Modelos lineales para problemas de captura de objetos sobre una recta

Universidad Autónoma Metropolitana
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Luis Eduardo Urbán Rivero
Posgrado en Optimización

Rafael López Bracho
Departamento de Sistemas

Francisco Javier Zaragoza Martínez
Departamento de Sistemas

Posgrado en Optimización

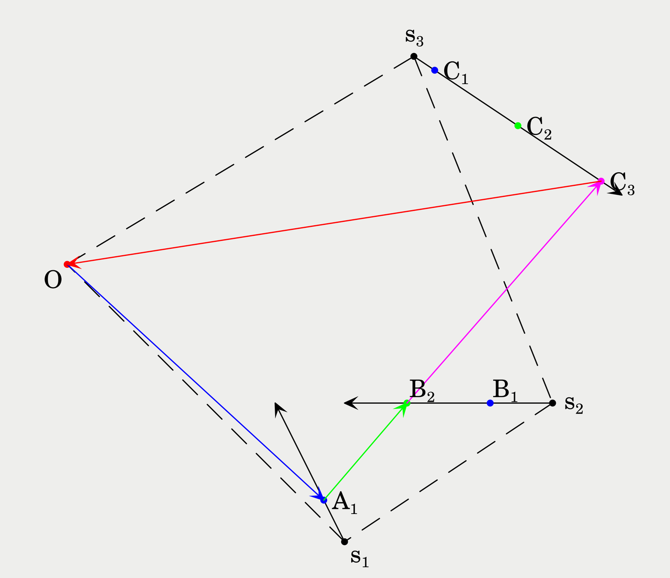
Descripción general del problema

En el problema del agente viajero (TSP) se busca el recorrido más rápido que pase por todas las ciudades que debe visitar. Una generalización de este problema, conocida como el problema del agente viajero con objetos móviles (MTTSP), considera que no sólo se mueve el agente sino que también se mueven los lugares que debe visitar. Dicho problema se presenta en el reabastecimiento de combustibles a embarcaciones que siguen una ruta y que no pueden detenerse. Evidentemente se requieren las siguientes condiciones:

- La velocidad del agente debe ser suficiente para alcanzar a todos los objetos móviles.
- Se debe conocer la trayectoria de los objetos móviles.

En particular, si los objetos se mueven a velocidad uniforme y el agente es más rápido que ellos, entonces los podrá alcanzar.

Ejemplo de MTTSP

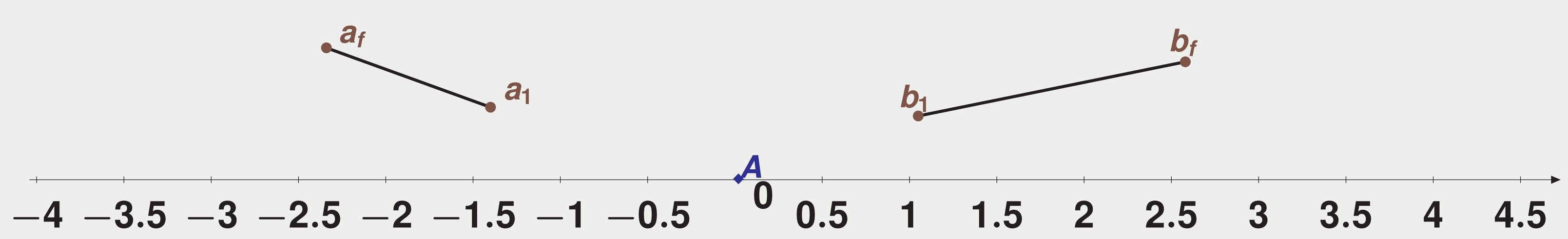


Captura de objetos sobre una recta

Una relajación del MTTSP es que ahora los objetos móviles serán capturados en una recta pero además solo existirán en la recta durante periodo de tiempo y después desaparecen, por lo tanto deben ser atrapados mientras existan en la recta. Otra forma de ver este problema es como si los objetos fueran segmentos de recta que caen verticalmente sobre una recta horizontal y que se consideran atrapados cuando el agente los toca sobre dicha recta.

Visto como puntos sobre la recta

Visto como segmentos que caen en la recta



Variables y parametros

- x_i es la posición donde se captura al objeto i
- t_i es el momento en que se captura al objeto i
- a_i, d_i son los momentos de aparición y desaparición respectivamente del objeto i
- p_i es la posición en la que aparece el objeto i
- Δ_i Tiempo de permanencia del objeto i
- U es la velocidad del agente

Modelo lineal

- Existencia: $a_i \leq t_i \leq d_i$, $\forall i$
- Segmento: $x_i - pi = v_i(a_i - t_i)$, $\forall i$
- Alcance: $-U(t_i - t_{i-1}) \leq x_i - x_{i-1} \leq U(t_i - t_{i-1})$, $i = 1 \dots n \quad \forall i$
- Orden: $t_{i-1} \leq t_i$, $\forall i$
- Posición inicial: $t_0 = 0, x_0 = 0$
- No negatividad: $t_i \geq 0$, x_i libre $\forall i$

Modelo para minimizar el tiempo de captura

min $z = t_n$
sujeto a:

$$a_i \leq t_i \leq d_i\ , \quad \forall i$$
$$(U + v_i)t_i - (U + v_{i-1})t_{i-1} \geq a_i v_i - a_{i-1}v_{i-1} - p_i + p_{i-1} \quad \forall i$$
$$(U - v_i)t_i - (U - v_{i-1})t_{i-1} \geq -a_i v_i + a_{i-1}v_{i-1} + p_i - p_{i-1} \quad \forall i$$
$$t_0 = 0,$$
$$t_i \geq 0, \quad \forall i$$

Nota: Este modelo se puede resolver en tiempo lineal.

Modelo para minimizar la distancia total recorrida

min $z = \sum_{i=1}^{n} r_i$
sujeto a:

$$a_i \leq \frac{x_i + a_i v_i - p_i}{v_i} \leq d_i \ \forall i$$
$$|x_i - x_{i-1}| \leq r_i \ \forall i$$
$$|x_i - x_{i-1}| \leq U\left(\frac{x_i + a_i v_i - p_i}{v_i} - \frac{x_{i-1} + a_{i-1}v_{i-1} - p_{i-1}}{v_{i-1}}\right) \quad \forall i$$
$$x_0 - U\left(\frac{x_1 + a_1 v_1 - p_1}{v_1}\right) \leq x_1 \leq x_0 + U\left(\frac{x_1 + a_1 v_1 - p_1}{v_1}\right)$$
$$x_0 = 0$$
$$r_i \geq 0,\ x_i \ \ \textit{libre}\ , \forall i$$

Referencias

- C.S. Helving, et.al. *The moving target traveling salesman problem.* Journal of Algorithms,49(1):153–174,2003.
- Y. Asahiro, et.al *How to collect balls moving in the Euclidean plane* Discrete Applied Mathematics,154:2274-2262,2006.
- Q. Jiang, R. Sarker *Tracking moving targets and the non-stationary traveling salesman problem* Complexity International,171–179,2006.