Sobre problemas extremales en teoría de gráficas vinculados con la propiedad (p, q) para gráficas.

Trabajo de Investigación.

Juan Carlos Díaz Patiño.
Dr. Luis Montejano Peimbert

Centro de Innovación Matemática.

XXVIII Coloquio Víctor Neumann-Lara de Teoría de las Gráficas Combinatoria y sus Aplicaciones.
Morelia, Mich. del 4 al 8 de marzo de 2013

6 de marzo de 2013

Contenido.

Contenido.

Contenido.

1. Problemas extremales.

2. Resultados de Erdős y Gallai.

3. Propiedad (p, q)
   - $\overline{\mathcal{F}}_{(p,2)}$
   - $\overline{\mathcal{F}}_{(p,3)}$

Dado un número fijo de vértices, ¿Cuál es el mayor número de aristas que puede tener una gráfica sin triángulos?

Dado un número fijo de vértices, ¿Cuál es el mayor número de aristas que puede tener una gráfica sin triángulos?

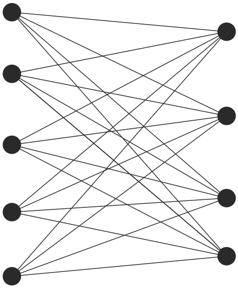
Teorema (Mantel, 1907)

Toda gráfica de orden $n \geq 3$ y tamaño al menos $\lfloor n^2/4 \rfloor + 1$ contiene un triángulo

Dado un número fijo de vértices, ¿Cuál es el mayor número de aristas que puede tener una gráfica sin triángulos?

Teorema (Mantel, 1907)

Toda gráfica de orden $n \geq 3$ *y tamaño al menos* $\lfloor n^2/4 \rfloor + 1$ *contiene un triángulo*



Definición

Dada una gráfica F, decimos que la gráfica G es F-libre si no contiene ninguna subgráfica isomorfa a F.

Definición

Una gráfica G es F-saturada si es F-libre pero para cualquier $e \in E(\overline{G})$, $G + e$ contiene una subgráfica isomorfa a F.

Definición

El valor extremal para (n, F) está definido como el máximo número de aristas sobre todas las gráficas G de orden n, F-libres y se denota por: $ex(n, F) := max\{|E(G)| : |V(G)| = n \text{ y } G \text{ es F-saturada}\}$.

Definición

Decimos que una gráfica G es extremal *si $|E(G)| = ex(n, F)$ y es F-libre.*

Definición

Decimos que una gráfica G es extremal si $|E(G)| = ex(n, F)$ y es F-libre.

Teorema (Mantel, 1907)

Para $n \geq 3$,

- $ex(n, K_3) = \lfloor n^2/4 \rfloor$,
- *la gráfica extremal es $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}$ y es única.*

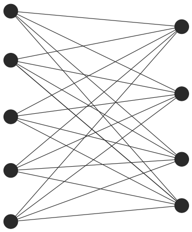
Definición

Decimos que una gráfica G es extremal si $|E(G)| = ex(n, F)$ y es F-libre.

Teorema (Mantel, 1907)

Para $n \geq 3$,

- $ex(n, K_3) = \lfloor n^2/4 \rfloor$,
- *la gráfica extremal es $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}$ y es única.*



Teorema (Turán, 1941)

Para $n \geq 3$,

- $ex(n, K_r) \leq \left(\frac{r-2}{2r-2}\right) n^2$,
- *la gráfica extremal es $T_{r-1}(n)$ y es única.*

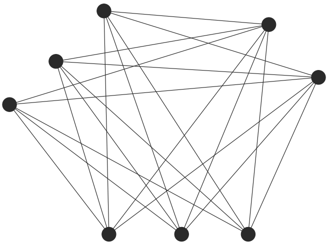


Figura: $T_3(8)$

Teorema (Turán, 1941)

Para $n \geq 3$,

- $ex(n, K_r) \leq \left(\frac{r-2}{2r-2}\right) n^2$,
- *la gráfica extremal es* $T_{r-1}(n)$ *y es única.*

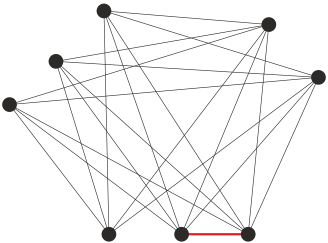


Figura: $T_3(8)$

Teorema (Turán, 1941)

Para $n \geq 3$,

- $ex(n, K_r) \leq \left(\frac{r-2}{2r-2}\right) n^2$,
- *la gráfica extremal es $T_{r-1}(n)$ y es única.*

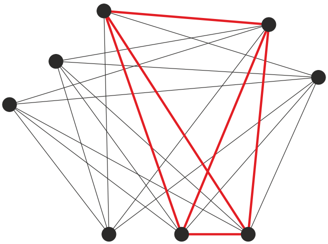


Figura: $T_3(8)$

Sea $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_k\}$ una familia de gráficas.

Definición

Decimos que G es $\mathcal{F}$-libre si no existe subgráfica $F \subseteq G$ tal que $F \in \mathcal{F}$.

Definición

Una gráfica G es $\mathcal{F}$-saturada si es $\mathcal{F}$-libre y si para cualquier arista $e \in E(\overline{G})$ existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subseteq G + e$ o G es una gráfica completa.

Definición

$ex(n, \mathcal{F}) := max\{|E(G)| : |V(G)| = n \text{ y } G \text{ es } \mathcal{F}\text{-saturada}\}.$

Definición

Decimos que una gráfica G es extremal si $|E(G)| = ex(n, \mathcal{F})$ y es $\mathcal{F}$-libre.

La función $ex(n, \mathcal{F})$ satisface las siguientes propiedades:

Lema

Si $F' \subseteq F$ y $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$, las siguientes desigualdades se cumplen para cualquier n.

$$ex(n, F') \leq ex(n, F)$$
$$ex(n, \mathcal{F}) \leq ex(n, \mathcal{F}')$$
$$ex(n, \mathcal{F}) \leq ex(n+1, \mathcal{F})$$

Ejemplo

Sea $\mathcal{F}_n = \{C_3, C_4, \ldots, C_n\}$

Ejemplo

Sea $\mathcal{F}_n = \{C_3, C_4, \ldots, C_n\}$

Teorema

- $ex(n, \mathcal{F}_n) = n - 1$

Ejemplo

Sea $\mathcal{F}_n = \{C_3, C_4, \ldots, C_n\}$

Teorema

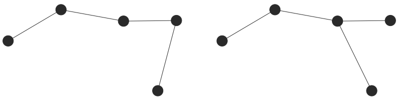
- $ex(n, \mathcal{F}_n) = n - 1$
- *la gráfica extremal es cualquier árbol.*

Ejemplo

Sea $\mathcal{F}_n = \{C_3, C_4, \ldots, C_n\}$

Teorema

- $ex(n, \mathcal{F}_n) = n - 1$
- *la gráfica extremal es cualquier árbol.*



Dado un número fijo de vértices. ¿Cuál es el mayor número de aristas que tiene una gráfica sin tener un ciclo hamiltoniano?

Dado un número fijo de vértices. ¿Cuál es el mayor número de aristas que tiene una gráfica sin tener un ciclo hamiltoniano?

Teorema (Ore. 1961)

- $ex(n, C_n) = \binom{n-1}{2} + 1,$

Dado un número fijo de vértices. ¿Cuál es el mayor número de aristas que tiene una gráfica sin tener un ciclo hamiltoniano?

Teorema (Ore. 1961)

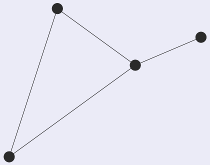
- $ex(n, C_n) = \binom{n-1}{2} + 1$,
- *la gráfica extremal es* $K_{n-1} \cup e$ *y es única.*

Dado un número fijo de vértices. ¿Cuál es el mayor número de aristas que tiene una gráfica sin tener un ciclo hamiltoniano?

Teorema (Ore. 1961)

- $ex(n, C_n) = \binom{n-1}{2} + 1$,
- *la gráfica extremal es* $K_{n-1} \cup e$ *y es única.*

Ejemplo

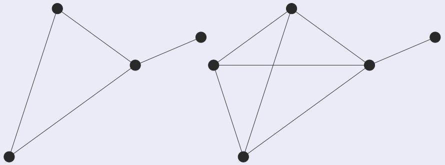


Dado un número fijo de vértices. ¿Cuál es el mayor número de aristas que tiene una gráfica sin tener un ciclo hamiltoniano?

Teorema (Ore. 1961)

- $ex(n, C_n) = \binom{n-1}{2} + 1$,
- *la gráfica extremal es* $K_{n-1} \cup e$ *y es única.*

Ejemplo

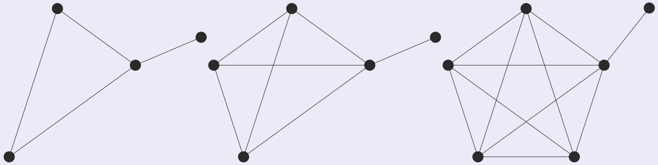


Dado un número fijo de vértices. ¿Cuál es el mayor número de aristas que tiene una gráfica sin tener un ciclo hamiltoniano?

Teorema (Ore. 1961)

- $ex(n, C_n) = \binom{n-1}{2} + 1$,
- *la gráfica extremal es* $K_{n-1} \cup e$ *y es única.*

Ejemplo



¿Qué pasa si restringimos el grado mínimo de la gráfica $\delta(G)$?

Teorema (Erdős. 1962)

Sea $G = G(n, m)$ una gráfica y $\delta(G) \geq k$, entonces

$$ex(n, C_n) = \max_{k \leq t < n/2} \left\{ \binom{n-t}{2} + t^2 \right\}$$

¿Qué pasa si restringimos el grado mínimo de la gráfica $\delta(G)$?

Teorema (Erdős. 1962)

Sea $G = G(n, m)$ una gráfica y $\delta(G) \geq k$, entonces

$$ex(n, C_n) = \max_{k \leq t < n/2} \left\{ \binom{n-t}{2} + t^2 \right\}$$

Ejemplos:

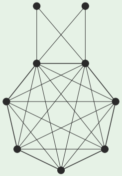


Figura: $m = 25$

¿Qué pasa si restringimos el grado mínimo de la gráfica $\delta(G)$?

Teorema (Erdős. 1962)

Sea $G = G(n, m)$ una gráfica y $\delta(G) \geq k$, entonces

$$ex(n, C_n) = \max_{k \leq t < n/2} \left\{ \binom{n-t}{2} + t^2 \right\}$$

Ejemplos:

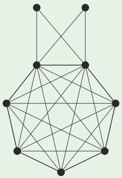


Figura: $m = 25$

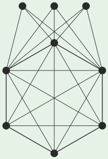


Figura: $m = 24$

¿Qué pasa si restringimos el grado mínimo de la gráfica $\delta(G)$?

Teorema (Erdős. 1962)

Sea $G = G(n, m)$ *una gráfica y* $\delta(G) \geq k$*, entonces*

$$ex(n, C_n) = \max_{k \leq t < n/2} \left\{ \binom{n-t}{2} + t^2 \right\}$$

Ejemplos:

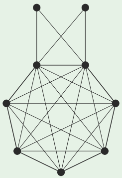


Figura: $m = 25$

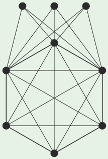


Figura: $m = 24$

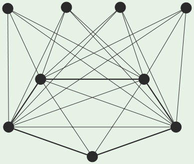


Figura: $m = 26$

¿Qué pasa si restringimos el grado mínimo de la gráfica $\delta(G)$?

Teorema (Erdős. 1962)

Sea $G = G(n,m)$ una gráfica y $\delta(G) \geq k$, entonces

$$ex(n, C_n) = \max_{k \leq t < n/2} \left\{ \binom{n-t}{2} + t^2 \right\}$$

Ejemplos:

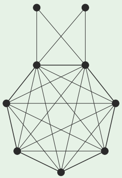


Figura: $m = 25$

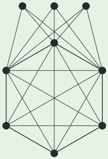


Figura: $m = 24$

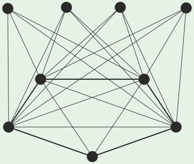


Figura: $m = 26$

$ex(9, C_9) = 26$ si $\delta(G) \geq 2$

Definimos la siguiente familia de gráficas:

Definición

$G_n^p = K_p + \overline{K_{n-p}}$, *donde* $\varphi(n,p) = |E(G_n^p)| = \binom{n}{2} - \binom{n-p}{2}$.

Definimos la siguiente familia de gráficas:

Definición

$G_n^p = K_p + \overline{K_{n-p}}$, *donde* $\varphi(n,p) = |E(G_n^p)| = \binom{n}{2} - \binom{n-p}{2}$.

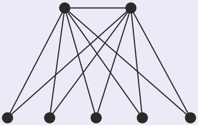


Figura: G_7^2.

Definimos la siguiente familia de gráficas:

Definición

$G_n^p = K_p + \overline{K_{n-p}}$, *donde* $\varphi(n,p) = |E(G_n^p)| = \binom{n}{2} - \binom{n-p}{2}$.

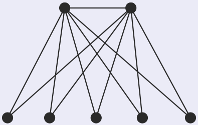


Figura: G_7^2.

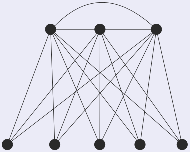


Figura: G_8^3.

Definimos la siguiente familia de gráficas:

Definición

$G_n^p = K_p + \overline{K_{n-p}}$, *donde* $\varphi(n,p) = |E(G_n^p)| = \binom{n}{2} - \binom{n-p}{2}$.

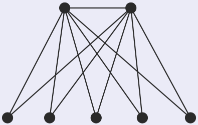


Figura: G_7^2.

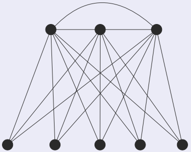


Figura: G_8^3.

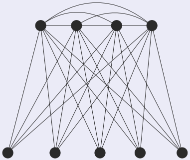


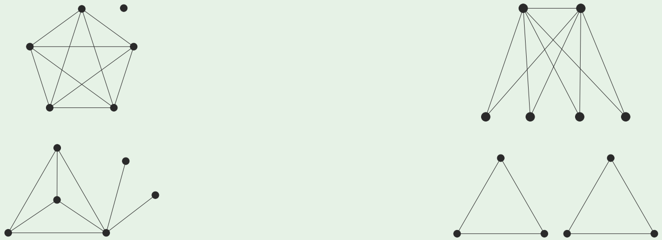
Figura: G_9^4.

Dado un número fijo de vértices. ¿Cuál es el mayor número de aristas que tiene una gráfica sin que tenga p aristas independientes (pK_2)?

Dado un número fijo de vértices. ¿Cuál es el mayor número de aristas que tiene una gráfica sin que tenga p aristas independientes (pK_2)?

Ejemplo

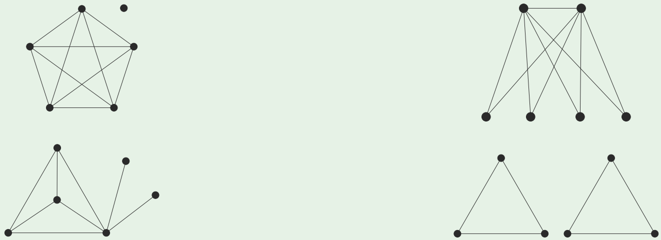
Gráficas $3K_2$-saturadas con 6 vértices.



Dado un número fijo de vértices. ¿Cuál es el mayor número de aristas que tiene una gráfica sin que tenga p aristas independientes (pK_2)?

Ejemplo

Gráficas $3K_2$-saturadas con 6 vértices.



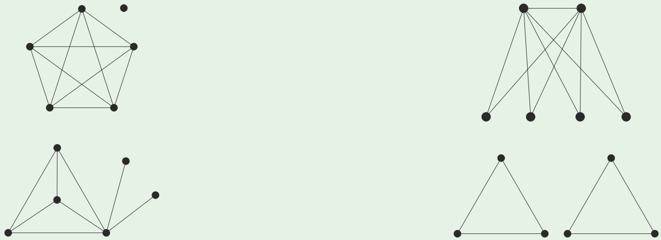
Teorema (Erdős, Gallai. 1959)

- $ex(n, pK_2) \leq max \left\{ \binom{2p-1}{2}, \varphi(n, p-1) \right\},$

Dado un número fijo de vértices. ¿Cuál es el mayor número de aristas que tiene una gráfica sin que tenga p aristas independientes (pK_2)?

Ejemplo

Gráficas $3K_2$-saturadas con 6 vértices.



Teorema (Erdős, Gallai. 1959)

- $ex(n, pK_2) \leq max\left\{\binom{2p-1}{2}, \varphi(n, p-1)\right\}$,
- *las gráficas extremales son* K_{2p-1} *y* G_n^{p-1}.

1. Problemas extremales.

2. Resultados de Erdős y Gallai.

3. Propiedad (p, q)
   - $\overline{\mathcal{F}}_{(p,2)}$
   - $\overline{\mathcal{F}}_{(p,3)}$

Decimos que una gráfica G satisface la propiedad (p, q) si para cualesquiera p aristas, q de ellas se intersectan.

Ejemplos

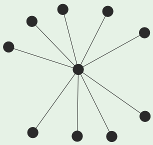


Figura: (p, p)

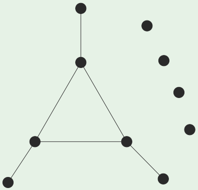


Figura: $(5, 3)$

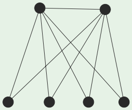


Figura: $(3, 2)$

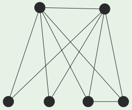


Figura: $(6, 3)$

Dado un número fijo de vértices. ¿Cuál es el mayor número de aristas que tiene una gráfica con la propiedad (p,q)?

Definición

$$\overline{\mathcal{F}}_{(p,q)} = \{G : |E(G)| = p, \Delta(G) = q-1\}$$

Problema

$$ex(n, \overline{\mathcal{F}}_{(p,q)}) = ?$$

$\overline{\mathcal{F}}_{(p,2)}$

Cada vez que tengamos p aristas, 2 de ellas se intersectan, entonces estamos prohibiendo todas las gráficas con p aristas y grado máximo 1.

$\overline{\mathcal{F}}_{(p,2)}$

Cada vez que tengamos p aristas, 2 de ellas se intersectan, entonces estamos prohibiendo todas las gráficas con p aristas y grado máximo 1.

Definición

$\overline{\mathcal{F}}_{(p,2)} = \{G : |E(G)| = p \;\; y \;\; \Delta(G) \leq 1\}.$

La afirmación es equivalente a prohibir p a aristas ajenas.

Teorema (Erdős, Gallai. 1959)

$ex(n, \overline{\mathcal{F}}_{(p,2)}) \leq max \left\{ \binom{2p-1}{2}, \varphi(n, p-1) \right\},$

$\overline{\mathcal{F}}_{(p,3)}$

Dado un número fijo de vértices ¿Cuál es el mayor número de aristas que tiene una gráfica que satisface $(p, 3)$?

Dado un número fijo de vértices ¿Cuál es el mayor número de aristas que tiene una gráfica que satisface $(p,3)$?

Definición

$\overline{\mathcal{F}}_{(p,3)} = \{G : |E(G)| = p \;\; y \;\; \Delta(G) \leq 2\}.$

Dado un número fijo de vértices ¿Cuál es el mayor número de aristas que tiene una gráfica que satisface $(p,3)$?

Definición

$\overline{\mathcal{F}}_{(p,3)} = \{G : |E(G)| = p \ \ y \ \ \Delta(G) \leq 2\}.$

Problema

$ex(n, \overline{\mathcal{F}}_{(p,3)}) = ?$

Teorema (Caso impar)

Si $n > \max\{2p+1, \tau(p)\}$*, entonces* $ex(n, \overline{\mathcal{F}}_{(2p+1,3)}) = \varphi(n,p)$.

Observación:

Como la gráfica G_n^p satisface la propiedad $(2p+1,3)$ entonces $\varphi(n,p) \leq ex(n, \overline{\mathcal{F}}_{(2p+1,3)})$.

Lema

Si G satisface $(2p+1,3)$, es $(p+1)K_2$-libre y $n \geq \tau(p)$ entonces $ex(n, \overline{\mathcal{F}}_{(2p+1,3)}) \leq \varphi(n,p)$.

Lema

Si G satisface $(2p+1,3)$, es $(p+1)K_2$-libre y $n \geq \tau(p)$ entonces $ex(n, \overline{\mathcal{F}}_{(2p+1,3)}) \leq \varphi(n,p)$.

Demostración.

Solo hay que usar el resultado de Erdős, como G es $(p+1)K_2$-libre, entonces $ex(n, \overline{\mathcal{F}}_{(2p+1,3)}) \leq \varphi(n,p)$. $\square$

Lema

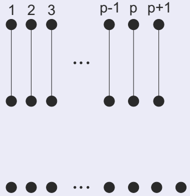
Si G *satisface* $(2p+1,3)$, $(p+1)K_2 \subseteq G$ *y* $n \geq \text{máx}\{\tau(p), 2p+1\}$ *entonces* $ex(n, \overline{\mathcal{F}}_{(2p+1,3)}) \leq \varphi(n,p)$

Lema

Si G satisface $(2p+1,3)$, $(p+1)K_2 \subseteq G$ *y* $n \geq \max\{\tau(p), 2p+1\}$ *entonces* $ex(n, \overline{\mathcal{F}}_{(2p+1,3)}) \leq \varphi(n,p)$

Demostración:

Sea $G(n,m)$, con las hipótesis del teorema. Como $(p+1)K_2 \subseteq G$, el resto de las aristas es pK_2-libre.

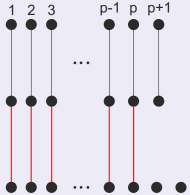


Lema

Si G satisface $(2p+1,3)$, $(p+1)K_2 \subseteq G$ y $n \geq \max\{\tau(p), 2p+1\}$ entonces $ex(n, \overline{\mathcal{F}}_{(2p+1,3)}) \leq \varphi(n,p)$

Demostración:

Sea $G(n,m)$, con las hipótesis del teorema. Como $(p+1)K_2 \subseteq G$, el resto de las aristas es pK_2-libre.

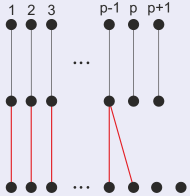


Lema

Si G satisface $(2p+1,3)$, $(p+1)K_2 \subseteq G$ *y* $n \geq \text{máx}\{\tau(p), 2p+1\}$ *entonces* $ex(n, \overline{\mathcal{F}}_{(2p+1,3)}) \leq \varphi(n,p)$

Demostración:

Sea $G(n,m)$, con las hipótesis del teorema. Como $(p+1)K_2 \subseteq G$, el resto de las aristas es pK_2-libre.



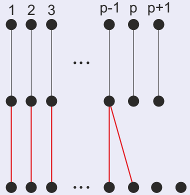
Lema

Si G *satisface* $(2p+1,3)$, $(p+1)K_2 \subseteq G$ *y* $n \geq \text{máx}\{\tau(p), 2p+1\}$ *entonces* $ex(n, \overline{\mathcal{F}}_{(2p+1,3)}) \leq \varphi(n,p)$

Demostración:

Sea $G(n,m)$, con las hipótesis del teorema. Como $(p+1)K_2 \subseteq G$, el resto de las aristas es pK_2-libre.

Por lo tanto $m \leq \varphi(n, p-1) + (p+1)$ para $n > \tau(p)$.

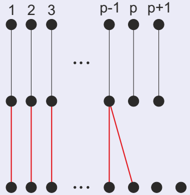


Lema

Si G satisface $(2p+1,3)$, $(p+1)K_2 \subseteq G$ y $n \geq$ máx$\{\tau(p), 2p+1\}$ entonces $ex(n, \overline{\mathcal{F}}_{(2p+1,3)}) \leq \varphi(n,p)$

Demostración:

Sea $G(n,m)$, con las hipótesis del teorema. Como $(p+1)K_2 \subseteq G$, el resto de las aristas es pK_2-libre.
Por lo tanto $m \leq \varphi(n, p-1) + (p+1)$ para $n > \tau(p)$.
pero $\varphi(n, p-1) + (p+1) \leq \varphi(n,p)$ para $n \geq 2p+1$.



Lema

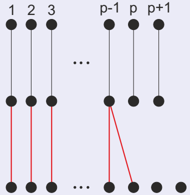
Si G satisface $(2p+1,3)$, $(p+1)K_2 \subseteq G$ y $n \geq \text{máx}\{\tau(p), 2p+1\}$ entonces $ex(n, \overline{\mathcal{F}}_{(2p+1,3)}) \leq \varphi(n,p)$

Demostración:

Sea $G(n,m)$, con las hipótesis del teorema. Como $(p+1)K_2 \subseteq G$, el resto de las aristas es pK_2-libre.

Por lo tanto $m \leq \varphi(n,p-1) + (p+1)$ para $n > \tau(p)$.

pero $\varphi(n,p-1) + (p+1) \leq \varphi(n,p)$ para $n \geq 2p+1$.



$\square$

Teorema (Caso par)

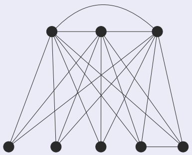
Si $n > \max\{\frac{(p+1)^3}{2}, \frac{p^2+7p-6}{2}\}$, *entonces* $ex(n, \overline{\mathcal{F}}_{(2p+2,3)}) = \varphi(n,p) + 1$

Teorema (Caso par)

Si $n > \text{máx}\{\frac{(p+1)^3}{2}, \frac{p^2+7p-6}{2}\}$, *entonces* $ex(n, \overline{\mathcal{F}}_{(2p+2,3)}) = \varphi(n,p) + 1$

Observación:

La gráfica $G_n^p + e$ satisface la propiedad $(2p+2,3)$, por lo tanto $\varphi(n,p) + 1 \leq ex(n, \overline{\mathcal{F}}_{(2p+2,3)})$.



Conclusiones.

- La motivación para éste problema viene de encontrar $\chi_f(H)$ para hipergráficas.

Conclusiones.

- La motivación para éste problema viene de encontrar $\chi_f(H)$ para hipergráficas.
- Encontrar el número cromático fraccional consiste en resolver un problema de programación lineal.

Conclusiones.

- La motivación para éste problema viene de encontrar $\chi_f(H)$ para hipergráficas.
- Encontrar el número cromático fraccional consiste en resolver un problema de programación lineal.
- $\chi_f(H) = \frac{|H|}{\alpha(H)}$ cuando la hipergráfica tiene "mucha simetría".

Conclusiones.

- La motivación para éste problema viene de encontrar $\chi_f(H)$ para hipergráficas.
- Encontrar el número cromático fraccional consiste en resolver un problema de programación lineal.
- $\chi_f(H) = \frac{|H|}{\alpha(H)}$ cuando la hipergráfica tiene "mucha simetría".
- para las hipergráficas que estamos estudiando $\alpha(H) = ex(n, \mathcal{F})$.

Conclusiones.

- La motivación para éste problema viene de encontrar $\chi_f(H)$ para hipergráficas.
- Encontrar el número cromático fraccional consiste en resolver un problema de programación lineal.
- $\chi_f(H) = \frac{|H|}{\alpha(H)}$ cuando la hipergráfica tiene "mucha simetría".
- para las hipergráficas que estamos estudiando $\alpha(H) = ex(n, \mathcal{F})$.

¡Gracias por su atención!