Problemas del tipo Erdos-Sekeres en el plano

Buscando una solución a una conjetura de Bárány-Károliy

E. Miguel Jiménez Rosas

Facultad de Ciencias, UNAM

8 de marzo de 2013

Origen del problema

Workshop on Discrete and Computational Geometry, 2012

Pregunta

¿Todo conjunto bicromático (tantos rojos como azules) lo suficientemente grande contiene un cuadrilátero monocromático vacío?

Origen del problema

Workshop on Discrete and Computational Geometry, 2012

Pregunta

¿Todo conjunto bicromático (tantos rojos como azules) lo suficientemente grande contiene un cuadrilátero monocromático vacío?

Respuesta

Verdadero: La cota mínima encontrada es de 5044 puntos (Oswin Aichholzer y otros en 2010)

Origen del problema

Workshop on Discrete and Computational Geometry, 2012

Pregunta

¿Todo conjunto bicromático (tantos rojos como azules) lo suficientemente grande contiene un cuadrilátero monocromático vacío?

Respuesta

Verdadero: La cota mínima encontrada es de 5044 puntos (Oswin Aichholzer y otros en 2010)

Pregunta

¿La cota puede ser reducida a 20 puntos?

Origen del problema

Workshop on Discrete and Computational Geometry, 2012

Pregunta

¿Todo conjunto bicromático (tantos rojos como azules) lo suficientemente grande contiene un cuadrilátero monocromático vacío?

Respuesta

Verdadero: La cota mínima encontrada es de 5044 puntos (Oswin Aichholzer y otros en 2010)

Pregunta

¿La cota puede ser reducida a 20 puntos?

Respuesta

Ni idea

Los alumnos copiones

- Eres el profesor de una clase y ha llegado el día del examen.

Los alumnos copiones

- Eres el profesor de una clase y ha llegado el día del examen.
- Entras al salón y los alumnos han organizado los asientos a su antojo, nada puedes hacer contra eso.

Los alumnos copiones

- Eres el profesor de una clase y ha llegado el día del examen.
- Entras al salón y los alumnos han organizado los asientos a su antojo, nada puedes hacer contra eso.
- Tomas tu lugar, en principio dejando una línea recta que te separa del grupo.

Los alumnos copiones

- Eres el profesor de una clase y ha llegado el día del examen.
- Entras al salón y los alumnos han organizado los asientos a su antojo, nada puedes hacer contra eso.
- Tomas tu lugar, en principio dejando una línea recta que te separa del grupo.
- El examen es individual, si ves a dos alumnos copiando tendrás que reportarlos.

Los alumnos copiones

- Eres el profesor de una clase y ha llegado el día del examen.
- Entras al salón y los alumnos han organizado los asientos a su antojo, nada puedes hacer contra eso.
- Tomas tu lugar, en principio dejando una línea recta que te separa del grupo.
- El examen es individual, si ves a dos alumnos copiando tendrás que reportarlos.
- No tienes visión de rayos X, puedes notar dos alumnos copiando si puedes ver su "línea de comunicación", es decir, si no hay un alumno que obstruya.

Def. Arista visible

Sea P un conjunto de n puntos en el plano, $p_1, p_2 \in P$, y q otro punto cualquiera. Diremos que $\overline{p_1 p_2}$ es una arista *visible* para q si el triángulo $\triangle q p_1 p_2$ no tiene puntos de P en su interior.

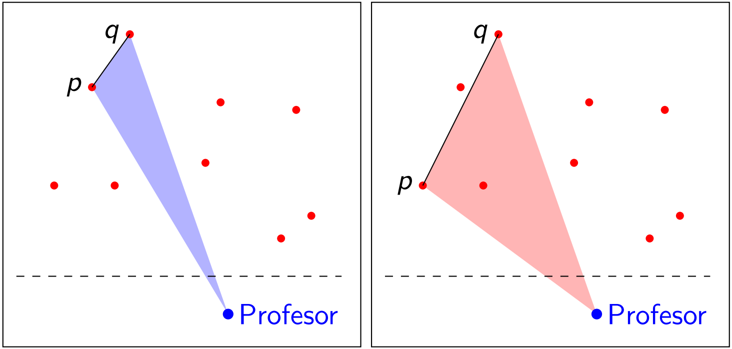

Figura: A la izquierda una arista visible, a la derecha una no visible.

Pregunta

¿Cuántas líneas de comunicación ves?

Los alumnos copiones

Pregunta

¿Cuántas líneas de comunicación ves?

Respuesta

Por lo menos $n - 1$

Los alumnos copiones

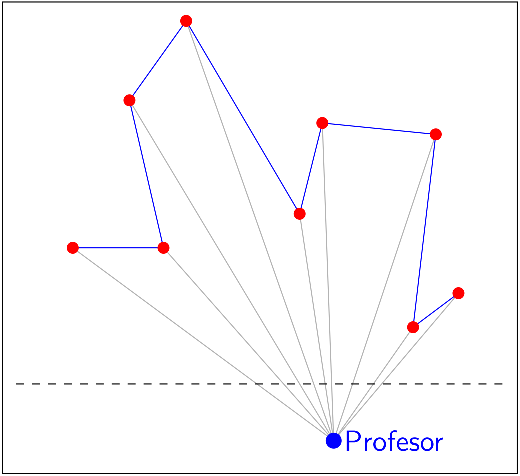

Figura: Una configuración cualquiera, se ven por lo menos $n-1$ aristas.

Pregunta

¿Podrías ver todas las aristas?

Los alumnos copiones

Pregunta

¿Podrías ver todas las aristas?

Respuesta

Sí, si los alumnos y el profesor estuvieran en posición convexa.

Los alumnos copiones

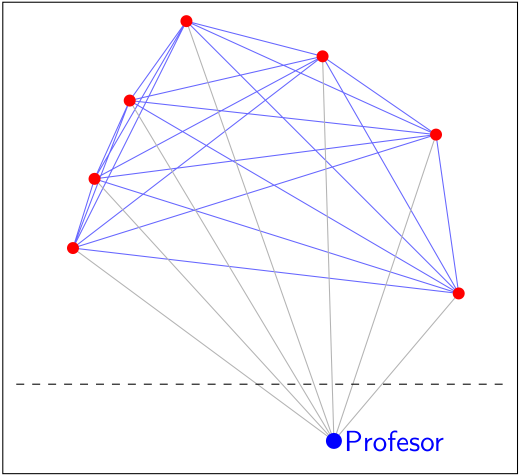

Figura: Una configuración en la que se ven todas las aristas.

Los alumnos copiones

- Terminó el examen y tienes la lista de los alumnos copiones.

Los alumnos copiones

- Terminó el examen y tienes la lista de los alumnos copiones.
- Corres a denunciarlos con el director, pero resulta que tienen muy buenos abogados y exigen un testigo.

Los alumnos copiones

- Terminó el examen y tienes la lista de los alumnos copiones.
- Corres a denunciarlos con el director, pero resulta que tienen muy buenos abogados y exigen un testigo.
- Los alumnos no se delatan entre sí.

Los alumnos copiones

- Terminó el examen y tienes la lista de los alumnos copiones.
- Corres a denunciarlos con el director, pero resulta que tienen muy buenos abogados y exigen un testigo.
- Los alumnos no se delatan entre sí.
- Decides tomar medidas más drásticas y para el siguiente examen pides a un amigo que te ayude como testigo.

Los alumnos copiones

Def. Arista compartida

Sea P un conjunto de n puntos en el plano, $p_1, p_2 \in P$, y q_1, q_2 dos puntos cualesquiera. Diremos que $\overline{q_1 q_2}$ es *compartida* para q_1 y q_2 si la arista es visible para ambos puntos.

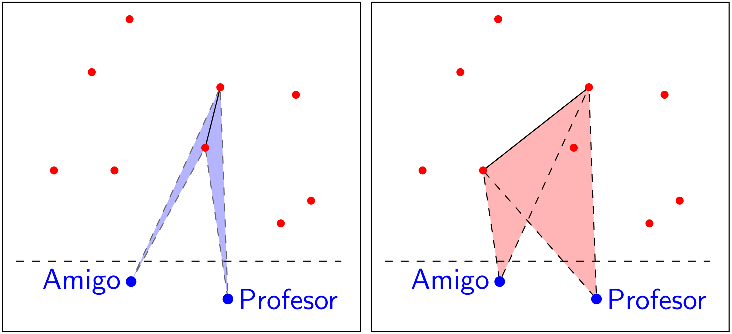

Figura: A la izquierda, arista que comparten Amigo y Profesor. A la derecha, Amigo ve la arista pero el Profesor no.

Los alumnos copiones

Pregunta

¿Hay garantía de que tú y tu amigo compartan alguna línea de comunicación?

Los alumnos copiones

Pregunta

¿Hay garantía de que tú y tu amigo compartan alguna línea de comunicación?

Pregunta

Si tal fuera el caso ¿Cuál es el mínimo número de aristas que comparten?

Pregunta

¿Por qué es interesante el problema?

Pregunta

¿Por qué es interesante el problema?

- El Dr. Jorge Urrutia lo analizó y descubrió la relación con un problema que ha estudiado por hace varios años, conocido localmente como “La conjetura de Bárány-Károlyi”.

Motivación

Conjetura Bárány-Károlyi

Dado un conjunto P de n puntos en el plano. Es posible encontrar un par de puntos $p, q \in P$ tales que el número de triángulos vacíos, con p, q y algún otro $r \in P$ como vértices, sea superconstante.

- Hay una arista que es compartida por un número superconstante de puntos en P.

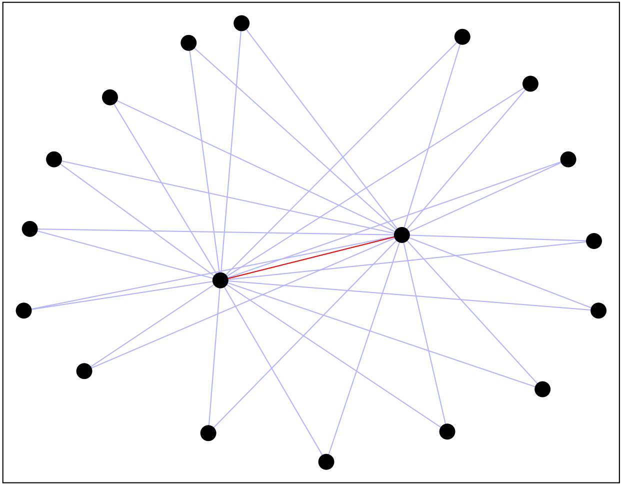

Figura: Una arista que está en $n-2$ triángulos vacíos.

Motivación

- Sea P un conjunto de n puntos.

Motivación

- Sea P un conjunto de n puntos.
- Si cualquier par de puntos en P comparten un número superconstante de aristas.

- Sea P un conjunto de n puntos.
- Si cualquier par de puntos en P comparten un número superconstante de aristas.
- Entonces P cumple la conjetura de Bárány-Károlyi.

Motivación

- Llamaremos $\mathcal{W}_P$ al conjunto de ternas (p, q, a) tales que $p, q \in P$ y a es una arista, con sus vértices en P, tal que es compartida para p y q.

- Llamaremos $\mathcal{W}_P$ al conjunto de ternas (p, q, a) tales que $p, q \in P$ y a es una arista, con sus vértices en P, tal que es compartida para p y q.
- Digamos que P es un conjunto en el cual, cada par de puntos comparte al menos $f(n)$ aristas, siendo f una función divergente.

Motivación

- $|\mathcal{W}_P| \geq \binom{n}{2} f(n)$.

- $|\mathcal{W}_P| \geq \binom{n}{2} f(n)$.
- Supongamos que la conjetura es falsa para P, es decir que una constante c es el máximo número de puntos que ven una misma arista.

- $|\mathcal{W}_P| \geq \binom{n}{2} f(n)$.
- Supongamos que la conjetura es falsa para P, es decir que una constante c es el máximo número de puntos que ven una misma arista.
- Ninguna arista podría ser compartida por más de $\binom{c}{2}$ pares distintos de puntos.

Motivación

- $|\mathcal{W}_P| \geq \binom{n}{2} f(n)$.
- Supongamos que la conjetura es falsa para P, es decir que una constante c es el máximo número de puntos que ven una misma arista.
- Ninguna arista podría ser compartida por más de $\binom{c}{2}$ pares distintos de puntos.
- $|\mathcal{W}_P| \leq \binom{n}{2}\binom{c}{2}$.

Motivación

- $|\mathcal{W}_P| \geq \binom{n}{2} f(n)$.
- Supongamos que la conjetura es falsa para P, es decir que una constante c es el máximo número de puntos que ven una misma arista.
- Ninguna arista podría ser compartida por más de $\binom{c}{2}$ pares distintos de puntos.
- $|\mathcal{W}_P| \leq \binom{n}{2}\binom{c}{2}$.
- $\binom{n}{2} f(n) \leq |\mathcal{W}_P| \leq \binom{n}{2}\binom{c}{2}$. Lo cual, para n lo suficientemente grande, es imposible. ¡Contradicción!

Solución

Pregunta

¿Hay garantía de que tú y tu amigo compartan alguna línea de comunicación?

Respuesta

Compartirán por lo menos una arista.

- El secreto está en la recta l que los separa del grupo.

Solución

Pregunta

¿Hay garantía de que tú y tu amigo compartan alguna línea de comunicación?

Respuesta

Compartirán por lo menos una arista.

- El secreto está en la recta l que los separa del grupo.
- Ordena los alumnos con respecto a su distancia hasta l.

Pregunta

¿Hay garantía de que tú y tu amigo compartan alguna línea de comunicación?

Respuesta

Compartirán por lo menos una arista.

- El secreto está en la recta l que los separa del grupo.
- Ordena los alumnos con respecto a su distancia hasta l.
- Tú y tu amigo comparten la arista formada por los dos más cercanos.

Solución

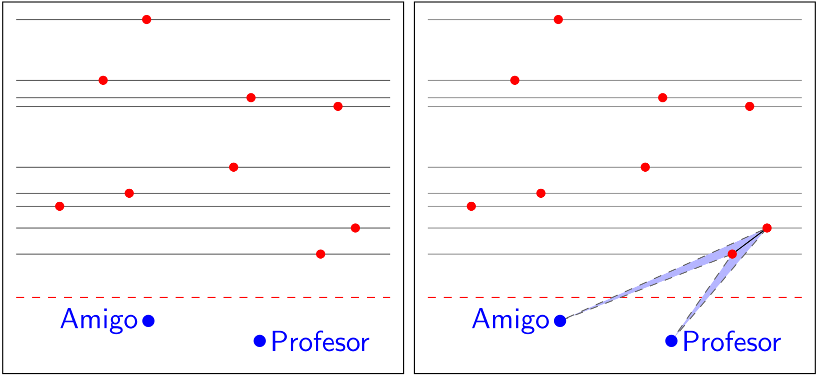

Figura: Una arista que siempre compartirán.

Solución

Pregunta

¿Cuál es el mínimo número de aristas que comparten?

- El M. en C. Javier Cano mostró que la cota máxima no podría superar $\log(n)$.

Solución

Pregunta

¿Cuál es el mínimo número de aristas que comparten?

- El M. en C. Javier Cano mostró que la cota máxima no podría superar $\log(n)$.
- El ejemplo se dio al organizar a los alumnos como el conjunto de Horton.

Solución

Pregunta

¿Cuál es el mínimo número de aristas que comparten?

- El M. en C. Javier Cano mostró que la cota máxima no podría superar $\log(n)$.
- El ejemplo se dio al organizar a los alumnos como el conjunto de Horton.
- Colocando al profesor y a su ayudante en los puntos $(-u, 0)$ y $(0, -u)$ respectivamente (con u lo suficientemente grande). Pero...

Solución

- No podía ser tan simple.

Solución

- No podía ser tan simple.
- Construimos un conjunto P_m en el cual el profesor y su ayudante sólo comparten 2 de las 3 líneas de comunicación de los 3 primeros alumnos.

Solución

- No podía ser tan simple.
- Construimos un conjunto P_m en el cual el profesor y su ayudante sólo comparten 2 de las 3 líneas de comunicación de los 3 primeros alumnos.
  - Si $m = 1$ entonces $P_m = \{a_1 = (0, 3), b_1 = (1, 1), c_1(3, 0)\}$.

- No podía ser tan simple.
- Construimos un conjunto P_m en el cual el profesor y su ayudante sólo comparten 2 de las 3 líneas de comunicación de los 3 primeros alumnos.
    - Si $m = 1$ entonces $P_m = \{a_1 = (0,3), b_1 = (1,1), c_1(3,0)\}$.
    - Si $m > 1$ entonces $p_m = P_{m-1} \cup \{\frac{5m}{2} + a_1, \frac{5m}{2} + b_1, \frac{5m}{2} + c_1\}$:

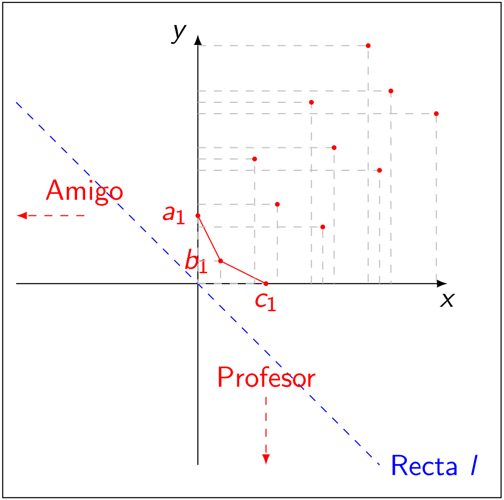

Figura: En este conjunto de 12 puntos, p y q comparten únicamente dos aristas (rojas).

Solución

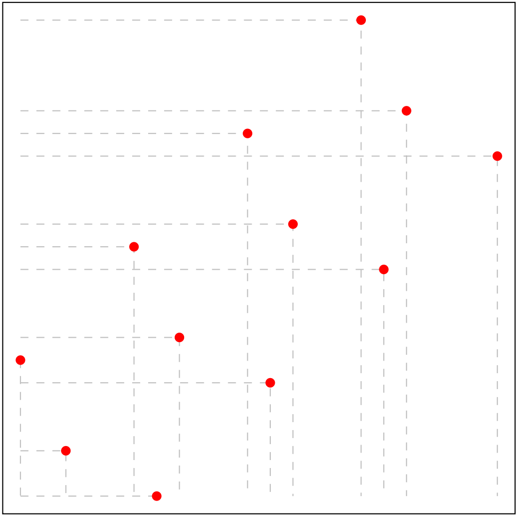

Figura: Más cerca.

Solución

- Inténtalo tú mismo.

Solución

- Inténtalo tú mismo.
- Prueba que $\mathcal{W}_P \geq \binom{n}{2} f(n)$, siendo f divergente.

Solución

Fin.