Color Test

- negro: Texto normal
- azul: Texto que dice qué hacer.
- rojo: Resalto fuerte–nueva palabra siendo definida.
- verde: Resalto débil, en vez de itálicas.
- morado: Nueva palabra o concepto que hay que hablar de ello.
- amarillo, café, anaranjado: para cuando no hay suficientes colores.
- gris: Comentarios a mi mismo.
- : para espaciar.

Engranando y Coloreando Mapas

Miguel Raggi
(Coautores: Daniel Pellicer, Steve Wilson, Hiroki Koike)

Centro de Ciencias Matemáticas
UNAM

Coloquio Victor Neumann-Lara de Teoría de Gráficas, Combinatoria y sus Aplicaciones

5 de marzo de 2013

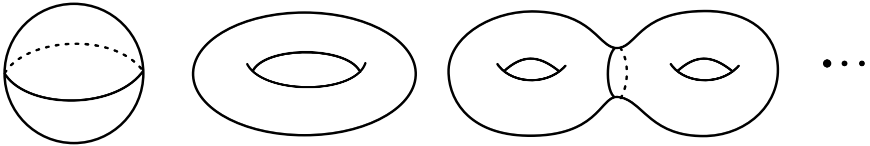
Índice:

Índice:

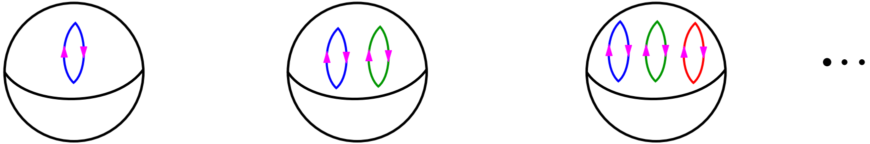
Mini-curso de superficies

Las superficies conexas y compactas se clasifican así:

Orientables:



No Orientables:

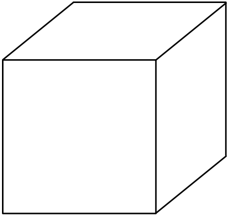


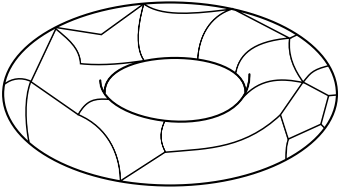
Mapas

Definición

Un mapa es una inmersión de una gráfica (no necesariamente simple) en una superficie (compacta y conexa) donde las aristas no se intersectan, y las caras (componentes conexas del complemento) son discos.

Ejemplos:



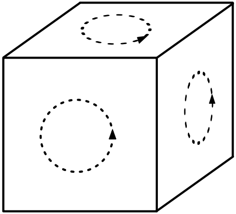


Orientación

Definición

Una orientación en un mapa es un "circulito dirigido" en cada cara, de manera que las direcciones de dos caras que comparten una arista estén encontradas.

Ejemplo:

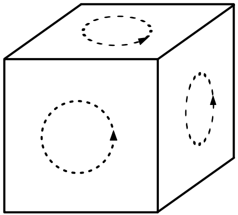


Orientación

Definición

Una orientación en un mapa es un "circulito dirigido" en cada cara, de manera que las direcciones de dos caras que comparten una arista estén encontradas.

Ejemplo:



Proposición

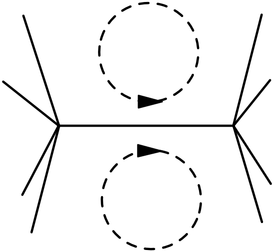
Un mapa tiene una orientación si y sólo si la superficie es orientable.

Pseudo-Orientación por Caras

Definición

Una pseudo-orientación por caras en un mapa es ponerle un "circulito dirigido" a cada cara, de manera que las direcciones de dos caras que comparten una arista estén iguales.

Ejemplo:

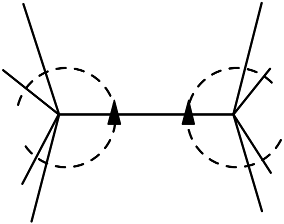


Pseudo-Orientación por Vértices

Definición

Una pseudo-orientación por vértices en un mapa es ponerle un circulito dirigido a cada vértice, de manera que las direcciones de dos vértices unidos por una arista estén iguales.

Ejemplo:



Engranes

- Nos imaginamos una pseudo-orientación como poner un engrane en cada (cara, vértice) de manera que si dos (caras, vértices) comparten una arista, entonces están engranados.

Engranes

- Nos imaginamos una pseudo-orientación como poner un engrane en cada (cara, vértice) de manera que si dos (caras, vértices) comparten una arista, entonces están engranados.
- Si todos los engranes se pueden mover al mismo tiempo, entonces hay pseudo-orientación.

Engranes

- Nos imaginamos una pseudo-orientación como poner un engrane en cada (cara, vértice) de manera que si dos (caras, vértices) comparten una arista, entonces están engranados.
- Si todos los engranes se pueden mover al mismo tiempo, entonces hay pseudo-orientación.
- Notemos que para tener pseudo-orientación por vértices, todas las caras deben tener una cantidad par de lados.

Engranes

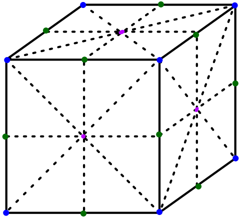
- Nos imaginamos una pseudo-orientación como poner un engrane en cada (cara, vértice) de manera que si dos (caras, vértices) comparten una arista, entonces están engranados.
- Si todos los engranes se pueden mover al mismo tiempo, entonces hay pseudo-orientación.
- Notemos que para tener pseudo-orientación por vértices, todas las caras deben tener una cantidad par de lados.
- Similarmente, para tener pseudo-orientación por caras, todos los vértices deben tener orden par.

Banderas

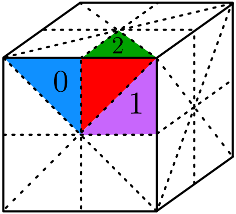
Definición

Una bandera en un mapa es un triangulito formado por un vértice del mapa, el centro de una cara y el centro de una arista, donde el vértice está en la arista que está en la cara.

Ejemplo:

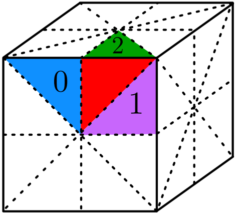


Banderas adyacentes



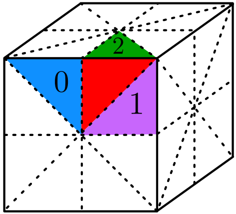
- Notemos que cada bandera tiene 3 banderas adyacentes.

Banderas adyacentes



- Notemos que cada bandera tiene 3 banderas adyacentes.
- Cada bandera tiene una bandera adyacente que difiere sólo en el vértice, una que difiere sólo en la arista y otra que difiere sólo en la cara.

Banderas adyacentes



- Notemos que cada bandera tiene 3 banderas adyacentes.
- Cada bandera tiene una bandera adyacente que difiere sólo en el vértice, una que difiere sólo en la arista y otra que difiere sólo en la cara.
- Les llamamos las banderas 0-adyacente, 1-adyacente y 2-adyacente respectivamente.

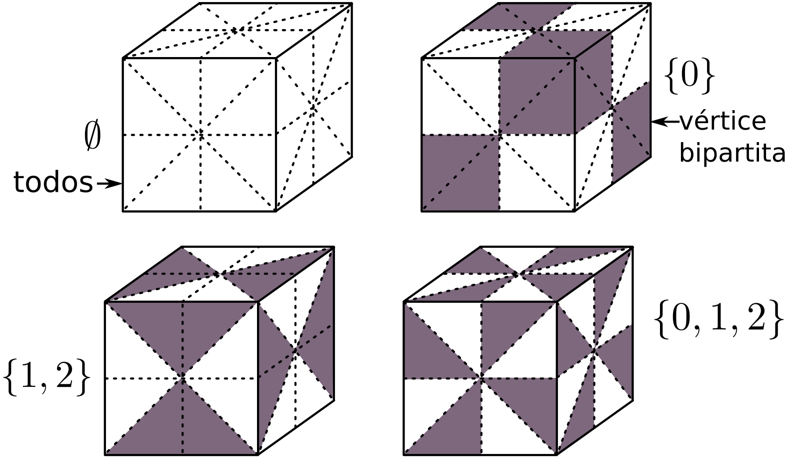
Bicoloraciones

Definición

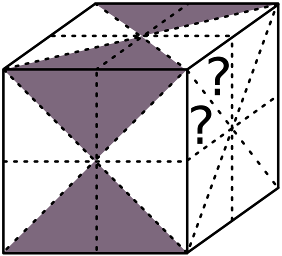
Sea $3 = \{0, 1, 2\}$ *y sea* $I \subset 3$ *y sea* $\mathcal{M}$ *un mapa. Una* I*-coloración es una bicoloración de las banderas de* $\mathcal{M}$ *de manera que:*

- *Si* $i \in I$, *entonces cualesquiera dos banderas* i*-adyacentes tienen color diferente.*
- *Si* $i \notin I$, *entonces cualesquiera dos banderas* i*-adyacentes tienen color igual.*

Ejemplos en el Cubo



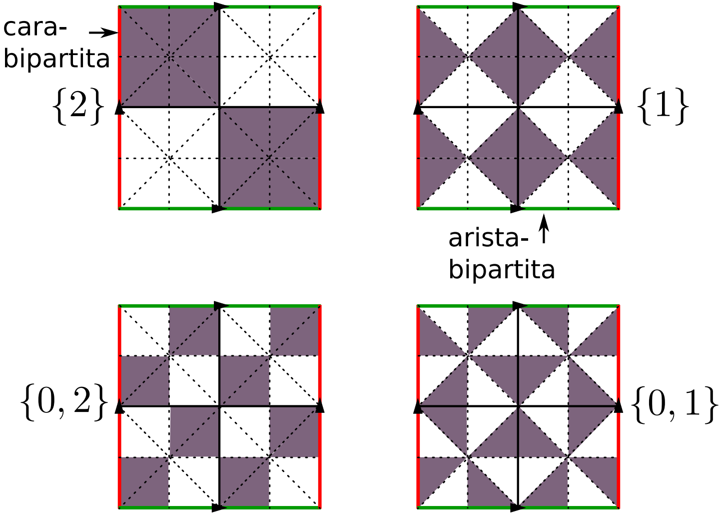
Cubo: No-ejemplo



$\{1\}$

¡Falla!

Ejemplos en el Toro



Grupo de Coloraciones

Teorema

Supongamos que $\mathcal{M}$ es I y J-coloreable. Entonces $\mathcal{M}$ es $(I \Delta J)$-coloreable.

Grupo de Coloraciones

Teorema

Supongamos que $\mathcal{M}$ es I y J-coloreable. Entonces $\mathcal{M}$ es $(I \Delta J)$-coloreable.

Prueba: Fácil: Consideremos una I y una J-coloración. Para cada bandera,

- Si ambas coloraciones le dan el mismo color a la bandera, coloréala de blanco.
- Si le dan color diferente, coloréala de negro. $\blacksquare$

Grupo de Coloraciones

Teorema

Supongamos que $\mathcal{M}$ es I y J-coloreable. Entonces $\mathcal{M}$ es $(I \Delta J)$-coloreable.

Prueba: Fácil: Consideremos una I y una J-coloración. Para cada bandera,

- Si ambas coloraciones le dan el mismo color a la bandera, coloréala de blanco.
- Si le dan color diferente, coloréala de negro. ■

Observemos que para cada mapa $\mathcal{M}$, el conjunto de posibles coloraciones forma un subgrupo de $\mathcal{P}(\{0, 1, 2\}) \cong (\mathbb{Z}_2)^3$.

Grupo de Coloraciones

Teorema

Supongamos que $\mathcal{M}$ es I y J-coloreable. Entonces $\mathcal{M}$ es $(I \Delta J)$-coloreable.

Prueba: Fácil: Consideremos una I y una J-coloración. Para cada bandera,

- Si ambas coloraciones le dan el mismo color a la bandera, coloréala de blanco.
- Si le dan color diferente, coloréala de negro. ■

Observemos que para cada mapa $\mathcal{M}$, el conjunto de posibles coloraciones forma un subgrupo de $\mathcal{P}(\{0,1,2\}) \cong (\mathbb{Z}_2)^3$.

Pregunta

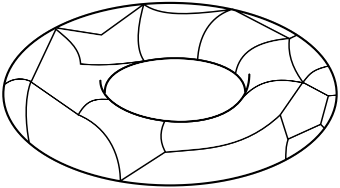
Dada una superficie S y un subgrupo $H \subset \mathcal{P}(\{0,1,2\})$, ¿cuándo existe un mapa $\mathcal{M}$ en S tal que $T(\mathcal{M}) = H$?

Dual

Definición

Sea $\mathcal{M}$ un mapa. El dual $D(\mathcal{M})$ es un mapa en la misma superficie, que resulta al poner un vértice en el centro de cada cara y unir dos vértices si sus caras correspondientes comparten una arista.

Ejemplo:

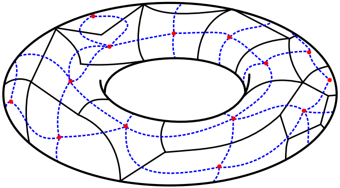


Dual

Definición

Sea $\mathcal{M}$ un mapa. El dual $D(\mathcal{M})$ es un mapa en la misma superficie, que resulta al poner un vértice en el centro de cada cara y unir dos vértices si sus caras correspondientes comparten una arista.

Ejemplo:

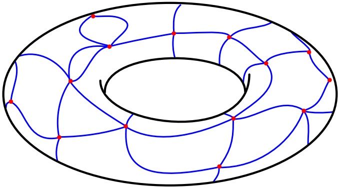


Dual

Definición

Sea $\mathcal{M}$ un mapa. El dual $D(\mathcal{M})$ es un mapa en la misma superficie, que resulta al poner un vértice en el centro de cada cara y unir dos vértices si sus caras correspondientes comparten una arista.

Ejemplo:

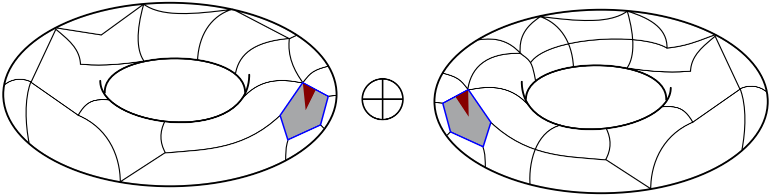


Suma Conexa

Podría pasar un rato definiendo suma conexa $\oplus$, o podría enseñarles un dibujo:

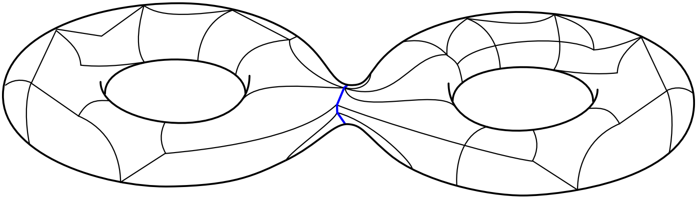
Suma Conexa

Podría pasar un rato definiendo suma conexa $\oplus$, o podría enseñarles un dibujo:



Suma Conexa

Podría pasar un rato definiendo suma conexa $\oplus$, o podría enseñarles un dibujo:



Suma Conexa

Proposición

Si $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son mapas I-coloreables, también lo es $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$.

Suma Conexa

Proposición

Si $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son mapas I-coloreables, también lo es $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$.

Prueba: Consideremos una I-coloración de $\mathcal{M}$ y una I-coloración de $\mathcal{N}$ de manera que:

- Si $2 \in I$, entonces que la coloración en la cara sea igual.
- Si $2 \notin I$, entonces que la coloración en la cara sea diferente.

La coloración inducida funciona para $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$. ■

Suma Conexa

- ¿Cómo es $T(\mathcal{M} \oplus \mathcal{N})$ en términos de $T(\mathcal{M})$ y $T(\mathcal{N})$?

Suma Conexa

- ¿Cómo es $T(\mathcal{M} \oplus \mathcal{N})$ en términos de $T(\mathcal{M})$ y $T(\mathcal{N})$?
- Casi siempre pasa que $T(\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}) = T(\mathcal{M}) \cap T(\mathcal{N})$.

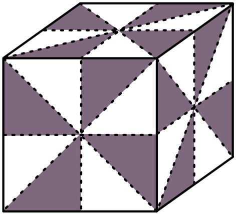
Suma Conexa

- ¿Cómo es $T(\mathcal{M} \oplus \mathcal{N})$ en términos de $T(\mathcal{M})$ y $T(\mathcal{N})$?
- Casi siempre pasa que $T(\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}) = T(\mathcal{M}) \cap T(\mathcal{N})$.
- Pasa cuando $T(\mathcal{M} \setminus F) = T(\mathcal{M})$ y $T(\mathcal{N} \setminus F') = T(\mathcal{N})$, donde F y F' son las caras por donde vamos a pegar.

Índice:

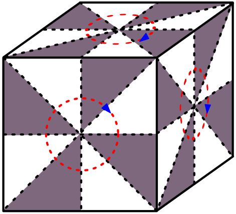
Bicoloración vs Orientación

Fíjense en esto:



Bicoloración vs Orientación

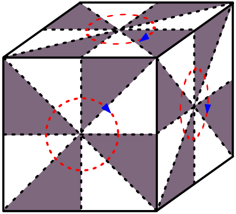
Fíjense en esto:



Parece como que tuviera rueditas puestas, todas en la misma dirección.

Bicoloración vs Orientación

Fíjense en esto:



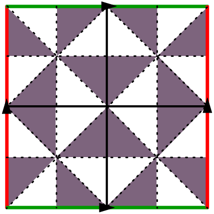
Parece como que tuviera rueditas puestas, todas en la misma dirección.

Proposición

Un mapa tiene una $\{0, 1, 2\}$-coloración si y sólo si tiene una orientación.

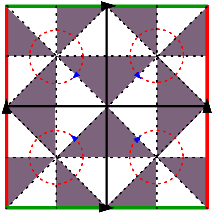
Bicoloración vs Pseudo-Orientación

Es lo mismo con pseudo-orientaciones, salvo que las rueditas deben estar acomodadas bien:



Bicoloración vs Pseudo-Orientación

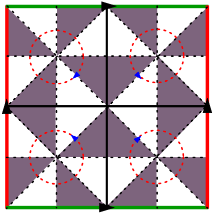
Es lo mismo con pseudo-orientaciones, salvo que las rueditas deben estar acomodadas bien:



Ahora las rueditas están todas en dirección opuesta.

Bicoloración vs Pseudo-Orientación

Es lo mismo con pseudo-orientaciones, salvo que las rueditas deben estar acomodadas bien:



Ahora las rueditas están todas en dirección opuesta.

Proposición

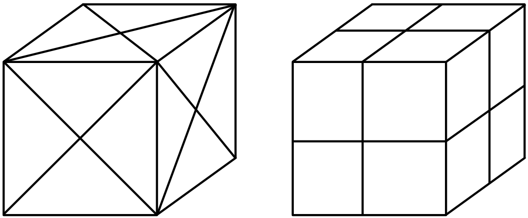
Un mapa tiene una $\{0, 1\}$-coloración si y sólo si tiene una pseudo-orientación por caras.

Mapa X

Definición

Sea $\mathcal{M}$ un mapa e $I \subset 3$. Definimos $X(\mathcal{M}, I)$ como el mapa que resulta de considerar como aristas las sub-aristas de tipo i para cada $i \in I$. O, dicho de otra manera, pegar las banderas i-adyacentes donde $i \notin I$ y formar las caras así.

Por ejemplo, si $\mathcal{M}$ es el cubo, abajo se muestran ejemplos para $I = \{1, 2\}$ e $I = \{0, 2\}$.



Mapa X

- $X(\mathcal{M}, \{2\}) = \mathcal{M}$.

Mapa X

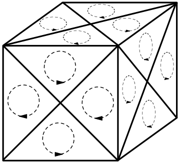
- $X(\mathcal{M}, \{2\}) = \mathcal{M}$.
- Un mapa es I-coloreable si y sólo si $X(\mathcal{M}, I)$ es bipartita por caras.

Mapa X

- $X(\mathcal{M}, \{2\}) = \mathcal{M}$.
- Un mapa es I-coloreable si y sólo si $X(\mathcal{M}, I)$ es bipartita por caras.
- Pero aunque no sea I-coloreable, podemos construir X.

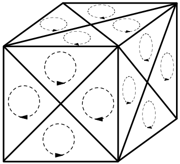
Mapa X

- $X(\mathcal{M}, \{2\}) = \mathcal{M}$.
- Un mapa es I-coloreable si y sólo si $X(\mathcal{M}, I)$ es bipartita por caras.
- Pero aunque no sea I-coloreable, podemos construir X.
- Decimos que $\mathcal{M}$ es *I-pseudo-orientable* si $X(\mathcal{M}, I)$ es pseudo-orientable por caras.



Mapa X

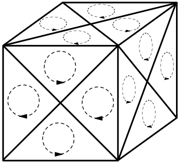
- $X(\mathcal{M}, \{2\}) = \mathcal{M}$.
- Un mapa es I-coloreable si y sólo si $X(\mathcal{M}, I)$ es bipartita por caras.
- Pero aunque no sea I-coloreable, podemos construir X.
- Decimos que $\mathcal{M}$ es I-pseudo-orientable si $X(\mathcal{M}, I)$ es pseudo-orientable por caras.



- Notemos lo siguiente:

Mapa X

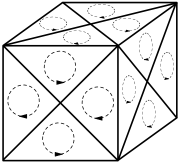
- $X(\mathcal{M}, \{2\}) = \mathcal{M}$.
- Un mapa es I-coloreable si y sólo si $X(\mathcal{M}, I)$ es bipartita por caras.
- Pero aunque no sea I-coloreable, podemos construir X.
- Decimos que $\mathcal{M}$ es I-pseudo-orientable si $X(\mathcal{M}, I)$ es pseudo-orientable por caras.



- Notemos lo siguiente:
  - $\{2\}$-pseudo-orientable $=$ Pseudo-orientable por caras.

Mapa X

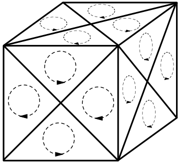
- $X(\mathcal{M}, \{2\}) = \mathcal{M}$.
- Un mapa es I-coloreable si y sólo si $X(\mathcal{M}, I)$ es bipartita por caras.
- Pero aunque no sea I-coloreable, podemos construir X.
- Decimos que $\mathcal{M}$ es I-pseudo-orientable si $X(\mathcal{M}, I)$ es pseudo-orientable por caras.



- Notemos lo siguiente:
  - $\{2\}$-pseudo-orientable $=$ Pseudo-orientable por caras.
  - $\{0\}$-pseudo-orientable $=$ Pseudo-orientable por vértices.

Mapa X

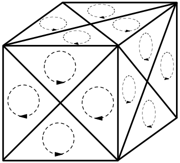
- $X(\mathcal{M}, \{2\}) = \mathcal{M}$.
- Un mapa es I-coloreable si y sólo si $X(\mathcal{M}, I)$ es bipartita por caras.
- Pero aunque no sea I-coloreable, podemos construir X.
- Decimos que $\mathcal{M}$ es I-pseudo-orientable si $X(\mathcal{M}, I)$ es pseudo-orientable por caras.



- Notemos lo siguiente:
  - $\{2\}$-pseudo-orientable = Pseudo-orientable por caras.
  - $\{0\}$-pseudo-orientable = Pseudo-orientable por vértices.
  - $\{1\}$-pseudo-orientable = Pseudo-orientable por aristas.

Mapa X

- $X(\mathcal{M}, \{2\}) = \mathcal{M}$.
- Un mapa es I-coloreable si y sólo si $X(\mathcal{M}, I)$ es bipartita por caras.
- Pero aunque no sea I-coloreable, podemos construir X.
- Decimos que $\mathcal{M}$ es I-pseudo-orientable si $X(\mathcal{M}, I)$ es pseudo-orientable por caras.



- Notemos lo siguiente:
  - $\{2\}$-pseudo-orientable = Pseudo-orientable por caras.
  - $\{0\}$-pseudo-orientable = Pseudo-orientable por vértices.
  - $\{1\}$-pseudo-orientable = Pseudo-orientable por aristas.
- Definimos $\emptyset$-pseudo-orientable como orientable; pues construir $X(\mathcal{M}, \emptyset)$ es como si pegáramos todas las banderas.

Súper Teorema

Teorema

Un mapa es I-pseudo-orientable si y sólo si es $(3 \setminus I)$-coloreable.

Súper Teorema

Teorema

Un mapa es I-pseudo-orientable si y sólo si es $(3 \setminus I)$-coloreable.

Prueba:

Súper Teorema

Teorema

Un mapa es I-pseudo-orientable si y sólo si es $(3 \setminus I)$-coloreable.

Prueba: ¡Ejercicio! $\blacksquare$

Acordeón

I	$\mathcal{M}$	Requiere grado par:
$\emptyset$	Todas las banderas iguales	-
$\{0\}$	Vértice-bipartita	Caras
$\{1\}$	Arista-bipartita	Ambos
$\{2\}$	Cara-bipartita	Vértices
$\{0,1\}$	Cara Pseudo-Orientable	Vértices
$\{0,2\}$	Arista Pseudo-Orientable	Ambos
$\{1,2\}$	Vértice Pseudo-Orientable	Caras
$\{0,1,2\}$	Orientable	-

Índice:

Dobles cubiertas

- Dado un mapa $\mathcal{M}$ que NO es I-coloreable, ¿podemos construir un mapa cubriente que sí lo sea?

Dobles cubiertas

- Dado un mapa $\mathcal{M}$ que NO es I-coloreable, ¿podemos construir un mapa cubriente que sí lo sea?
- Resulta que sí y es una doble cubierta.

Dobles cubiertas

- Dado un mapa $\mathcal{M}$ que NO es I-coloreable, ¿podemos construir un mapa cubriente que sí lo sea?
- Resulta que sí y es una doble cubierta.
- Sea $\mathcal{M}$ un mapa que no es I-coloreable.

Dobles cubiertas

- Dado un mapa $\mathcal{M}$ que NO es I-coloreable, ¿podemos construir un mapa cubriente que sí lo sea?
- Resulta que sí y es una doble cubierta.
- Sea $\mathcal{M}$ un mapa que no es I-coloreable.
- Construiremos un mapa, que llamaremos $I \succ \mathcal{M}$, que será la doble cubierta de $\mathcal{M}$ que sí es I-coloreable.

Dobles cubiertas

- Dado un mapa $\mathcal{M}$ que NO es I-coloreable, ¿podemos construir un mapa cubriente que sí lo sea?
- Resulta que sí y es una doble cubierta.
- Sea $\mathcal{M}$ un mapa que no es I-coloreable.
- Construiremos un mapa, que llamaremos $I \succ \mathcal{M}$, que será la doble cubierta de $\mathcal{M}$ que sí es I-coloreable.
- Además, $T(I \succ \mathcal{M}) = \langle T(\mathcal{M}), I \rangle$.

¿Cómo lo construimos?

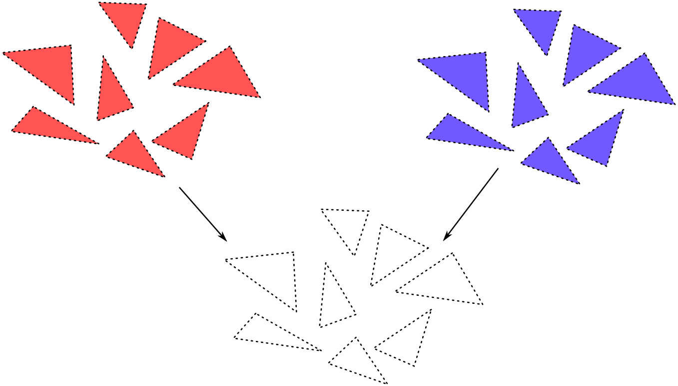
- Sea $\mathcal{M}$ un mapa y pensemos que es de papel.

¿Cómo lo construimos?

- Sea $\mathcal{M}$ un mapa y pensemos que es de papel.
- Cortamos el mapa en banderitas y las ponemos en el suelo, separadas, pero acordándonos donde cortamos.

¿Cómo lo construimos?

- Sea $\mathcal{M}$ un mapa y pensemos que es de papel.
- Cortamos el mapa en banderitas y las ponemos en el suelo, separadas, pero acordándonos donde cortamos.
- Hacemos dos copias de cada banderita y las ponemos arriba. Una copia la pintamos de un color y la otra del otro.



¿Cómo lo construimos?

Ahora vamos a pegar de acuerdo a I. Es decir,

¿Cómo lo construimos?

Ahora vamos a pegar de acuerdo a I. Es decir,

- Si $i \in I$, la i-adyacente de una bandera azul será la correspondiente i-adyacente, pero roja, y viceversa.
- Si $i \notin I$, la i-adyacente de una bandera azul será la correspondiente i-adyacente azul, y viceversa.

¿Cómo lo construimos?

Ahora vamos a pegar de acuerdo a I. Es decir,

- Si $i \in I$, la i-adyacente de una bandera azul será la correspondiente i-adyacente, pero roja, y viceversa.
- Si $i \notin I$, la i-adyacente de una bandera azul será la correspondiente i-adyacente azul, y viceversa.

De esta manera podemos ver que obtenemos un mapa I-coloreado y que es una doble cubierta del mapa anterior.

¿Cómo lo construimos?

Ahora vamos a pegar de acuerdo a I. Es decir,

- Si $i \in I$, la i-adyacente de una bandera azul será la correspondiente i-adyacente, pero roja, y viceversa.
- Si $i \notin I$, la i-adyacente de una bandera azul será la correspondiente i-adyacente azul, y viceversa.

De esta manera podemos ver que obtenemos un mapa I-coloreado y que es una doble cubierta del mapa anterior.

Por ejemplo, si $\mathcal{M}$ ya era I-coloreable, vamos a obtener dos copias disconexas de $\mathcal{M}$.

Índice:

Super-Teorema

Teorema

Para todo subgrupo H *de* $\mathcal{P}(3)$ *y cada superficie* S*, hay un mapa* $\mathcal{M}$ *en* S *tal que* $T(\mathcal{M}) = H$ *si y sólo si tanto* S *como* H *son ambos orientables o son ambos no orientables, salvo las siguientes 3 excepciones:*

Super-Teorema

Teorema

Para todo subgrupo H *de* $\mathcal{P}(3)$ *y cada superficie* S*, hay un mapa* $\mathcal{M}$ *en* S *tal que* $T(\mathcal{M}) = H$ *si y sólo si tanto* S *como* H *son ambos orientables o son ambos no orientables, salvo las siguientes 3 excepciones:*

1. $\{\emptyset, \{1\}, \{0,2\}, 3\}$ *no aparece en la esfera.*
2. $\{\emptyset, \{1\}\}$ *no aparece en el plano proyectivo.*
3. $\{\emptyset, \{0,2\}\}$ *no aparece en el plano proyectivo.*

Super-Teorema

Teorema

Para todo subgrupo H de $\mathcal{P}(3)$ y cada superficie S, hay un mapa $\mathcal{M}$ en S tal que $T(\mathcal{M}) = H$ si y sólo si tanto S como H son ambos orientables o son ambos no orientables, salvo las siguientes 3 excepciones:

1. $\{\emptyset, \{1\}, \{0, 2\}, 3\}$ *no aparece en la esfera.*
2. $\{\emptyset, \{1\}\}$ *no aparece en el plano proyectivo.*
3. $\{\emptyset, \{0, 2\}\}$ *no aparece en el plano proyectivo.*

Prueba: Hay 16 subgrupos de $\mathcal{P}(3)$, pero podemos matarlos a todos de 3 tiros:

Super-Teorema

Teorema

Para todo subgrupo H de $\mathcal{P}(3)$ y cada superficie S, hay un mapa $\mathcal{M}$ en S tal que $T(\mathcal{M}) = H$ si y sólo si tanto S como H son ambos orientables o son ambos no orientables, salvo las siguientes 3 excepciones:

1. $\{\emptyset, \{1\}, \{0, 2\}, 3\}$ *no aparece en la esfera.*
2. $\{\emptyset, \{1\}\}$ *no aparece en el plano proyectivo.*
3. $\{\emptyset, \{0, 2\}\}$ *no aparece en el plano proyectivo.*

Prueba: Hay 16 subgrupos de $\mathcal{P}(3)$, pero podemos matarlos a todos de 3 tiros:

1. Inserción. Mata a los no orientables salvo a los 2 de arriba.

Super-Teorema

Teorema

Para todo subgrupo H de $\mathcal{P}(3)$ y cada superficie S, hay un mapa $\mathcal{M}$ en S tal que $T(\mathcal{M}) = H$ si y sólo si tanto S como H son ambos orientables o son ambos no orientables, salvo las siguientes 3 excepciones:

1. $\{\emptyset, \{1\}, \{0,2\}, 3\}$ *no aparece en la esfera.*
2. $\{\emptyset, \{1\}\}$ *no aparece en el plano proyectivo.*
3. $\{\emptyset, \{0,2\}\}$ *no aparece en el plano proyectivo.*

Prueba: Hay 16 subgrupos de $\mathcal{P}(3)$, pero podemos matarlos a todos de 3 tiros:

1. Inserción. Mata a los no orientables salvo a los 2 de arriba.
2. Suma conexa. Mata a esos 2.

Super-Teorema

Teorema

Para todo subgrupo H de $\mathcal{P}(3)$ y cada superficie S, hay un mapa $\mathcal{M}$ en S tal que $T(\mathcal{M}) = H$ si y sólo si tanto S como H son ambos orientables o son ambos no orientables, salvo las siguientes 3 excepciones:

1. $\{\emptyset, \{1\}, \{0,2\}, 3\}$ *no aparece en la esfera.*
2. $\{\emptyset, \{1\}\}$ *no aparece en el plano proyectivo.*
3. $\{\emptyset, \{0,2\}\}$ *no aparece en el plano proyectivo.*

Prueba: Hay 16 subgrupos de $\mathcal{P}(3)$, pero podemos matarlos a todos de 3 tiros:

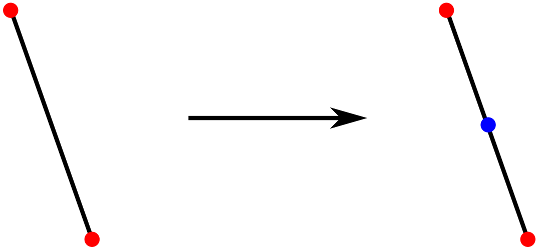
1. Inserción. Mata a los no orientables salvo a los 2 de arriba.
2. Suma conexa. Mata a esos 2.
3. Doble cubierta. Mata a todos los orientables.

Inserción de Vértices

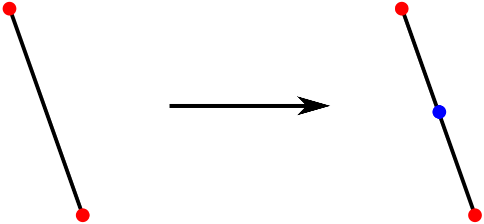
- Sea $\mathcal{M}$ un mapa. Supongamos que queremos modificarlo ligeramente para que la gráfica sea bipartita-por-vértices.

Inserción de Vértices

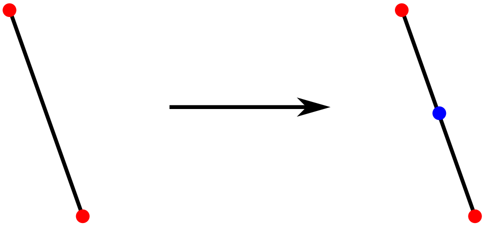
- Sea $\mathcal{M}$ un mapa. Supongamos que queremos modificarlo ligeramente para que la gráfica sea bipartita-por-vértices.
- Podemos colorear todos los vértices al azar y después dividir las aristas cuyos vértices sean iguales, insertando un vértice:



Inserción de Vértices



Inserción de Vértices



Insertando un vértice, podemos convertir cualquier mapa en uno que sea (o no sea):

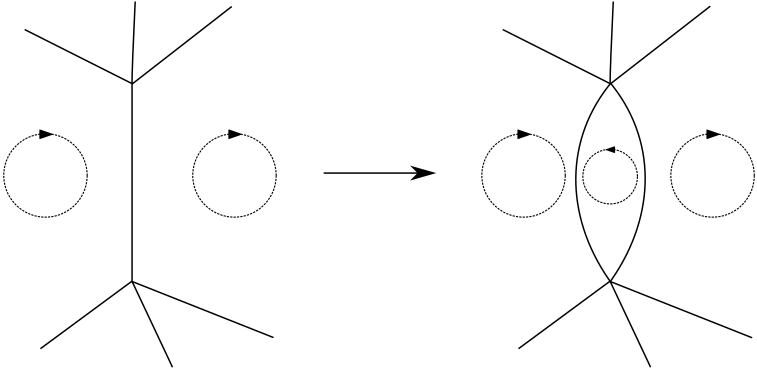
- Bicolorable por vértices.
- Pseudo-orientable por vértices.

Inserción de Aristas

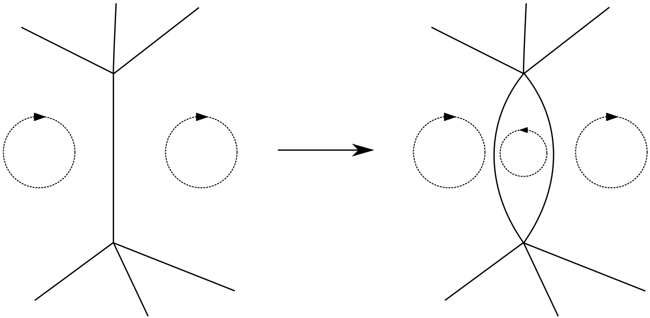
- Ahora supongamos que queremos modificarlo para que sea pseudo-orientable por caras.

Inserción de Aristas

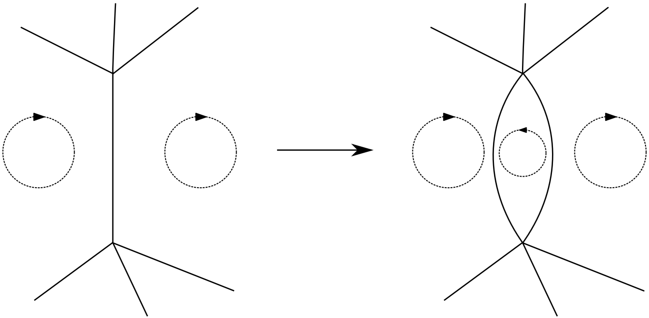
- Ahora supongamos que queremos modificarlo para que sea pseudo-orientable por caras.
- Podemos orientar las caras al azar y después, en donde estén mal orientadas, reemplazar una arista por dos:



Inserción de Aristas



Inserción de Aristas



Insertando una arista, podemos convertir cualquier mapa en uno que sea (o no sea):

- Bicolorable por caras.
- Pseudo-orientable por caras.

Inserción

Con esta técnica, obtenemos los siguientes grupos:

$$\{\emptyset, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}\}$$

$$\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\} \leftrightarrow \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$

$$\{\emptyset, \{0\}, \{2\}, \{0,2\}\}$$

$$\{\emptyset, \{2\}\} \leftrightarrow \{\emptyset, \{0\}\}$$

$$\{\emptyset, \{0,1\}\} \leftrightarrow \{\emptyset, \{1,2\}\}$$

Es decir, todos los subgrupos no-orientables de $\mathcal{P}(3)$ generados por algún subconjunto de bicoloración de vértices, bicoloración de caras, pseudo-orientación de vértices y pseudo-orientación de caras.

Suma Conexa

Recordemos que, salvo algunos detalles técnicos,

$$T(\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}) = T(\mathcal{M}) \cap T(\mathcal{N})$$

Suma Conexa

Recordemos que, salvo algunos detalles técnicos,

$$T(\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}) = T(\mathcal{M}) \cap T(\mathcal{N})$$

A partir de los subgrupos que ya tenemos, podemos construir los únicos dos grupos no-orientables que nos faltan:

$$\{\emptyset, \{1\}\} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\} \bigcap \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$

$$\{\emptyset, \{0,2\}\} = \{\emptyset, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}\} \bigcap \{\emptyset, \{0\}, \{2\}, \{0,2\}\}$$

Suma Conexa

Recordemos que, salvo algunos detalles técnicos,

$$T(\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}) = T(\mathcal{M}) \cap T(\mathcal{N})$$

A partir de los subgrupos que ya tenemos, podemos construir los únicos dos grupos no-orientables que nos faltan:

$$\{\emptyset, \{1\}\} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\} \bigcap \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$

$$\{\emptyset, \{0,2\}\} = \{\emptyset, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}\} \bigcap \{\emptyset, \{0\}, \{2\}, \{0,2\}\}$$

Nota: Estas construcciones nos sirven sólo a partir de la Botella de Klein.

Doble Cubierta

Faltan los grupos orientables, pero nos encargamos de todos ellos con dobles cubiertas:

Doble Cubierta

Faltan los grupos orientables, pero nos encargamos de todos ellos con dobles cubiertas:

Proposición

Sea $\mathcal{M}$ un mapa no orientable. Entonces $\{0,1,2\} \succ \mathcal{M}$ vive en la mínima doble cubierta regular de la superficie de $\mathcal{M}$ y

$$T(\{0,1,2\} \succ \mathcal{M}) = \langle T(\mathcal{M}), \{0,1,2\} \rangle$$

Doble Cubierta

Faltan los grupos orientables, pero nos encargamos de todos ellos con dobles cubiertas:

Proposición

Sea $\mathcal{M}$ un mapa no orientable. Entonces $\{0,1,2\} \succ \mathcal{M}$ vive en la mínima doble cubierta regular de la superficie de $\mathcal{M}$ y

$$T(\{0,1,2\} \succ \mathcal{M}) = \langle T(\mathcal{M}), \{0,1,2\} \rangle$$

Con esto terminamos con todos los subgrupos de $\mathcal{P}(3)$, y sólo falta ver que las excepciones realmente son excepciones.

Excepciones

Proposición

No existe ningún mapa en la esfera que sea bicolorable por aristas pero no bicolorable por vértices. En otras palabras, no hay mapa en la esfera cuyo grupo sea $\{\emptyset, \{1\}, \{0,2\}, 3\}$.

Excepciones

Proposición

No existe ningún mapa en la esfera que sea bicolorable por aristas pero no bicolorable por vértices. En otras palabras, no hay mapa en la esfera cuyo grupo sea $\{\emptyset, \{1\}, \{0, 2\}, 3\}$.

Prueba:

Excepciones

Proposición

No existe ningún mapa en la esfera que sea bicolorable por aristas pero no bicolorable por vértices. En otras palabras, no hay mapa en la esfera cuyo grupo sea $\{\emptyset, \{1\}, \{0,2\}, 3\}$.

Prueba: ¡Ejercicio! $\blacksquare$

Excepciones

Proposición

No existe ningún mapa en la esfera que sea bicolorable por aristas pero no bicolorable por vértices. En otras palabras, no hay mapa en la esfera cuyo grupo sea $\{\emptyset, \{1\}, \{0,2\}, 3\}$.

Prueba: ¡Ejercicio! $\blacksquare$

Esto concluye la prueba del teorema, pues tomando dobles cubiertas obtenemos las otras dos excepciones.

Índice:

¿Qué sigue?

- Simetría.
- Más dimensiones.
- Más colores.

¡Fin!

¡Muchas gracias por venir!