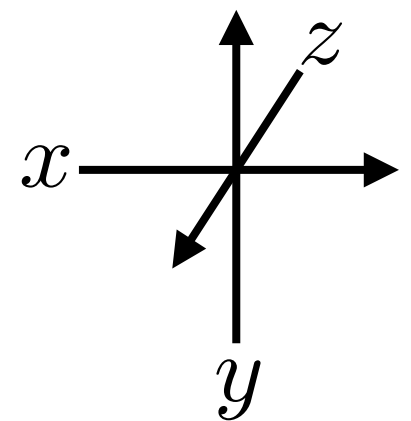
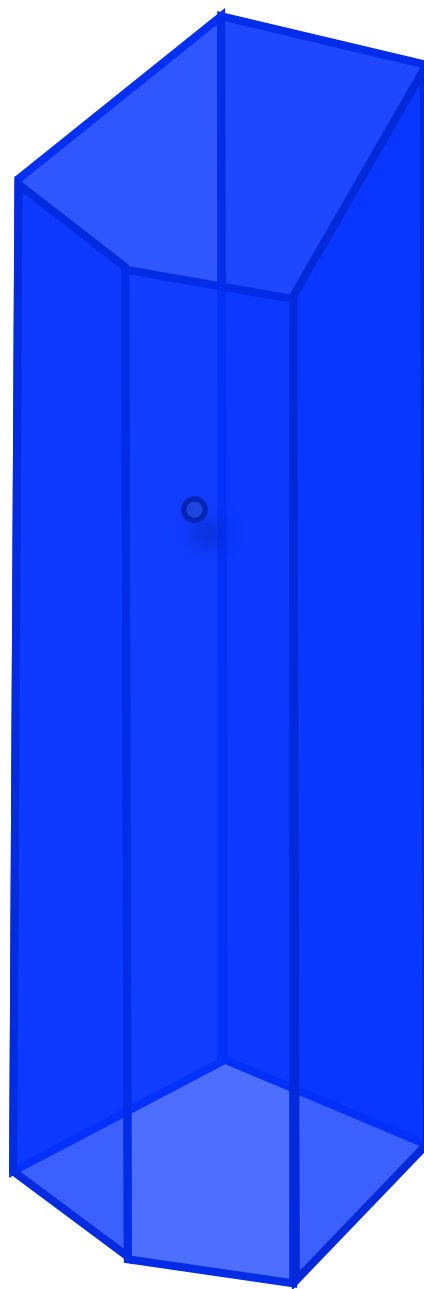
Cortina



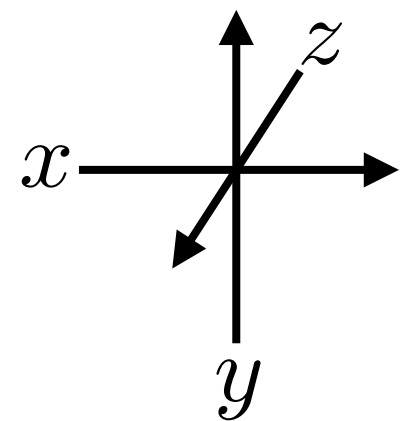
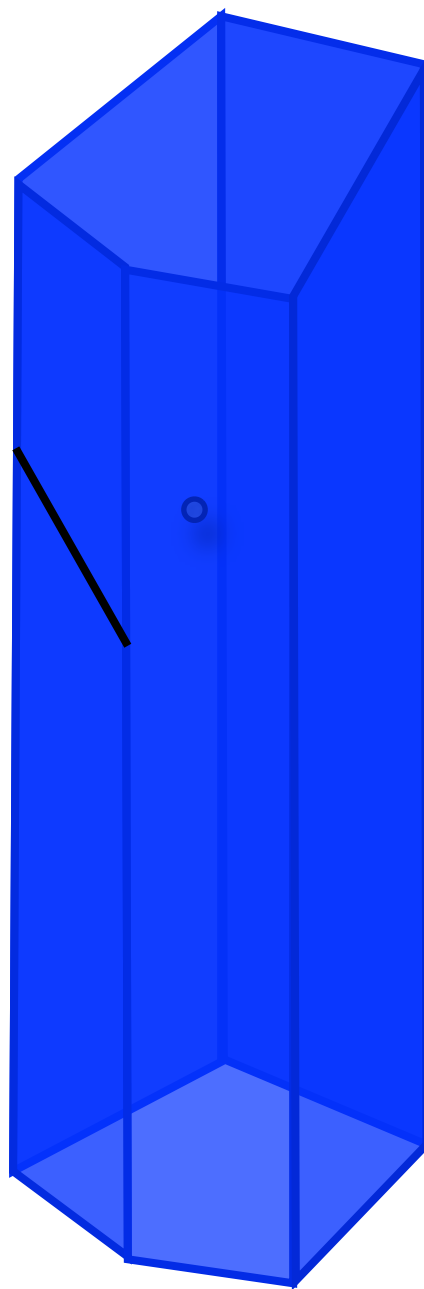
Si no ves un vértice, no puedes ver sólo aristas techo (igual Piso)



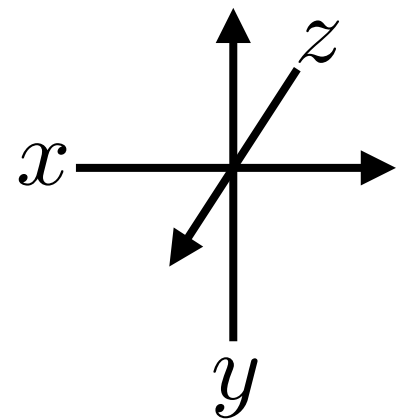
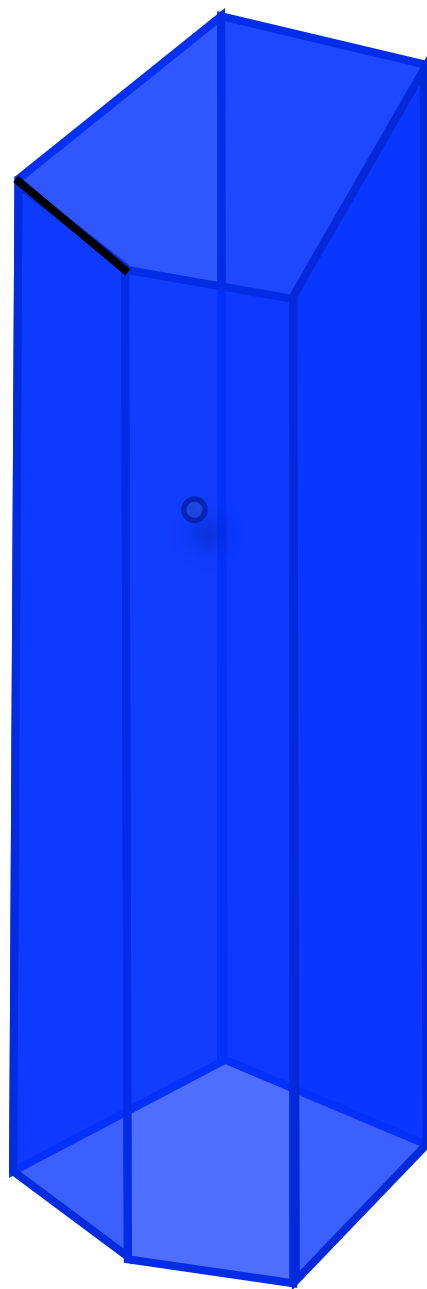
Si no ves un vértice, no puedes
ver sólo aristas techo (igual Piso)



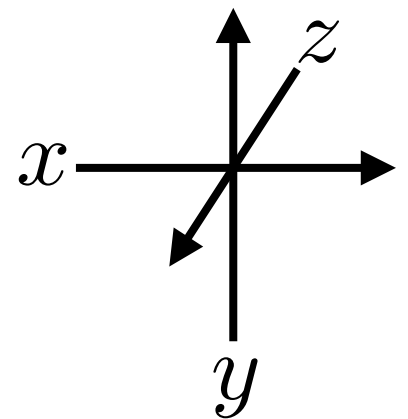
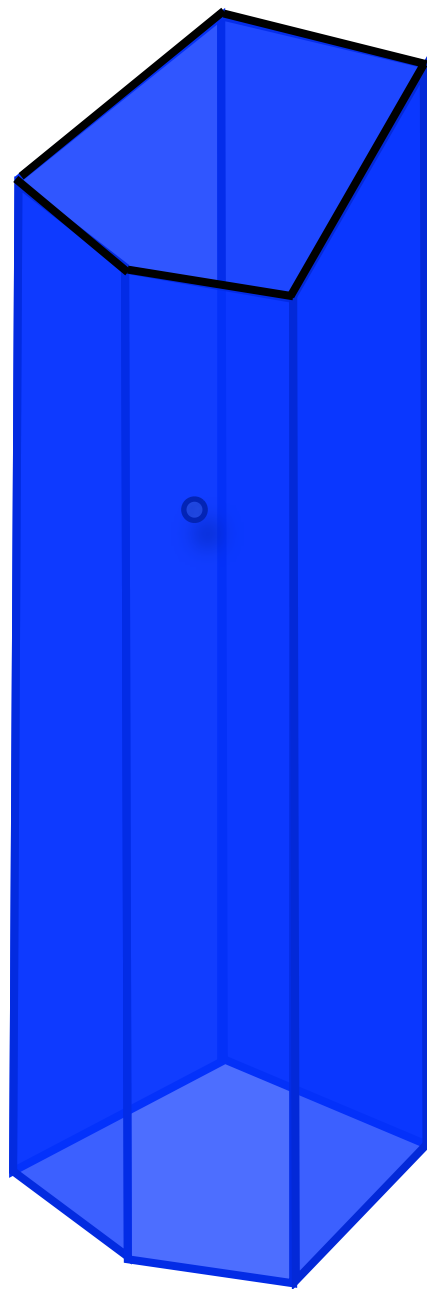
Si no ves un vértice, no puedes ver sólo aristas techo (igual Piso)



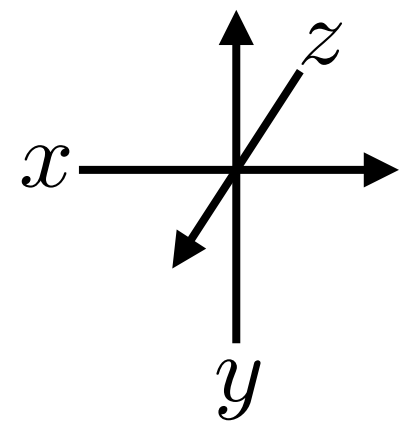
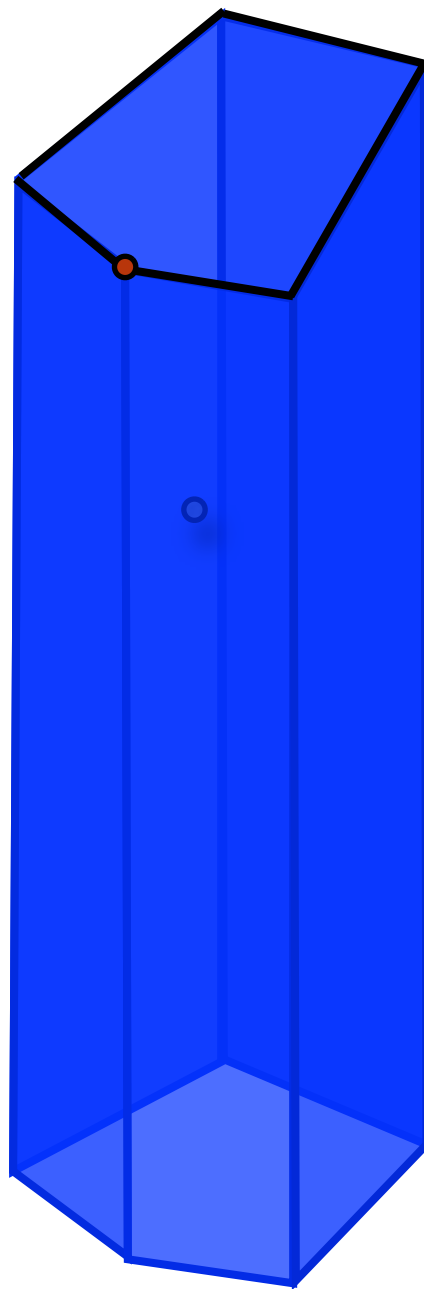
Si no ves un vértice, no puedes ver sólo aristas techo (igual Piso)



Si no ves un vértice, no puedes ver sólo aristas techo (igual Piso)



Si no ves un vértice, no puedes
ver sólo aristas techo (igual Piso)



¿Cuántas lámparas-arista son suficientes para iluminar un poliedro?

La estrategia:

¿Cuántas lámparas-arista son suficientes para iluminar un poliedro?

La estrategia:

Primero, encontramos un conjunto E_1 de aristas que cubra todos los vértices

¿Cuántas lámparas-arista son suficientes para iluminar un poliedro?

La estrategia:

Primero, encontramos un conjunto E_1 de aristas que cubra todos los vértices

Después, partimos el resto de aristas en 4 clases, tales que cualquier punto del poliedro que no vea ningún vértice ve al menos 2 aristas en clases distintas. Tomamos las tres clases más pequeñas.

¿Cuántas lámparas-arista son suficientes para iluminar un poliedro?

La estrategia:

Primero, encontramos un conjunto E_1 de aristas que cubra todos los vértices

Después, partimos el resto de aristas en 4 clases, tales que cualquier punto del poliedro que no vea ningún vértice ve al menos 2 aristas en clases distintas. Tomamos las tres clases más pequeñas.

Usamos: $|E_1| + \frac{3}{4}(m - |E_1|) = \frac{3m + |E_1|}{4}$ lámparas

**¿Cuántas lámparas-arista son
suficientes para iluminar un poliedro?**

¿Cuántas lámparas-arista son suficientes para iluminar un poliedro?

Podemos iluminar el interior de cualquier poliedro usando más o menos $27m/32$ lámparas aristas.

¿Cuántas lámparas-arista son suficientes para iluminar un poliedro?

Podemos iluminar el interior de cualquier poliedro usando más o menos $27m/32$ lámparas aristas.

Si el 1-esqueleto fuera conexo, con $5m/6$ lámparas arista sería suficiente.

¿Cuántas lámparas-arista son suficientes para iluminar un poliedro?

Podemos iluminar el interior de cualquier poliedro usando más o menos $27m/32$ lámparas aristas.

Si el 1-esqueleto fuera conexo, con $5m/6$ lámparas arista sería suficiente.

No hacemos ninguna suposición sobre el género del poliedro...

¿Cuántas lámparas-arista son suficientes para iluminar un poliedro?

Podemos iluminar el interior de cualquier poliedro usando más o menos $27m/32$ lámparas aristas.

Si el 1-esqueleto fuera conexo, con $5m/6$ lámparas arista sería suficiente.

No hacemos ninguna suposición sobre el género del poliedro...

Sin embargo, la cota sigue bastante holgada, la mejor cota inferior la da un poliedro que necesita $\lfloor \frac{m}{6} \rfloor$ lámparas arista.



That's all Folks!