

# Configuraciones de puntos, Conjuntos dominantes y Palabras Lyndon

Marcelino Ramírez-Ibáñez<sup>§</sup>   Criel Merino<sup>†</sup>   José Luis Juárez<sup>§</sup>

<sup>§</sup>Instituto de Agroindustrias, Universidad del Papaloapan

<sup>†</sup>Instituto de Matemáticas UNAM,  
sede Oaxaca

XXVIII Coloquio Victor Neumann-Lara de Teoría de las  
Gráficas, Combinatoria y sus Aplicaciones

## Definición

*El conjunto de todos los monomios de grado  $r$  sobre  $x_0, x_1, \dots, x_{d-1}$  variables es un COPO (Conjunto Parcialmente Ordenado) con la relación de divisibilidad.*

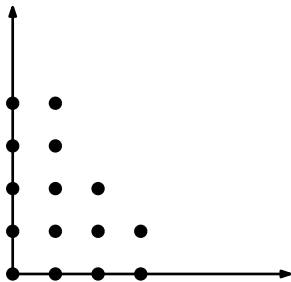
## Definición

*El conjunto de todos los monomios de grado  $r$  sobre  $x_0, x_1, \dots, x_{d-1}$  variables es un COPO (Conjunto Parcialmente Ordenado) con la relación de divisibilidad. Un multicomplejo  $\mathcal{M}$  en este copo es un subconjunto de monomios el cual es cerrado bajo divisibilidad.*

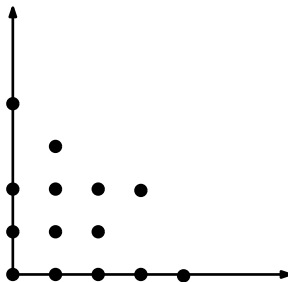
## Definición

*El conjunto de todos los monomios de grado  $r$  sobre  $x_0, x_1, \dots, x_{d-1}$  variables es un COPO (Conjunto Parcialmente Ordenado) con la relación de divisibilidad. Un multicomplejo  $\mathcal{M}$  en este copo es un subconjunto de monomios el cual es cerrado bajo divisibilidad. Si todos los elementos maximales de  $\mathcal{M}$  tienen el mismo grado, decimos que  $\mathcal{M}$  es puro.*

# Ejemplo

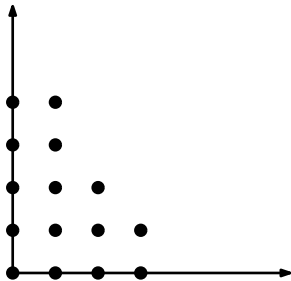


Si es multicomplejo

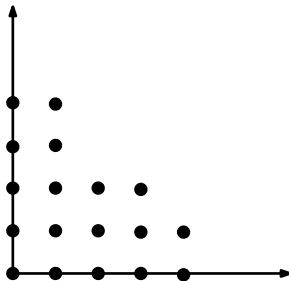


No es multicomplejo

# Ejemplo

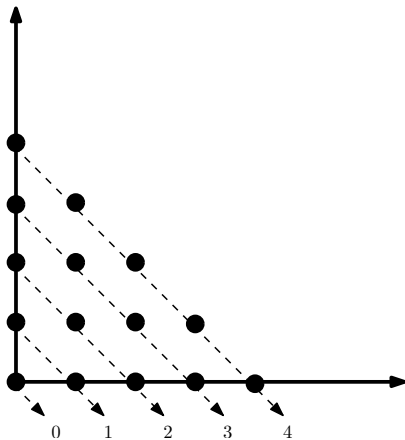


No es puro

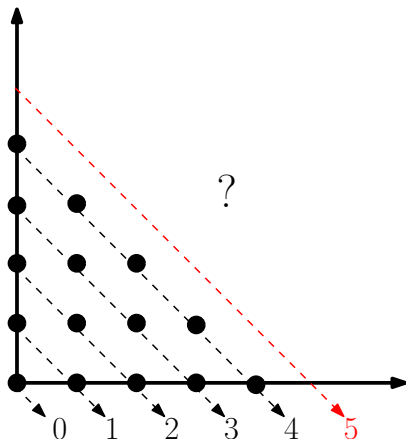


Si es puro

# Una pregunta sencilla en $\mathbb{Z}_+^2$

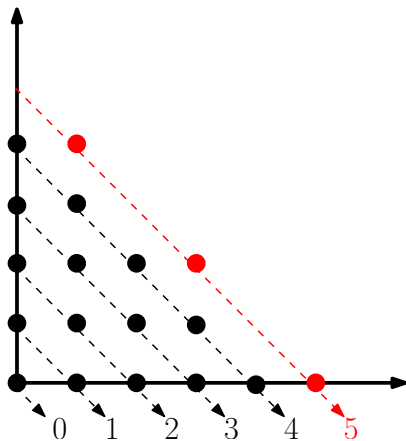


# Una pregunta sencilla en $\mathbb{Z}_+^2$

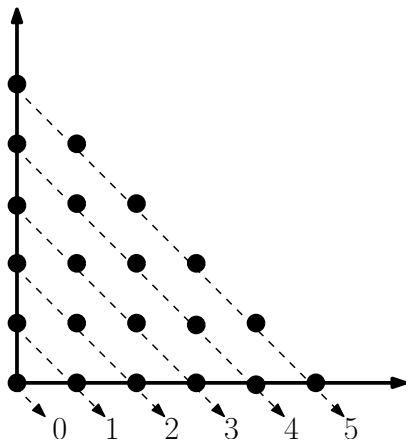




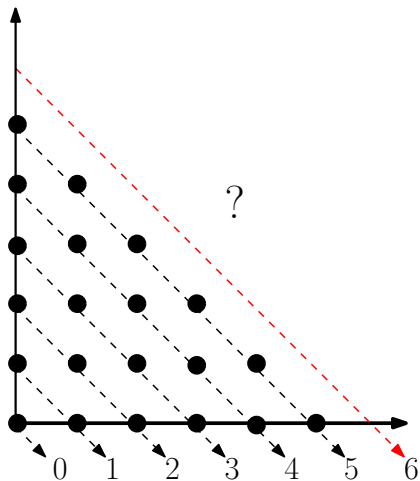
# Una pregunta sencilla en $\mathbb{Z}_+^2$



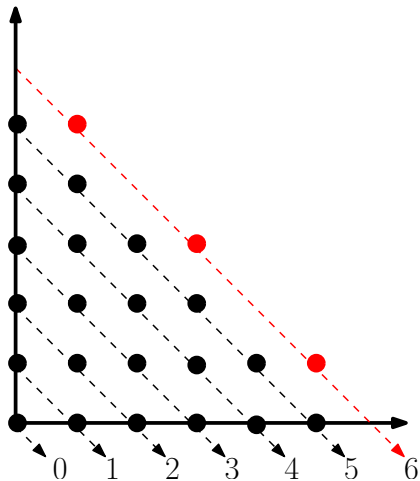
# Una pregunta sencilla en $\mathbb{Z}_+^2$



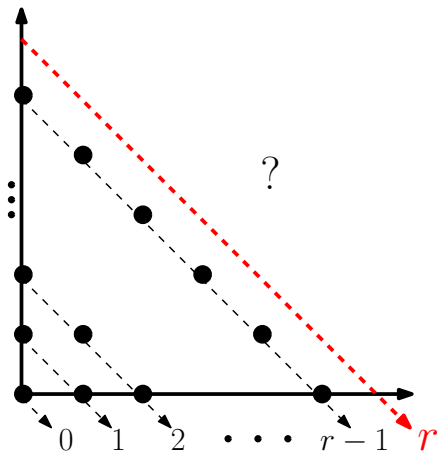
# Una pregunta sencilla en $\mathbb{Z}_+^2$



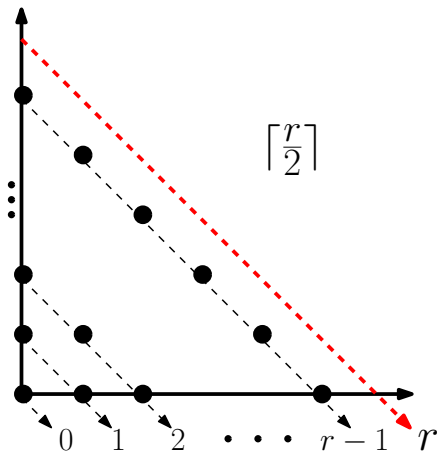
# Una pregunta sencilla en $\mathbb{Z}_+^2$



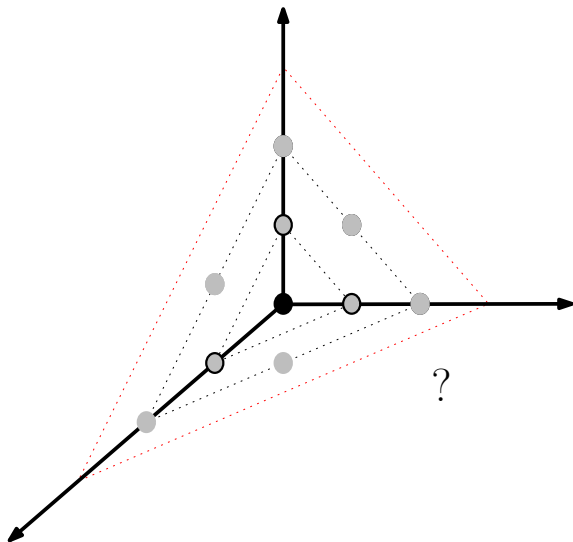
# Una pregunta sencilla en $\mathbb{Z}_+^2$



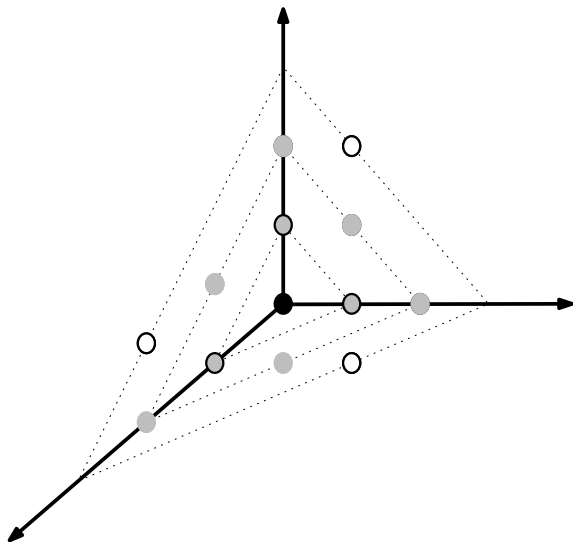
# Una pregunta sencilla en $\mathbb{Z}_+^2$



# Misma pregunta en $\mathbb{Z}_+^3$



# Misma pregunta en $\mathbb{Z}_+^3$





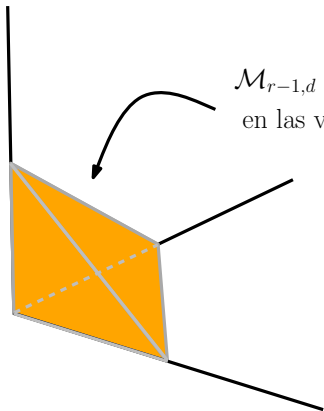
Asociado a  $\mathcal{M}$  (puro) tenemos la sucesión  $(h_0, h_1, \dots, h_d)$ , donde  $h_i$  es el número de monomios de grado  $i$ . A esta sucesión la llamaremos O-sucesión (pura).

En particular, si hacemos

$$h_k = \binom{d+k-1}{k}, \quad 0 \leq k \leq r-1$$

Esta expresión corresponde a todos los monomios en  $d$  variables con grado  $k$ , para  $0 \leq k \leq r-1$ .

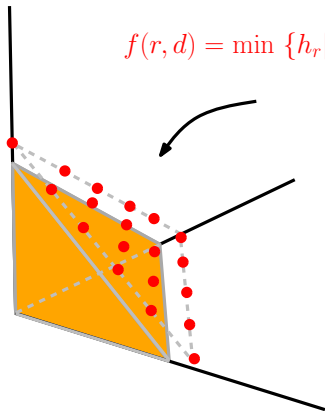
# La función $f(r, d)$



$\mathcal{M}_{r-1, d}$  multicomplejo generado por monomios en las variables  $x_0, x_1, \dots, x_{d-1}$  de grado  $r - 1$ .

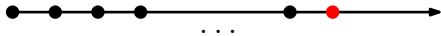
# La función $f(r, d)$

$f(r, d) = \min \{h_r | (h_0, h_1, \dots, h_{r-1}, h_r) \text{ es la O-sucesión pura de } \mathcal{M} \supset \mathcal{M}_{r-1,d}\}$

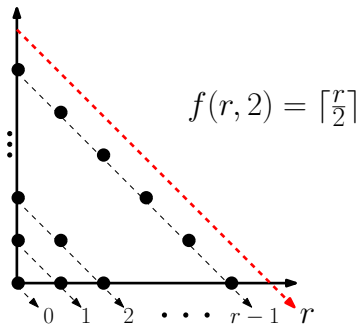


# La función $f(r, d)$

$$f(r, 1) = f(1, d) = 1$$



# La función $f(r, d)$

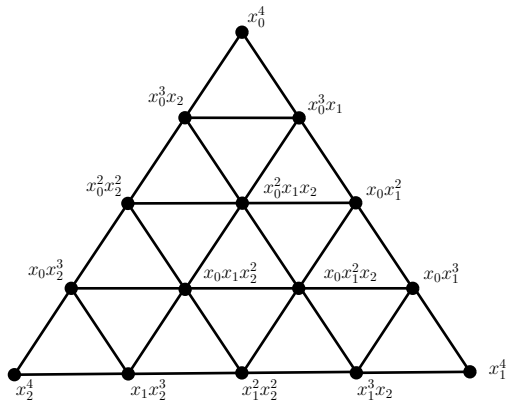


## La gráfica $G_{r,d}$

La gráfica  $G_{r,d}$  tiene como vértices a los monomios de grado  $r$  en  $d$  variables, el par  $\{m, m'\}$  es una arista de  $G_{r,d}$  si y sólo si existen variables  $x, y$  distintas tales que  $m' = \frac{m}{x}y$ .

# La gráfica $G_{r,d}$

La gráfica  $G_{r,d}$  tiene como vértices a los monomios de grado  $r$  en  $d$  variables, el par  $\{m, m'\}$  es una arista de  $G_{r,d}$  si y sólo si existen variables  $x, y$  distintas tales que  $m' = \frac{m}{x}y$ .



La gráfica  $TG_{r,d}$  tiene como vértices a todos los monomios de grado  $r$  y  $r - 1$  en  $d$  variables, el par  $\{m, m'\}$  es una arista de  $TG_{r,d}$  si y solo si existen variables  $x, y$  distintas, tales que  $m' = \frac{m}{x}y$  o existe una variable  $x$  tal que  $m' = \frac{m}{x}$ .



La gráfica  $TG_{r,d}$  tiene como vértices a todos los monomios de grado  $r$  y  $r - 1$  en  $d$  variables, el par  $\{m, m'\}$  es una arista de  $TG_{r,d}$  si y solo si existen variables  $x, y$  distintas, tales que  $m' = \frac{m}{x}y$  o existe una variable  $x$  tal que  $m' = \frac{m}{x}$ .

## Observación

*Encontrar  $f(r, d)$  puede ser trasladado a encontrar un conjunto de vértices de  $TG_{r,d}$  de tamaño mínimo que domine a los vértices de  $G_{r-1,d}$ .*

## Coloración estándar

Definimos la coloración estándar  $\varrho_d$  de  $G_{r,d}$  de la siguiente manera. Sean  $\{x_0, x_1, \dots, x_{d-1}\}$  las  $d$  variables, a cada variable  $x_i$  le asignamos el color  $\varrho_d(x_i) = i \bmod d$ .

## Coloración estándar

Definimos la coloración estándar  $\varrho_d$  de  $G_{r,d}$  de la siguiente manera. Sean  $\{x_0, x_1, \dots, x_{d-1}\}$  las  $d$  variables, a cada variable  $x_i$  le asignamos el color  $\varrho_d(x_i) = i \bmod d$ . Al monomio  $x_0^{t_0} x_1^{t_1} \cdots x_{d-1}^{t_{d-1}}$  le asignamos  $\varrho_d(m) = 0t_0 + 1t_1 + \cdots + (d-1)t_{d-1} \bmod d$ .

# Coloración estándar

Definimos la coloración estándar  $\varrho_d$  de  $G_{r,d}$  de la siguiente manera. Sean  $\{x_0, x_1, \dots, x_{d-1}\}$  las  $d$  variables, a cada variable  $x_i$  le asignamos el color  $\varrho_d(x_i) = i \bmod d$ . Al monomio  $x_0^{t_0} x_1^{t_1} \dots x_{d-1}^{t_{d-1}}$  le asignamos  $\varrho_d(m) = 0t_0 + 1t_1 + \dots + (d-1)t_{d-1} \bmod d$ .

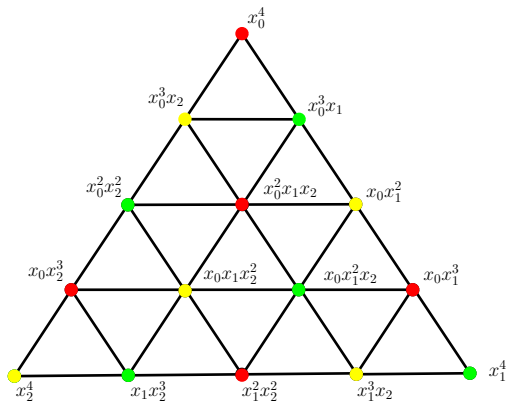


Figura: Coloración estándar de  $G_{4,3}$

Lema

*La coloración estándar  $\varrho_d$  es propia y  $\chi(G_{r,d}) \leq d$ .*

## Lema

*La coloración estándar  $\varrho_d$  es propia y  $\chi(G_{r,d}) \leq d$ .*

## Proposición

*El número cromático  $\chi(G_{r,d})$  coincide con  $\omega(G_{r,d})$ , el clan más pequeño contenido en  $G_{r,d}$  y ambos son igual a  $d$*

## Lema

*La coloración estándar  $\varrho_d$  es propia y  $\chi(G_{r,d}) \leq d$ .*

## Proposición

*El número cromático  $\chi(G_{r,d})$  coincide con  $\omega(G_{r,d})$ , el clan más pequeño contenido en  $G_{r,d}$  y ambos son igual a  $d$*

## Demostración

*$\omega(G_{r,d}) \geq d$ , como para toda gráfica  $\omega(G_{r,d}) \leq \chi(G_{r,d})$*

## Lema

*La coloración estándar  $\varrho_d$  es propia y  $\chi(G_{r,d}) \leq d$ .*

## Proposición

*El número cromático  $\chi(G_{r,d})$  coincide con  $\omega(G_{r,d})$ , el clan más pequeño contenido en  $G_{r,d}$  y ambos son igual a  $d$*

## Demostración

*$\omega(G_{r,d}) \geq d$ , como para toda gráfica  $\omega(G_{r,d}) \leq \chi(G_{r,d})$*



## Observación

*Cualquier monomio de  $G_{r,d}$  esta en tantos clanes de tamaño  $d$  como variables aparezcan en dicho monomio. Si  $x_i$  es tal que  $x_i | m$ , entonces  $\{\frac{m}{x}x_0, \frac{m}{x}x_1, \dots, \frac{m}{x}x_{d-1}\}$  es un clan.*

## Observación

*Cualquier monomio de  $G_{r,d}$  esta en tantos clanes de tamaño  $d$  como variables aparezcan en dicho monomio. Si  $x_i$  es tal que  $x_i \mid m$ , entonces  $\{\frac{m}{x}x_0, \frac{m}{x}x_1, \dots, \frac{m}{x}x_{d-1}\}$  es un clan. Por tanto cualquier clase-color domina a los vértices  $V(G_{r,d})$  de  $G_{r,d}$  y a los vértices  $V(G_{r-1,d})$  de  $TG_{r,d}$ .*

Definimos la función  $\bar{f}(r, d)$  como la cardinalidad mínima sobre todas las clase-color en la coloración  $\varrho_d$  de  $G_{r,d}$ .

Definimos la función  $\bar{f}(r, d)$  como la cardinalidad mínima sobre todas las clase-color en la coloración  $\varrho_d$  de  $G_{r,d}$ .

## Proposición

*Para todo  $r, d \geq 1$  enteros,  $f(r, d) \leq \bar{f}(r, d)$ .*

# La clase cromática más pequeña

Definimos la función  $\bar{f}(r, d)$  como la cardinalidad mínima sobre todas las clase-color en la coloración  $\varrho_d$  de  $G_{r,d}$ .

## Proposición

*Para todo  $r, d \geq 1$  enteros,  $f(r, d) \leq \bar{f}(r, d)$ .*

## Conjetura

$f(r, d) = \bar{f}(r, d) = L_2(r + d, r)$ .

Collares binarios son sucesiones de 0's y 1's, donde dos sucesiones son equivalentes si una se obtiene por rotación de la otra. Los collares de longitud  $n$  son las órbitas de la acción de  $C_n$  en las sucesiones de 0's y 1's.

# Collares aperiódicos

Collares binarios son sucesiones de 0's y 1's, donde dos sucesiones son equivalentes si una se obtiene por rotación de la otra. Los collares de longitud  $n$  son las órbitas de la acción de  $C_n$  en las sucesiones de 0's y 1's.

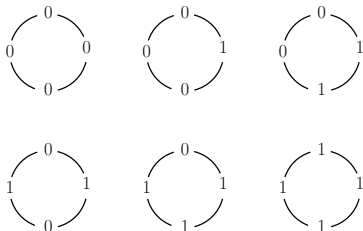


Figura: Collares de longitud 4

Un collar es aperiódico si su órbita tiene tamaño  $n$ .

El número de collares aperiódicos de longitud  $n = r + d$  con densidad  $r$ , es decir con  $r$  1's, es

$$L_2(r, d) = \frac{1}{n} \sum_{k|(r,d)} \mu(k) \binom{n/k}{r/k}.$$

con  $\mu$  la función de Möbius.



## Observación

si  $m = x_0^{t_0} x_1^{t_1} \cdots x_{d-1}^{t_{d-1}}$  es un vértice de  $G_{r,d}$  le podemos asociar el collar  $a_m = B_{t_0} B_{t_1} \cdots B_{t_{d-1}}$ , donde  $B_{t_i}$  es un 0 seguido de  $t_i$  1.

## Observación

si  $m = x_0^{t_0} x_1^{t_1} \cdots x_{d-1}^{t_{d-1}}$  es un vértice de  $G_{r,d}$  le podemos asociar el collar  $a_m = B_{t_0} B_{t_1} \cdots B_{t_{d-1}}$ , donde  $B_{t_i}$  es un 0 seguido de  $t_i$  1.  
Conversamente, si  $a = B_{t_0} B_{t_1} \cdots B_{t_{d-1}}$  es un collar de longitud  $n$  y densidad  $r$ , le podemos asociar el vértice  $m_a = x_0^{t_0} x_1^{t_1} \cdots x_{d-1}^{t_{d-1}}$  de  $G_{r,d}$ .

## Acción de $C_d$ en $G_{r,d}$ .

Sea  $C_d$  un grupo cíclico generado por  $\sigma$ ,  $C_d = \langle \sigma \rangle$ .  $C_d$  actúa en los vértices de  $G_{r,d}$  de la siguiente forma

$$\sigma(x_0^{t_0} x_1^{t_1} \cdots x_{d-1}^{t_{d-1}}) = x_1^{t_0} x_2^{t_1} \cdots x_{d-1}^{t_{d-2}} x_0^{t_{d-1}}.$$

## Acción de $C_d$ en $G_{r,d}$ .

Sea  $C_d$  un grupo cíclico generado por  $\sigma$ ,  $C_d = \langle \sigma \rangle$ .  $C_d$  actúa en los vértices de  $G_{r,d}$  de la siguiente forma

$$\sigma(x_0^{t_0} x_1^{t_1} \cdots x_{d-1}^{t_{d-1}}) = x_1^{t_0} x_2^{t_1} \cdots x_{d-1}^{t_{d-2}} x_0^{t_{d-1}}.$$

Sea  $k$  entero, tal que  $\sigma^{\frac{d}{k}}(m) = m$ .  $a_m$  se debe partir en  $k$  bloques, cada uno de longitud  $\frac{d}{k}$ , es decir

## Acción de $C_d$ en $G_{r,d}$ .

Sea  $C_d$  un grupo cíclico generado por  $\sigma$ ,  $C_d = \langle \sigma \rangle$ .  $C_d$  actúa en los vértices de  $G_{r,d}$  de la siguiente forma

$$\sigma(x_0^{t_0} x_1^{t_1} \cdots x_{d-1}^{t_{d-1}}) = x_1^{t_0} x_2^{t_1} \cdots x_{d-1}^{t_{d-2}} x_0^{t_{d-1}}.$$

Sea  $k$  entero, tal que  $\sigma^{\frac{d}{k}}(m) = m$ .  $a_m$  se debe partir en  $k$  bloques, cada uno de longitud  $\frac{d}{k}$ , es decir

$$a_m = \underbrace{B_{t_0} B_{t_1} \cdots B_{t_{\frac{d}{k}-1}}}_1 \underbrace{B_{t_0} B_{t_1} \cdots B_{t_{\frac{d}{k}-1}}}_2 \underbrace{\cdots}_{\dots} \underbrace{B_{t_0} B_{t_1} \cdots B_{t_{\frac{d}{k}-1}}}_k,$$

## Acción de $C_d$ en $G_{r,d}$ .

Sea  $C_d$  un grupo cíclico generado por  $\sigma$ ,  $C_d = \langle \sigma \rangle$ .  $C_d$  actúa en los vértices de  $G_{r,d}$  de la siguiente forma

$$\sigma(x_0^{t_0} x_1^{t_1} \cdots x_{d-1}^{t_{d-1}}) = x_1^{t_0} x_2^{t_1} \cdots x_{d-1}^{t_{d-2}} x_0^{t_{d-1}}.$$

Sea  $k$  entero, tal que  $\sigma^{\frac{d}{k}}(m) = m$ .  $a_m$  se debe partir en  $k$  bloques, cada uno de longitud  $\frac{d}{k}$ , es decir

$$a_m = \underbrace{B_{t_0} B_{t_1} \cdots B_{t_{\frac{d}{k}-1}}}_{1} \underbrace{B_{t_0} B_{t_1} \cdots B_{t_{\frac{d}{k}-1}}}_{2} \underbrace{\cdots}_{\dots} \underbrace{B_{t_0} B_{t_1} \cdots B_{t_{\frac{d}{k}-1}}}_{k},$$

### Proposición

Denotemos a  $\mathcal{O}_{\frac{d}{k}} = \{m \in V(G_{r,d}) : \sigma^{\frac{d}{k}}(m) = m\}$ , se cumple

$$V(G_{r,d}) = \bigcup_{k|(r,d)} \mathcal{O}_{\frac{d}{k}}. \quad (1)$$

Una *palabra Lyndon* es una palabra primitiva que es minimal en su clase de conjugación. Al conjunto de palabras Lyndon lo denotamos por  $L$ .

Una *palabra Lyndon* es una palabra primitiva que es minimal en su clase de conjugación. Al conjunto de palabras Lyndon lo denotamos por  $L$ .

Por ejemplo para  $A = \{0, 1\}$  y  $0 < 1$ , la lista de las primeras palabras Lyndon son

$$L = \{0, 1, 01, 001, 011, 0001, 0011, 0111, 00001, 00011, 00101, \dots\}$$



Una *palabra Lyndon* es una palabra primitiva que es minimal en su clase de conjugación. Al conjunto de palabras Lyndon lo denotamos por  $L$ .

Por ejemplo para  $A = \{0, 1\}$  y  $0 < 1$ , la lista de las primeras palabras Lyndon son

$$L = \{0, 1, 01, 001, 011, 0001, 0011, 0111, 00001, 00011, 00101, \dots\}$$

## Teorema (Lyndon)

*Toda palabra  $w \in A^+$  puede escribirse de manera única como un producto no creciente de palabras Lyndon:*

$$w = l_1 l_2 \cdots l_n, \quad l_i \in L \quad l_1 \geq l_2 \geq \cdots \geq l_n.$$

## Teorema

$$\binom{d+r-1}{r} = \sum_{k|(d,r)} \frac{d}{k} L_2\left(\frac{r+d}{k}, \frac{r}{k}\right) \quad (2)$$

## Teorema

$$\binom{d+r-1}{r} = \sum_{k|(d,r)} \frac{d}{k} L_2\left(\frac{r+d}{k}, \frac{r}{k}\right) \quad (2)$$

## Demostración

Sean  $k$  entero tal que  $k|(r, d)$  y  $m = x_0^{t_0} \cdots x_{d-1}^{t_{d-1}} \in \mathcal{O}_{\frac{d}{k}}$ . Existe  $x \in \{0, 1\}^*$  primitiva con la propiedad de que el collar  $a_m = B_{t_0} \cdots B_{t_{d-1}} \in x^*$ , esta  $x$  no es otra mas que  $x = B_{t_0} \cdots B_{t_{\frac{d}{k}-1}}$ . Sea  $l_m$  la palabra Lyndon que representa a la clase de conjugación de  $x$ , luego  $a_m \in l_m^*$  y  $l_m$  es un collar aperiódico de longitud  $d/k + r/k$  y densidad  $r/k$ . Se sigue

$$|\mathcal{O}_{\frac{d}{k}}| = \frac{d}{k} \cdot L_2\left(\frac{r+d}{k}, \frac{r}{k}\right).$$

De la ecuación 1, se sigue el resultado.

## Proposición

Sea  $m = x_0^{t_0} x_1^{t_1} \cdots x_{d-1}^{t_{d-1}}$  un vértice de  $G_{r,d}$ , entonces

$$\varrho_d(\sigma(m)) - \varrho_d(m) \equiv r \pmod{d}.$$

## Proposición

Sea  $m = x_0^{t_0} x_1^{t_1} \cdots x_{d-1}^{t_{d-1}}$  un vértice de  $G_{r,d}$ , entonces  $\varrho_d(\sigma(m)) - \varrho_d(m) \equiv r \pmod{d}$ .

## Corolario

Las órbitas de tamaño  $d$  se pintan con  $\frac{d}{(r,d)}$  colores.

## Proposición

Sea  $m = x_0^{t_0} x_1^{t_1} \cdots x_{d-1}^{t_{d-1}}$  un vértice de  $G_{r,d}$ , entonces  $\varrho_d(\sigma(m)) - \varrho_d(m) \equiv r \pmod{d}$ .

## Corolario

Las órbitas de tamaño  $d$  se pintan con  $\frac{d}{(r,d)}$  colores.

## Corolario

Si  $(r, d) = 1$ , entonces  $\bar{f}(r, d) = L_2(r + d, r)$ .

## Proposición

Sea  $m = x_0^{t_0} x_1^{t_1} \cdots x_{d-1}^{t_{d-1}}$  un vértice de  $G_{r,d}$ , entonces  $\varrho_d(\sigma(m)) - \varrho_d(m) \equiv r \pmod{d}$ .

## Corolario

Las órbitas de tamaño  $d$  se pintan con  $\frac{d}{(r,d)}$  colores.

## Corolario

Si  $(r, d) = 1$ , entonces  $\bar{f}(r, d) = L_2(r + d, r)$ .

## Demostración

$(r, d) = 1$ . De (2), solo se tienen órbitas de tamaño  $d$  y cada una de ellas se colorea con  $d$  colores.

## Algunos otros valores de $r$ y $d$

Tenemos resultados para otros valores pero....



Tenemos resultados para otros valores pero....

- Tristram Bogart, Universidad de los Andes.

Tenemos resultados para otros valores pero....

- Tristram Bogart, Universidad de los Andes.
- Elashvili, Jibladze, and Pataraiia, Combinatorics of Necklaces and Hermite Reciprocity, *Journal of Algebraic Combinatorics*, 10 (1999), 173-188.

## Algunos otros valores de $r$ y $d$

Tenemos resultados para otros valores pero....

- Tristram Bogart, Universidad de los Andes.
- Elashvili, Jibladze, and Pataraiia, Combinatorics of Necklaces and Hermite Reciprocity, *Journal of Algebraic Combinatorics*, 10 (1999), 173-188.

### Teorema

$$\bar{f}(r, d) = L_2(r + d, r)$$

# Algunos otros valores de $r$ y $d$

Tenemos resultados para otros valores pero....

- Tristram Bogart, Universidad de los Andes.
- Elashvili, Jibladze, and Pataraiia, Combinatorics of Necklaces and Hermite Reciprocity, *Journal of Algebraic Combinatorics*, 10 (1999), 173-188.

## Teorema

$$\bar{f}(r, d) = L_2(r + d, r)$$

## Corolario

$$\bar{f}(r, d) = \bar{f}(d, r)$$

Se ha demostrado que la función  $f(r, d) = \bar{f}(r, d)$  para  $d = 1, 2, 3$  con  $r \geq 1$ , para  $d = 4$  con  $1 \leq r \leq 6$ .

Se ha demostrado que la función  $f(r, d) = \bar{f}(r, d)$  para  $d = 1, 2, 3$  con  $r \geq 1$ , para  $d = 4$  con  $1 \leq r \leq 6$ .

### Conjetura

$$f(r, d) = \bar{f}(r, d)$$

Ahí te vamos...

Gracias