Hall y matrimonios en geometría

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
Luis Montejano Peimbert

Instituto de Matemáticas Unidad Juriquilla, UNAM

XXVIII Coloquio de Gráficas Victor Neumann-Lara
Lunes 4 de marzo de 2013

Contenido

Contenido

Contenido

Esquema

El teorema del matrimonio de Hall

Teorema

Sea G una gráfica bipartita con partes X y Y. Si para todo $S \subseteq X$ se tiene que $|N(S)| \geq |S|$ entonces existe un emparejamiento de G que satura a X.

- Condición local de tamaños $\Rightarrow$ condición global de emparejamiento.
- ¿Cómo buscar teoremas tipo Hall en geometría?

El teorema del matrimonio de Hall

Teorema

Sea G una gráfica bipartita con partes X y Y. Si para todo $S \subseteq X$ se tiene que $|N(S)| \geq |S|$ entonces existe un emparejamiento de G que satura a X.

- Condición local de tamaños $\Rightarrow$ condición global de emparejamiento.
- ¿Cómo buscar teoremas tipo Hall en geometría?

El teorema del matrimonio de Hall

Teorema

Sea G una gráfica bipartita con partes X y Y. Si para todo $S \subseteq X$ se tiene que $|N(S)| \geq |S|$ entonces existe un emparejamiento de G que satura a X.

- Condición local de tamaños $\Rightarrow$ condición global de emparejamiento.
- ¿Cómo buscar teoremas tipo Hall en geometría?

Hall para posición general en $\mathbb{R}$

$[k] = \{1, 2, ..., k\}$

Teorema

Tomemos k conjuntos C_1, C_2, . . ., C_k de puntos en $\mathbb{R}$. Supongamos que para cada $\beta \subseteq [k]$ tenemos al menos $|\beta|$ puntos distintos en $\bigcup_{r\in\beta} C_r$. Entonces, existen puntos distintos $x_1 \in C_1$, $x_2 \in C_2$, . . ., $x_k \in C_k$.

- En $\mathbb{R}$: Puntos distintos $=$ puntos en posición general.
- $C_j =$ los puntos de color j. Encontramos un conjunto heterocromático en posición general.
- ¿Será posible generalizar este resultado para $\mathbb{R}^d$?

Hall para posición general en $\mathbb{R}$

$[k] = \{1, 2, ..., k\}$

Teorema

Tomemos k conjuntos $C_1, C_2, \ldots, C_k$ de puntos en $\mathbb{R}$. Supongamos que para cada $\beta \subseteq [k]$ tenemos al menos $|\beta|$ puntos distintos en $\bigcup_{r\in\beta} C_r$. Entonces, existen puntos distintos $x_1 \in C_1, x_2 \in C_2, \ldots, x_k \in C_k$.

- En $\mathbb{R}$: Puntos distintos $=$ puntos en posición general.
- $C_j =$ los puntos de color j. Encontramos un conjunto heterocromático en posición general.
- ¿Será posible generalizar este resultado para $\mathbb{R}^d$?

Hall para posición general en $\mathbb{R}$

$[k] = \{1, 2, ..., k\}$

Teorema

Tomemos k conjuntos $C_1, C_2, \ldots, C_k$ de puntos en $\mathbb{R}$. Supongamos que para cada $\beta \subseteq [k]$ tenemos al menos $|\beta|$ puntos distintos en $\bigcup_{r\in\beta} C_r$. Entonces, existen puntos distintos $x_1 \in C_1, x_2 \in C_2, \ldots, x_k \in C_k$.

- En $\mathbb{R}$: Puntos distintos = puntos en posición general.
- C_j = los puntos de color j. Encontramos un conjunto heterocromático en posición general.
- ¿Será posible generalizar este resultado para $\mathbb{R}^d$?

Hall para posición general en $\mathbb{R}$

$[k] = \{1, 2, ..., k\}$

Teorema

Tomemos k conjuntos $C_1, C_2, \ldots, C_k$ de puntos en $\mathbb{R}$. Supongamos que para cada $\beta \subseteq [k]$ tenemos al menos $|\beta|$ puntos distintos en $\bigcup_{r \in \beta} C_r$. Entonces, existen puntos distintos $x_1 \in C_1, x_2 \in C_2, \ldots, x_k \in C_k$.

- En $\mathbb{R}$: Puntos distintos $=$ puntos en posición general.
- $C_j =$ los puntos de color j. Encontramos un conjunto heterocromático en posición general.
- ¿Será posible generalizar este resultado para $\mathbb{R}^d$?

Hall para posición general en $\mathbb{R}$

$[k] = \{1, 2, ..., k\}$

Teorema

Tomemos k conjuntos $C_1, C_2, \ldots, C_k$ de puntos en $\mathbb{R}$. Supongamos que para cada $\beta \subseteq [k]$ tenemos al menos $|\beta|$ puntos distintos en $\bigcup_{r\in\beta} C_r$. Entonces, existen puntos distintos $x_1 \in C_1, x_2 \in C_2, \ldots, x_k \in C_k$.

- En $\mathbb{R}$: Puntos distintos $=$ puntos en posición general.
- $C_j =$ los puntos de color j. Encontramos un conjunto heterocromático en posición general.
- ¿Será posible generalizar este resultado para $\mathbb{R}^d$?

Hall para posición general en $\mathbb{R}^d$

¿Será cierto el siguiente resultado?

Teorema

Tomemos k conjuntos $C_1, C_2, \ldots, C_k$ de puntos en $\mathbb{R}^d$. Supongamos que para cada $\beta \subseteq [k]$ tenemos al menos $|\beta|$ puntos en posición general en $\bigcup_{r\in\beta} C_r$. Entonces, existen puntos en posición general $x_1 \in C_1, x_2 \in C_2, \ldots, x_k \in C_k$.

- ¡No! Hay un contraejemplo para $d = 2$, $k = 4$.

Hall para posición general en $\mathbb{R}^d$

¿Será cierto el siguiente resultado?

Teorema

Tomemos k conjuntos $C_1, C_2, \ldots, C_k$ de puntos en $\mathbb{R}^d$. Supongamos que para cada $\beta \subseteq [k]$ tenemos al menos $|\beta|$ puntos en posición general en $\bigcup_{r\in\beta} C_r$. Entonces, existen puntos en posición general $x_1 \in C_1, x_2 \in C_2, \ldots, x_k \in C_k$.

- ¡No! Hay un contraejemplo para $d = 2$, $k = 4$.

Funciones de Hall

Fijamos $d = 2$. ¿Existirá alguna función $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ para la cual se cumpla el siguiente teorema?

Teorema

Tomemos k conjuntos $C_1, C_2, \ldots, C_k$ de puntos en $\mathbb{R}^d$. Supongamos que para cada $\beta \subseteq [k]$ tenemos al menos $f(|\beta|)$ puntos en posición general en $\bigcup_{r\in\beta} C_r$. Entonces, existen puntos en posición general $x_1 \in C_1$, $x_2 \in C_2$, $\ldots$, $x_k \in C_k$.

Funciones de Hall

Si existe dicha función, le llamamos una *función de Hall* para los puntos en posición general del plano.

Problema

¿Existe alguna función de Hall?

Si tenemos una función de Hall, cualquiera mayor también funciona.

Problema

¿Qué podemos decir de la "menor" de ellas?

Funciones de Hall

Si existe dicha función, le llamamos una *función de Hall* para los puntos en posición general del plano.

Problema

¿Existe alguna función de Hall?

Si tenemos una función de Hall, cualquiera mayor también funciona.

Problema

¿Qué podemos decir de la "menor" de ellas?

Funciones de Hall

Si existe dicha función, le llamamos una *función de Hall* para los puntos en posición general del plano.

Problema

¿Existe alguna función de Hall?

Si tenemos una función de Hall, cualquiera mayor también funciona.

Problema

¿Qué podemos decir de la "menor" de ellas?

Discos disjuntos

Pasamos a la relación de "ser disjuntos".

¿Existirá alguna función $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ para la cual se cumpla el siguiente teorema?

Teorema

Tomemos k conjuntos $C_1, C_2, \ldots, C_k$ de discos en $\mathbb{R}^d$. Supongamos que para cada $\beta \subseteq [k]$ tenemos al menos $f(|\beta|)$ discos disjuntos dos a dos en $\bigcup_{r \in \beta} C_r$. Entonces, existen discos disjuntos dos a dos $x_1 \in C_1, x_2 \in C_2, \ldots, x_k \in C_k$.

Discos disjuntos

Pasamos a la relación de “ser disjuntos”.
¿Existirá alguna función $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ para la cual se cumpla el siguiente teorema?

Teorema

Tomemos k conjuntos $C_1, C_2, \ldots, C_k$ de discos en $\mathbb{R}^d$. Supongamos que para cada $\beta \subseteq [k]$ tenemos al menos $f(|\beta|)$ discos disjuntos dos a dos en $\bigcup_{r \in \beta} C_r$. Entonces, existen discos disjuntos dos a dos $x_1 \in C_1, x_2 \in C_2, \ldots, x_k \in C_k$.

Esquema

Puntos en posición general

Teorema

(LMS, indep IB) La función $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ dada por:

$$f(j) = 2j\binom{j-1}{2} + 3$$

es una función de Hall para los puntos en posición general en el plano.

Prueba

Esbozo:

- La condición permite tomar $2\binom{j-1}{2}+1$, $2\binom{j-2}{2}+1$, ..., 7, 3, 1 en posición general para algún orden de los colores (principio de las casillas e iterar).
- Ahora al revés, ponemos 1, como hay 3 podemos poner otro, como hay 7 podemos poner otro, ...

Tenemos $f(j) = O(j^3)$. ¿Podremos hacerla $O(j^2)$? En cierto sentido sí.

Prueba

Esbozo:

- La condición permite tomar $2\binom{j-1}{2}+1$, $2\binom{j-2}{2}+1$, …, 7, 3, 1 en posición general para algún orden de los colores (principio de las casillas e iterar).
- Ahora al revés, ponemos 1, como hay 3 podemos poner otro, como hay 7 podemos poner otro, …

Tenemos $f(j) = O(j^3)$. ¿Podremos hacerla $O(j^2)$? En cierto sentido sí.

Prueba

Esbozo:

- La condición permite tomar $2\binom{j-1}{2}+1$, $2\binom{j-2}{2}+1$, ..., 7, 3, 1 en posición general para algún orden de los colores (principio de las casillas e iterar).
- Ahora al revés, ponemos 1, como hay 3 podemos poner otro, como hay 7 podemos poner otro, ...

Tenemos $f(j)=O(j^3)$. ¿Podremos hacerla $O(j^2)$? En cierto sentido sí.

Prueba

Esbozo:

- La condición permite tomar $2\binom{j-1}{2}+1$, $2\binom{j-2}{2}+1$, ..., 7, 3, 1 en posición general para algún orden de los colores (principio de las casillas e iterar).
- Ahora al revés, ponemos 1, como hay 3 podemos poner otro, como hay 7 podemos poner otro, ...

Tenemos $f(j) = O(j^3)$. ¿Podremos hacerla $O(j^2)$? En cierto sentido sí.

Prueba

Esbozo:

- La condición permite tomar $2\binom{j-1}{2}+1$, $2\binom{j-2}{2}+1$, ..., 7, 3, 1 en posición general para algún orden de los colores (principio de las casillas e iterar).
- Ahora al revés, ponemos 1, como hay 3 podemos poner otro, como hay 7 podemos poner otro, ...

Tenemos $f(j) = O(j^3)$. ¿Podremos hacerla $O(j^2)$? En cierto sentido sí.

Prueba

Esbozo:

- La condición permite tomar $2\binom{j-1}{2}+1$, $2\binom{j-2}{2}+1$, …, 7, 3, 1 en posición general para algún orden de los colores (principio de las casillas e iterar).
- Ahora al revés, ponemos 1, como hay 3 podemos poner otro, como hay 7 podemos poner otro, …

Tenemos $f(j) = O(j^3)$. ¿Podremos hacerla $O(j^2)$? En cierto sentido sí.

Prueba

Esbozo:

- La condición permite tomar $2\binom{j-1}{2}+1$, $2\binom{j-2}{2}+1$, …, 7, 3, 1 en posición general para algún orden de los colores (principio de las casillas e iterar).
- Ahora al revés, ponemos 1, como hay 3 podemos poner otro, como hay 7 podemos poner otro, …

Tenemos $f(j) = O(j^3)$. ¿Podremos hacerla $O(j^2)$? En cierto sentido sí.

Prueba

Esbozo:

- La condición permite tomar $2\binom{j-1}{2}+1$, $2\binom{j-2}{2}+1$, ..., 7, 3, 1 en posición general para algún orden de los colores (principio de las casillas e iterar).
- Ahora al revés, ponemos 1, como hay 3 podemos poner otro, como hay 7 podemos poner otro, ...

Tenemos $f(j)=O(j^3)$. ¿Podremos hacerla $O(j^2)$? En cierto sentido sí.

Discos disjuntos

Teorema

(LMS, LM) La función $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ *dada por:*

$$f(j) = 5j - 4$$

es una función de Hall para discos disjuntos.

Lema de Sperner

Teorema

Lema de Sperner
Sea T una triangulación de Δ_k, el simplejo k dimensional. Tenemos k colores. Coloreamos los vértices de Δ_k de colores distintos. Luego coloreamos el resto de los vértices de T de modo que si un vértice está en una cara de Δ_k definida por vértices con colores en $\beta \subseteq [k]$, entonces a ese vértice le toca un color en β.
Entonces, podemos encontrar un k-simplejo heterocromático de T.

Prueba

Esbozo de que $f(j) = 5j - 4$ es de Hall:

- k los colores. Consideramos Δ_k y una triangulación T especial (Aharoni y Haxell).
- La función de Hall nos permite etiquetar inductivamente los vértices de T con parejas (D, r) de modo que:
  - En cada pareja, D es de color r.
  - La segunda coordenada de las etiquetas forma una coloración de Sperner de T.
  - Si tenemos vértices adyacentes en T etiquetados con colores distintos, entonces sus discos correspondientes son disjuntos.
- El Lema de Sperner nos da un k-simplejo heterocromático que por cómo se hizo la coloración corresponde a un conjunto heterocromático de discos disjuntos.

Prueba

Esbozo de que $f(j) = 5j - 4$ es de Hall:

- k los colores. Consideramos Δ_k y una triangulación T especial (Aharoni y Haxell).
- La función de Hall nos permite etiquetar inductivamente los vértices de T con parejas (D, r) de modo que:
  - En cada pareja, D es de color r.
  - La segunda coordenada de las etiquetas forma una coloración de Sperner de T.
  - Si tenemos vértices adyacentes en T etiquetados con colores distintos, entonces sus discos correspondientes son disjuntos.
- El Lema de Sperner nos da un k-simplejo heterocromático que por cómo se hizo la coloración corresponde a un conjunto heterocromático de discos disjuntos.

Prueba

Esbozo de que $f(j) = 5j - 4$ es de Hall:

- k los colores. Consideramos Δ_k y una triangulación T especial (Aharoni y Haxell).
- La función de Hall nos permite etiquetar inductivamente los vértices de T con parejas (D, r) de modo que:
  - En cada pareja, D es de color r.
  - La segunda coordenada de las etiquetas forma una coloración de Sperner de T.
  - Si tenemos vértices adyacentes en T etiquetados con colores distintos, entonces sus discos correspondientes son disjuntos.
- El Lema de Sperner nos da un k-simplejo heterocromático que por cómo se hizo la coloración corresponde a un conjunto heterocromático de discos disjuntos.

Prueba

Esbozo de que $f(j) = 5j - 4$ es de Hall:

- k los colores. Consideramos Δ_k y una triangulación T especial (Aharoni y Haxell).
- La función de Hall nos permite etiquetar inductivamente los vértices de T con parejas (D, r) de modo que:
    - En cada pareja, D es de color r.
    - La segunda coordenada de las etiquetas forma una coloración de Sperner de T.
    - Si tenemos vértices adyacentes en T etiquetados con colores distintos, entonces sus discos correspondientes son disjuntos.
- El Lema de Sperner nos da un k-simplejo heterocromático que por cómo se hizo la coloración corresponde a un conjunto heterocromático de discos disjuntos.

Una condición cuadrática tipo Hall

Hay una función $f(j) = O(j^2)$ que satisface lo siguiente:

Teorema

(LMS, LM) Tomemos k conjuntos $C_1, C_2, \ldots, C_k$ de puntos en $\mathbb{R}^2$. Supongamos que para cada $\beta \subseteq [k]$ tenemos $f(|\beta|)$ puntos en posición genérica en $\bigcup_{r\in\beta} C_r$. Entonces, existen puntos en posición general $x_1 \in C_1, x_2 \in C_2, \ldots, x_k \in C_k$.

De nuevo Sperner: Δ_k y una triangulación especial. Al colorear inductivamente hay que cuidar el $2-$esqueleto.

Una condición cuadrática tipo Hall

Hay una función $f(j) = O(j^2)$ que satisface lo siguiente:

Teorema

(LMS, LM) Tomemos k conjuntos $C_1, C_2, \ldots, C_k$ de puntos en $\mathbb{R}^2$. Supongamos que para cada $\beta \subseteq [k]$ tenemos $f(|\beta|)$ puntos en posición genérica en $\bigcup_{r\in\beta} C_r$. Entonces, existen puntos en posición general $x_1 \in C_1, x_2 \in C_2, \ldots, x_k \in C_k$.

De nuevo Sperner: Δ_k y una triangulación especial. Al colorear inductivamente hay que cuidar el $2-$esqueleto.

Una condición cuadrática tipo Hall

Hay una función $f(j) = O(j^2)$ que satisface lo siguiente:

Teorema

(LMS, LM) Tomemos k conjuntos $C_1, C_2, \ldots, C_k$ de puntos en $\mathbb{R}^2$. Supongamos que para cada $\beta \subseteq [k]$ tenemos $f(|\beta|)$ puntos en posición genérica en $\bigcup_{r\in\beta} C_r$. Entonces, existen puntos en posición general $x_1 \in C_1, x_2 \in C_2, \ldots, x_k \in C_k$.

De nuevo Sperner: Δ_k y una triangulación especial. Al colorear inductivamente hay que cuidar el $2-$esqueleto.

Una condición cuadrática tipo Hall

Hay una función $f(j) = O(j^2)$ que satisface lo siguiente:

Teorema

(LMS, LM) Tomemos k conjuntos $C_1, C_2, \ldots, C_k$ de puntos en $\mathbb{R}^2$. Supongamos que para cada $\beta \subseteq [k]$ tenemos $f(|\beta|)$ puntos en posición genérica en $\bigcup_{r\in\beta} C_r$. Entonces, existen puntos en posición general $x_1 \in C_1, x_2 \in C_2, \ldots, x_k \in C_k$.

De nuevo Sperner: Δ_k y una triangulación especial. Al colorear inductivamente hay que cuidar el $2-$esqueleto.

Una condición cuadrática tipo Hall

Hay una función $f(j) = O(j^2)$ que satisface lo siguiente:

Teorema

(LMS, LM) Tomemos k conjuntos $C_1, C_2, \ldots, C_k$ *de puntos en* $\mathbb{R}^2$. *Supongamos que para cada* $\beta \subseteq [k]$ *tenemos* $f(|\beta|)$ *puntos en posición genérica en* $\bigcup_{r\in\beta} C_r$. *Entonces, existen puntos en posición general* $x_1 \in C_1, x_2 \in C_2, \ldots, x_k \in C_k$.

De nuevo Sperner: Δ_k y una triangulación especial. Al colorear inductivamente hay que cuidar el $2-$esqueleto.

Esquema

Un poco más general

- Hay una función de Hall $O(j^{d+1})$ para puntos en posición general en $\mathbb{R}^d$.
- Hay funciones de Hall lineales para bolas disjuntas en $\mathbb{R}^d$.
- Hay funciones de Hall lineales para ciertas familias de convexos con noción de “kissing number”.
- Hay una condición tipo Hall $O(j^d)$ para puntos en posición general en $\mathbb{R}^d$.

Un poco más general

- Hay una función de Hall $O(j^{d+1})$ para puntos en posición general en $\mathbb{R}^d$.
- Hay funciones de Hall lineales para bolas disjuntas en $\mathbb{R}^d$.
- Hay funciones de Hall lineales para ciertas familias de convexos con noción de "kissing number".
- Hay una condición tipo Hall $O(j^d)$ para puntos en posición general en $\mathbb{R}^d$.

Un poco más general

- Hay una función de Hall $O(j^{d+1})$ para puntos en posición general en $\mathbb{R}^d$.
- Hay funciones de Hall lineales para bolas disjuntas en $\mathbb{R}^d$.
- Hay funciones de Hall lineales para ciertas familias de convexos con noción de “kissing number”.
- Hay una condición tipo Hall $O(j^d)$ para puntos en posición general en $\mathbb{R}^d$.

Un poco más general

- Hay una función de Hall $O(j^{d+1})$ para puntos en posición general en $\mathbb{R}^d$.
- Hay funciones de Hall lineales para bolas disjuntas en $\mathbb{R}^d$.
- Hay funciones de Hall lineales para ciertas familias de convexos con noción de “kissing number”.
- Hay una condición tipo Hall $O(j^d)$ para puntos en posición general en $\mathbb{R}^d$.

Problemas por resolver

- Resultados específicos de ser disjuntos para familias de convexos.
- ¿Función de Hall $O(j^d)$ para puntos en posición general en $\mathbb{R}^d$?
- Conjuntos grandes de puntos en posición genérica en puntos en posición general.
- Más ejemplos de que no se cumpla.

Problemas por resolver

- Resultados específicos de ser disjuntos para familias de convexos.
- ¿Función de Hall $O(j^d)$ para puntos en posición general en $\mathbb{R}^d$?
- Conjuntos grandes de puntos en posición genérica en puntos en posición general.
- Más ejemplos de que no se cumpla.

Problemas por resolver

- Resultados específicos de ser disjuntos para familias de convexos.
- ¿Función de Hall $O(j^d)$ para puntos en posición general en $\mathbb{R}^d$?
- Conjuntos grandes de puntos en posición genérica en puntos en posición general.
- Más ejemplos de que no se cumpla.

Problemas por resolver

- Resultados específicos de ser disjuntos para familias de convexos.
- ¿Función de Hall $O(j^d)$ para puntos en posición general en $\mathbb{R}^d$?
- Conjuntos grandes de puntos en posición genérica en puntos en posición general.
- Más ejemplos de que no se cumpla.

Agradecimiento y contacto

¡Gracias por su atención!

Blog
http://blog.nekomath.com
Correo
ssbmplayer@gmail.com
FB
Leonardo Martínez

Agradecimiento y contacto

¡Gracias por su atención!

Blog
http://blog.nekomath.com
Correo
ssbmplayer@gmail.com
FB
Leonardo Martínez

Agradecimiento y contacto

¡Gracias por su atención!

Blog

http://blog.nekomath.com

Correo

ssbmplayer@gmail.com

FB

Leonardo Martínez