Usando ciclos dirigidos con al menos una flecha simétrica para asegurar la existencia de núcleos.

Hortensia Galeana [1]
Mucuy-kak Guevara [2]

[1] Instituto de Matemáticas, UNAM
[2] Facultad de Ciencias, UNAM

XXVIII Coloquio Víctor Neumann Lara de Teoría de las Gráficas, Combinatoria y sus Aplicaciones
7 de Marzo de 2013

Definición [J. Von Neumann, 44]

Sea D una digráfica y $N \subseteq V(D)$, N es un ***núcleo*** de D si:

- N es independiente y
- N es absorbente.

Definición [J. Von Neumann, 44]

Sea D una digráfica y $N \subseteq V(D)$, N es un ***núcleo*** de D si:

- N es independiente y
- N es absorbente.

Definición [J. Von Neumann, 44]

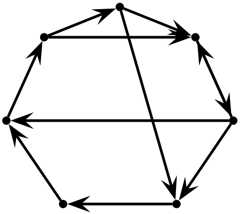
Sea D una digráfica y $N \subseteq V(D)$, N es un ***núcleo*** de D si:

- N es independiente y
- N es absorbente.

Definición [J. Von Neumann, 44]

Sea D una digráfica y $N \subseteq V(D)$, N es un ***núcleo*** de D si:

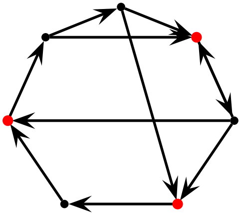
- N es independiente y
- N es absorbente.



Definición [J. Von Neumann, 44]

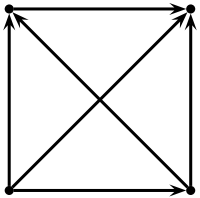
Sea D una digráfica y $N \subseteq V(D)$, N es un ***núcleo*** de D si:

- N es independiente y
- N es absorbente.



Definición [Berge]

Una digráfica es ***núcleo perfecta*** si toda subdigráfica inducida tiene núcleo.



Condiciones suficientes (clásicas) para ser núcleo perfecta

Condiciones suficientes (clásicas) para ser núcleo perfecta

(i) Simétricas (Berge, 77).

Condiciones suficientes (clásicas) para ser núcleo perfecta

(i) Simétricas (Berge, 77).

(ii) Transitivas y todos los núcleos tienen la misma cardinalidad (König, 50).

Condiciones suficientes (clásicas) para ser núcleo perfecta

(i) Simétricas (Berge, 77).
(ii) Transitivas y todos los núcleos tienen la misma cardinalidad (König, 50).
(iii) Acíclica y su núcleo es único (von Neumann, 44).

Condiciones suficientes (clásicas) para ser núcleo perfecta

(i) Simétricas (Berge, 77).
(ii) Transitivas y todos los núcleos tienen la misma cardinalidad (König, 50).
(iii) Acíclica y su núcleo es único (von Neumann, 44).
(iv) Sin ciclos impares (Richardson, 53).

Condiciones suficientes (clásicas) para ser núcleo perfecta

(i) Simétricas (Berge, 77).

(ii) Transitivas y todos los núcleos tienen la misma cardinalidad (König, 50).

(iii) Acíclica y su núcleo es único (von Neumann, 44).

(iv) Sin ciclos impares (Richardson, 53).

(v) **Si todo ciclo impar en D tiene al menos 2 flechas simétricas** (Duchet, 80).

Condiciones suficientes (clásicas) para ser núcleo perfecta

(i) Simétricas (Berge, 77).

(ii) Transitivas y todos los núcleos tienen la misma cardinalidad (König, 50).

(iii) Acíclica y su núcleo es único (von Neumann, 44).

(iv) Sin ciclos impares (Richardson, 53).

(v) **Si todo ciclo impar en D tiene al menos 2 flechas simétricas** (Duchet, 80).

(vi) **Si todo ciclo en D tiene al menos una flecha simétrica** (Duchet, 80).

Definición

Un ***seminúcleo módulo*** F de una digráfica D, con $F \subset A(D)$, es un conjunto S que cumple:

- S es independiente y
- si existe una (S, x)-flecha en $A(D) \setminus F$, entonces x es absorbido por S.

Definición

Un ***seminúcleo módulo*** F de una digráfica D, con $F \subset A(D)$, es un conjunto S que cumple:

- S es independiente y
- si existe una (S, x)-flecha en $A(D) \setminus F$, entonces x es absorbido por S.

Definición

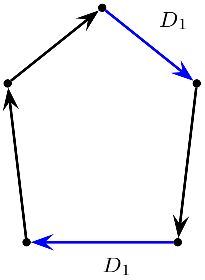
Un ***seminúcleo módulo*** F de una digráfica D, con $F \subset A(D)$, es un conjunto S que cumple:

- S es independiente y
- si existe una (S, x)-flecha en $A(D) \setminus F$, entonces x es absorbido por S.

Definición

Un ***seminúcleo módulo*** F de una digráfica D, con $F \subset A(D)$, es un conjunto S que cumple:

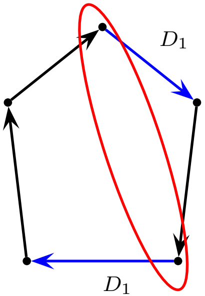
- S es independiente y
- si existe una (S, x)-flecha en $A(D) \setminus F$, entonces x es absorbido por S.



Definición

Un ***seminúcleo módulo*** F de una digráfica D, con $F \subset A(D)$, es un conjunto S que cumple:

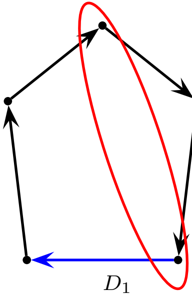
- S es independiente y
- si existe una (S, x)-flecha en $A(D) \setminus F$, entonces x es absorbido por S.



Definición

Un ***seminúcleo módulo*** F de una digráfica D, con $F \subset A(D)$, es un conjunto S que cumple:

- S es independiente y
- si existe una (S, x)-flecha en $A(D) \setminus F$, entonces x es absorbido por S.



Lemma

Sea D una digráfica y $D_1 \subset D$ tal que cada ***ciclo tiene al menos una flecha simétrica en*** *D. Supongamos que $\mathcal{S} = \{S \subseteq V(D) : S$ es un seminúcleo módulo $A(D_1)$ of $D\} \neq \emptyset$. Definimos $D_{\mathcal{S}}$:*

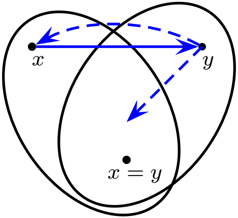
$$V(D_{\mathcal{S}}) = \mathcal{S};$$

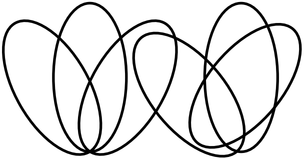
$$(S_1, S_2) \in A(D_{\mathcal{S}})$$

$$\Longleftrightarrow$$

$\forall x \in S_1 \;\; \exists y \in S_2$ tal que $x = y$ ó $(x, y) \in A(D_1)$ y no hay (y, S_1)-flechas en D.

$\Rightarrow D_{\mathcal{S}}$ es acíclica.





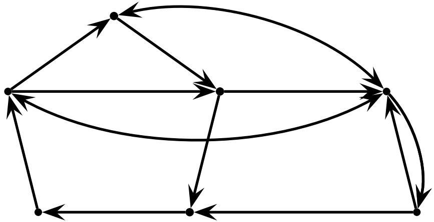
$$(x_{i_0}, x_{i_0+1}, x_{i_1}, x_{i_1+1}, \ldots)$$

Definición

Una ***pseudodiagonal*** de $H \subseteq D$ es una flecha $uv \in A(D) \setminus A(H)$.

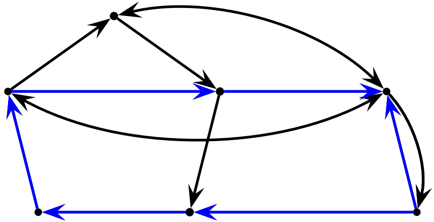
Definición

Una ***pseudodiagonal*** de $H \subseteq D$ es una flecha $uv \in A(D) \setminus A(H)$.



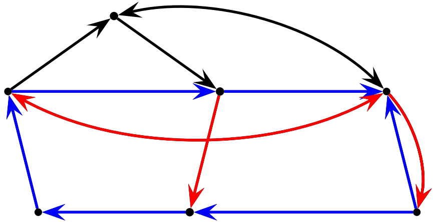
Definición

Una ***pseudodiagonal*** de $H \subseteq D$ es una flecha $uv \in A(D) \setminus A(H)$.



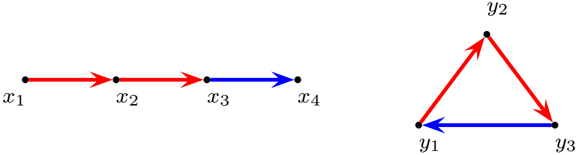
Definición

Una ***pseudodiagonal*** de $H \subseteq D$ es una flecha $uv \in A(D) \setminus A(H)$.



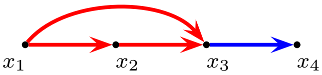
Teorema

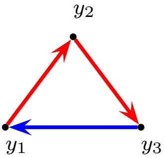
$D_1 \subset D$ donde cada ciclo tiene una flecha simétrica y $D - A(D_1) = D_2$.
Supongamos que las trayectorias dirigidas de longitud 3:



Teorema

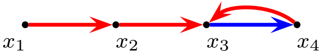
$D_1 \subset D$ donde cada ciclo tiene una flecha simétrica y $D - A(D_1) = D_2$.
Supongamos que las trayectorias dirigidas de longitud 3:

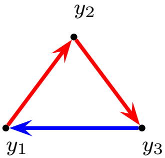




Teorema

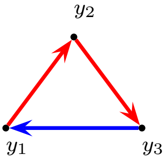
$D_1 \subset D$ donde cada ciclo tiene una flecha simétrica y $D - A(D_1) = D_2$.
Supongamos que las trayectorias dirigidas de longitud 3:





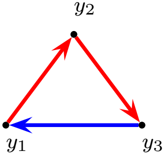
Teorema

$D_1 \subset D$ donde cada ciclo tiene una flecha simétrica y $D - A(D_1) = D_2$.
Supongamos que las trayectorias dirigidas de longitud 3:



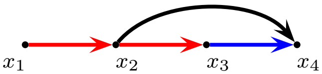
Teorema

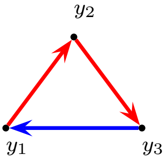
$D_1 \subset D$ donde cada ciclo tiene una flecha simétrica y $D - A(D_1) = D_2$.
Supongamos que las trayectorias dirigidas de longitud 3:



Teorema

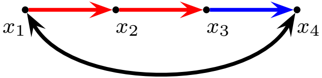
$D_1 \subset D$ donde cada ciclo tiene una flecha simétrica y $D - A(D_1) = D_2$.
Supongamos que las trayectorias dirigidas de longitud 3:

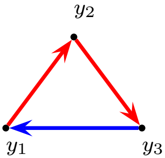




Teorema

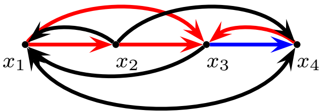
$D_1 \subset D$ donde cada ciclo tiene una flecha simétrica y $D - A(D_1) = D_2$.
Supongamos que las trayectorias dirigidas de longitud 3:

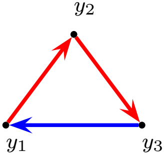




Teorema

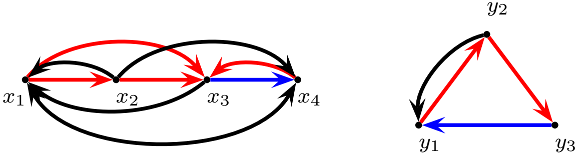
$D_1 \subset D$ donde cada ciclo tiene una flecha simétrica y $D - A(D_1) = D_2$.
Supongamos que las trayectorias dirigidas de longitud 3:





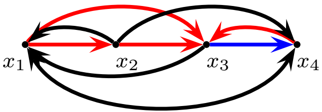
Teorema

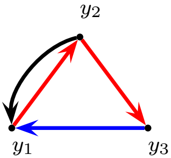
$D_1 \subset D$ donde cada ciclo tiene una flecha simétrica y $D - A(D_1) = D_2$.
Supongamos que las trayectorias dirigidas de longitud 3:



Teorema

$D_1 \subset D$ donde cada ciclo tiene una flecha simétrica y $D - A(D_1) = D_2$.
Supongamos que las trayectorias dirigidas de longitud 3:

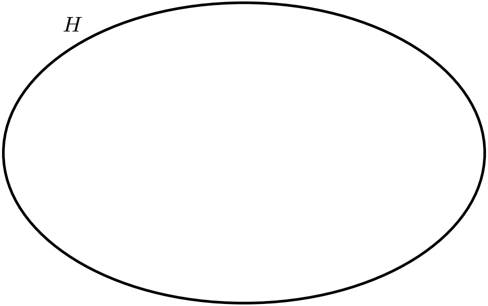




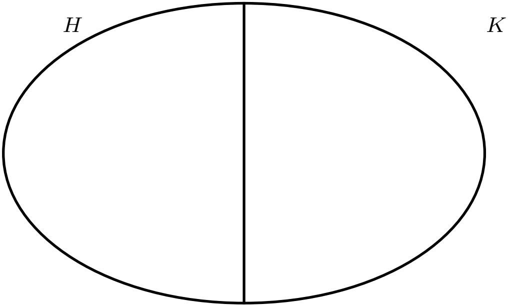
D_2 es núcleo perfecta $\Longrightarrow$ cada inducida H de D tiene un seminúcleo módulo $A(D_1) \cap A(H)$.

$H \subset D$ y K núcleo de $H \cap D_2$

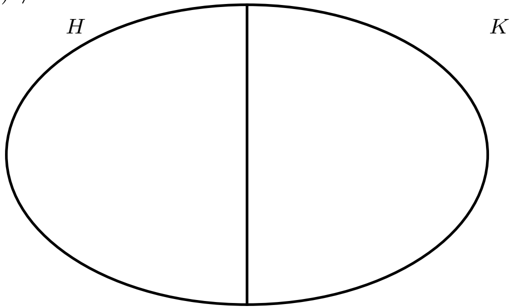
$H \subset D$ y K núcleo de $H \cap D_2$



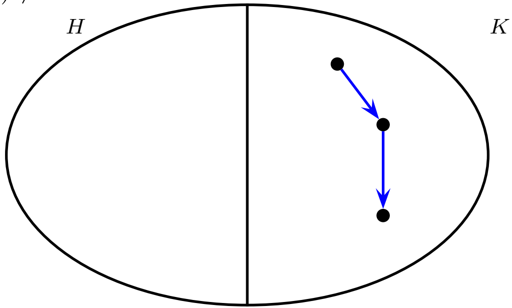
$H \subset D$ y K núcleo de $H \cap D_2$



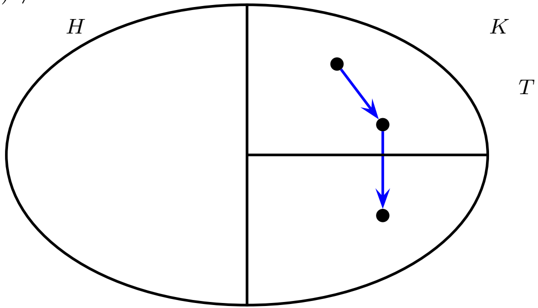
$H \subset D$ y K núcleo de $H \cap D_2$
$A(D_1) \cap A(H) \neq \emptyset$



$H \subset D$ y K núcleo de $H \cap D_2$
$A(D_1) \cap A(H) \neq \emptyset$

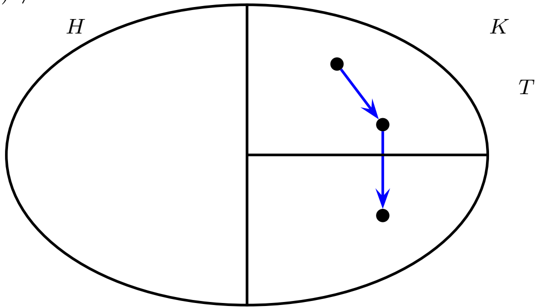


$H \subset D$ y K núcleo de $H \cap D_2$
$A(D_1) \cap A(H) \neq \emptyset$



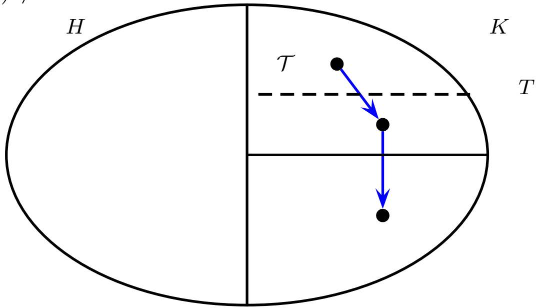
Nos fijamos en el conjunto $T = \{u \in K | \exists v \in K, uv \in A(D_1)\}$

$H \subset D$ y K núcleo de $H \cap D_2$
$A(D_1) \cap A(H) \neq \emptyset$



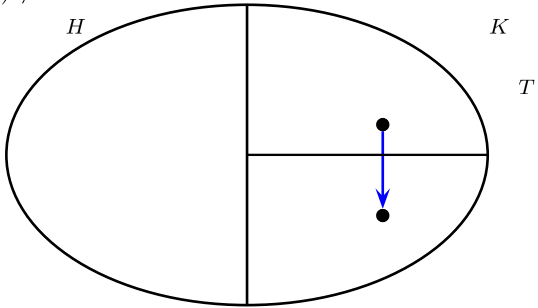
Nos fijamos en el conjunto $T = \{u \in K | \exists v \in K, uv \in A(D_1)\} \neq \emptyset$

$H \subset D$ y K núcleo de $H \cap D_2$
$A(D_1) \cap A(H) \neq \emptyset$



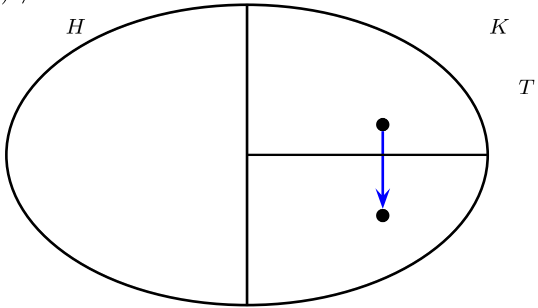
Nos fijamos en el conjunto $T = \{u \in K | \exists v \in K, uv \in A(D_1)\} \neq \emptyset$
$\mathcal{T} = \{v \in T | \forall u \in K \setminus T \ \ (v, u) \notin A(D_1)\}$

$H \subset D$ y K núcleo de $H \cap D_2$
$A(D_1) \cap A(H) \neq \emptyset$



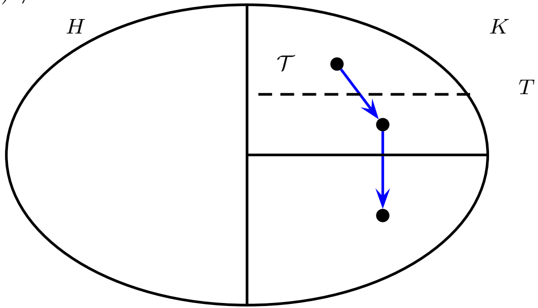
Nos fijamos en el conjunto $T = \{u \in K | \exists v \in K, uv \in A(D_1)\} \neq \emptyset$
$\mathcal{T} = \{v \in T | \forall u \in K \setminus T \ \ (v, u) \notin A(D_1)\} = \emptyset$

$H \subset D$ y K núcleo de $H \cap D_2$
$A(D_1) \cap A(H) \neq \emptyset$



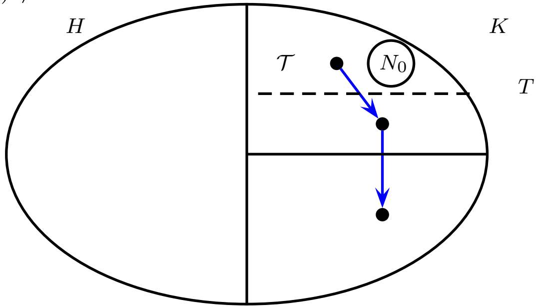
Nos fijamos en el conjunto $T = \{u \in K | \exists v \in K, uv \in A(D_1)\} \neq \emptyset$
$\mathcal{T} = \{v \in T | \forall u \in K \setminus T \ \ (v,u) \notin A(D_1)\} = \emptyset$
$K \setminus T$ es seminúcleo módulo $A(D_1)$ de H.

$H \subset D$ y K núcleo de $H \cap D_2$
$A(D_1) \cap A(H) \neq \emptyset$



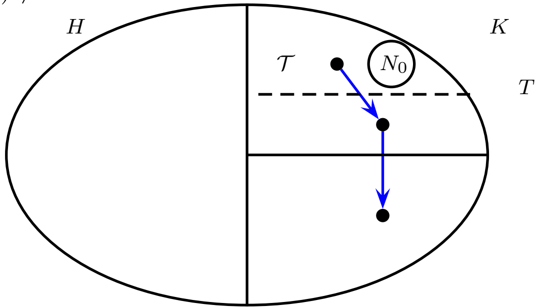
Nos fijamos en el conjunto $T = \{u \in K | \exists v \in K, uv \in A(D_1)\} \neq \emptyset$
$\mathcal{T} = \{v \in T | \forall u \in K \setminus T \ \ (v,u) \notin A(D_1)\} = \emptyset$
$K \setminus T$ es seminúcleo módulo $A(D_1)$ de H.
$\mathcal{T} = \{v \in T | \forall u \in K \setminus T \ \ (v,u) \notin A(D_1)\} \neq \emptyset$

$H \subset D$ y K núcleo de $H \cap D_2$
$A(D_1) \cap A(H) \neq \emptyset$



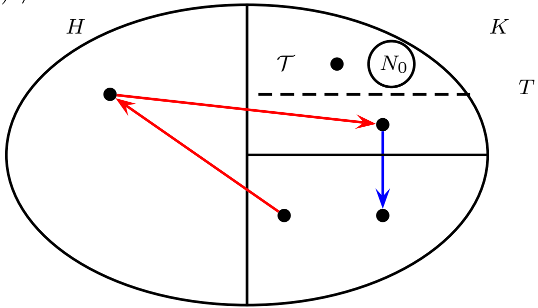
Nos fijamos en el conjunto $T = \{u \in K | \exists v \in K, uv \in A(D_1)\} \neq \emptyset$
$\mathcal{T} = \{v \in T | \forall u \in K \setminus T \;\; (v, u) \notin A(D_1)\} = \emptyset$
$K \setminus T$ es seminúcleo módulo $A(D_1)$ de H.
$\mathcal{T} = \{v \in T | \forall u \in K \setminus T \;\; (v, u) \notin A(D_1)\} \neq \emptyset$

$H \subset D$ y K núcleo de $H \cap D_2$
$A(D_1) \cap A(H) \neq \emptyset$



Nos fijamos en el conjunto $T = \{u \in K | \exists v \in K, uv \in A(D_1)\} \neq \emptyset$
$\mathcal{T} = \{v \in T | \forall u \in K \setminus T \ \ (v, u) \notin A(D_1)\} = \emptyset$
$K \setminus T$ es seminúcleo módulo $A(D_1)$ de H.
$\mathcal{T} = \{v \in T | \forall u \in K \setminus T \ \ (v, u) \notin A(D_1)\} \neq \emptyset$
$(K \setminus T) \cup N_0$ es seminúcleo módulo $A(D_1)$ de H.

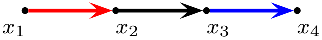
$H \subset D$ y K núcleo de $H \cap D_2$
$A(D_1) \cap A(H) \neq \emptyset$

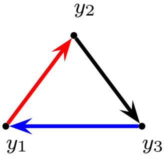


Nos fijamos en el conjunto $T = \{u \in K | \exists v \in K, uv \in A(D_1)\} \neq \emptyset$
$\mathcal{T} = \{v \in T | \forall u \in K \setminus T \ \ (v, u) \notin A(D_1)\} = \emptyset$
$K \setminus T$ es seminúcleo módulo $A(D_1)$ de H.
$\mathcal{T} = \{v \in T | \forall u \in K \setminus T \ \ (v, u) \notin A(D_1)\} \neq \emptyset$
$(K \setminus T) \cup N_0$ es seminúcleo módulo $A(D_1)$ de H.

Theorem

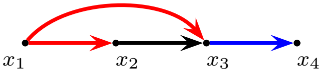
$D_1 \subset D$ donde cada ciclo tiene una flecha simétrica y $D - A(D_1) = D_2$. Supongamos que las trayectorias dirigidas de longitud 3:

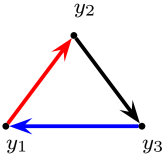




Theorem

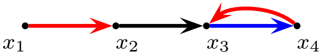
$D_1 \subset D$ donde cada ciclo tiene una flecha simétrica y $D - A(D_1) = D_2$.
Supongamos que las trayectorias dirigidas de longitud 3:

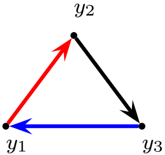




Theorem

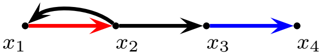
$D_1 \subset D$ donde cada ciclo tiene una flecha simétrica y $D - A(D_1) = D_2$. Supongamos que las trayectorias dirigidas de longitud 3:

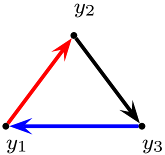




Theorem

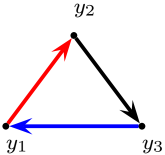
$D_1 \subset D$ donde cada ciclo tiene una flecha simétrica y $D - A(D_1) = D_2$. Supongamos que las trayectorias dirigidas de longitud 3:





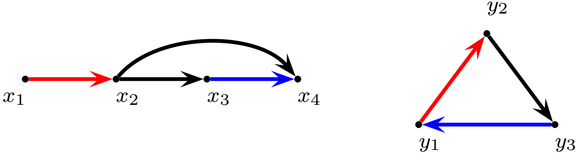
Theorem

$D_1 \subset D$ donde cada ciclo tiene una flecha simétrica y $D - A(D_1) = D_2$. Supongamos que las trayectorias dirigidas de longitud 3:



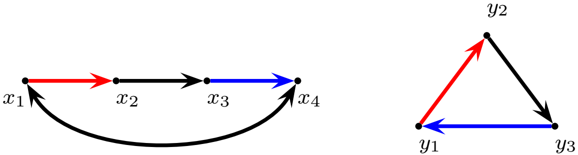
Theorem

$D_1 \subset D$ donde cada ciclo tiene una flecha simétrica y $D - A(D_1) = D_2$.
Supongamos que las trayectorias dirigidas de longitud 3:



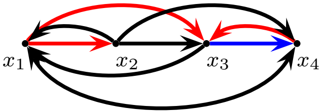
Theorem

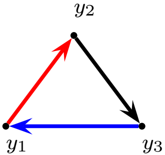
$D_1 \subset D$ donde cada ciclo tiene una flecha simétrica y $D - A(D_1) = D_2$. Supongamos que las trayectorias dirigidas de longitud 3:



Theorem

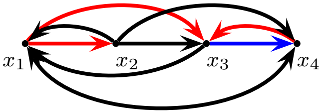
$D_1 \subset D$ donde cada ciclo tiene una flecha simétrica y $D - A(D_1) = D_2$.
Supongamos que las trayectorias dirigidas de longitud 3:

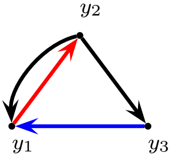




Theorem

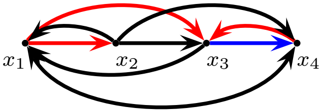
$D_1 \subset D$ donde cada ciclo tiene una flecha simétrica y $D - A(D_1) = D_2$. Supongamos que las trayectorias dirigidas de longitud 3:

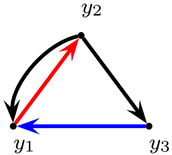




Theorem

$D_1 \subset D$ donde cada ciclo tiene una flecha simétrica y $D - A(D_1) = D_2$. Supongamos que las trayectorias dirigidas de longitud 3:

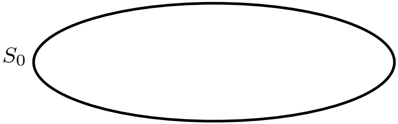




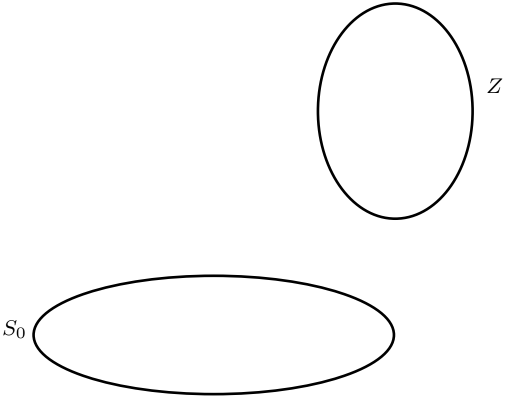
D_2 es núcleo perfecta $\Longrightarrow$ D es núcleo perfecta.

$S = \{S \subseteq V(D) | S$ es seminúcleo módulo $A(D_1)$ de $D\} \neq \emptyset$.

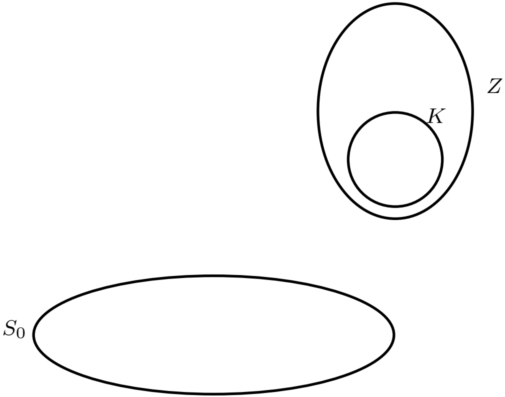
$\mathcal{S} = \{S \subseteq V(D) | S$ es seminúcleo módulo $A(D_1)$ de $D\} \neq \emptyset$.
S_0 es el pozo de $D_{\mathcal{S}}$.



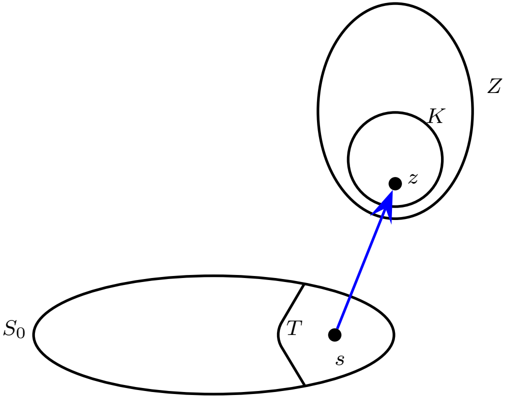
$\mathcal{S} = \{S \subseteq V(D) | S$ es seminúcleo módulo $A(D_1)$ de $D\} \neq \emptyset$.
S_0 es el pozo de $D_{\mathcal{S}}$. P.D. S_0 es núcleo de D.



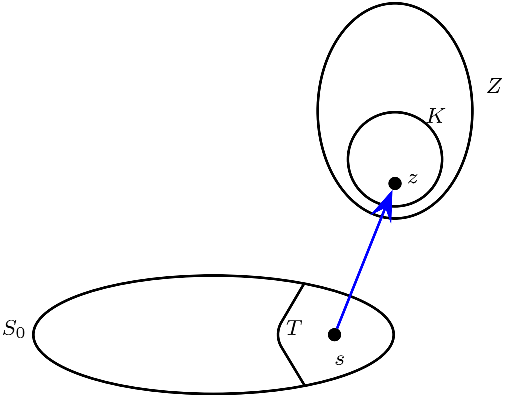
$\mathcal{S} = \{S \subseteq V(D) | S$ es seminúcleo módulo $A(D_1)$ de $D\} \neq \emptyset$.
S_0 es el pozo de $D_{\mathcal{S}}$. P.D. S_0 es núcleo de D.



$\mathcal{S} = \{S \subseteq V(D) | S$ es seminúcleo módulo $A(D_1)$ de $D\} \neq \emptyset$.
S_0 es el pozo de $D_{\mathcal{S}}$. P.D. S_0 es núcleo de D.

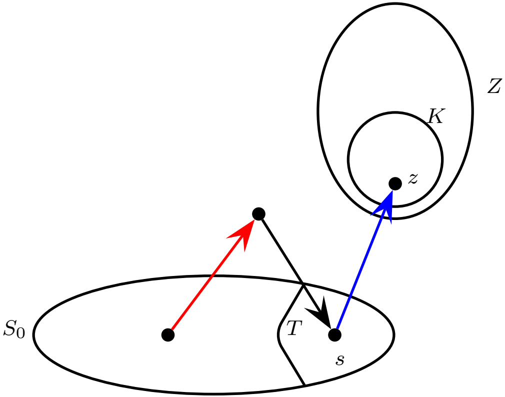


$\mathcal{S} = \{S \subseteq V(D) | S$ es seminúcleo módulo $A(D_1)$ de $D\} \neq \emptyset$.
S_0 es el pozo de $D_{\mathcal{S}}$. P.D. S_0 es núcleo de D.



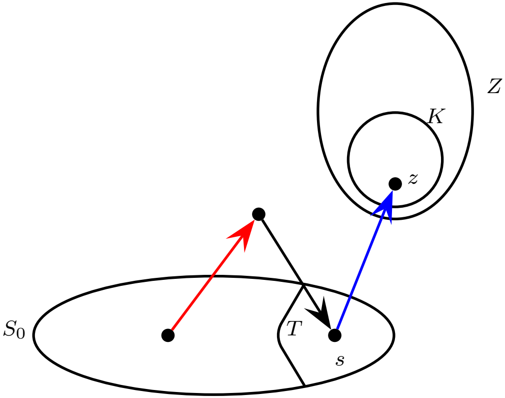
$(S_0 \setminus T) \cup K$ es seminúcleo módulo $A(D_1)$ de D (trayectorias)

$\mathcal{S} = \{S \subseteq V(D) | S$ es seminúcleo módulo $A(D_1)$ de $D\} \neq \emptyset$.
S_0 es el pozo de $D_{\mathcal{S}}$. P.D. S_0 es núcleo de D.



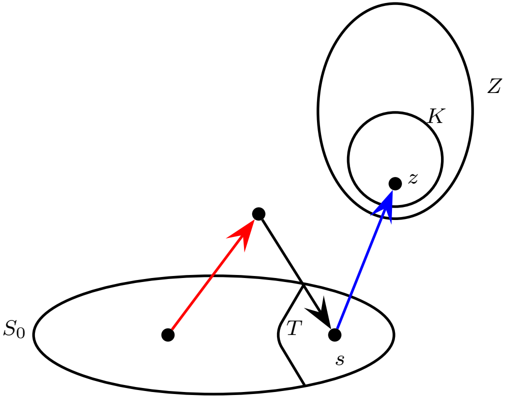
$(S_0 \setminus T) \cup K$ es seminúcleo módulo $A(D_1)$ de D (trayectorias)

$\mathcal{S} = \{S \subseteq V(D) | S$ es seminúcleo módulo $A(D_1)$ de $D\} \neq \emptyset$.
S_0 es el pozo de $D_{\mathcal{S}}$. P.D. S_0 es núcleo de D.



$(S_0 \setminus T) \cup K$ es seminúcleo módulo $A(D_1)$ de D (trayectorias)
pero $S_0 \rightarrow (S_0 \setminus T) \cup K$!!!!

$\mathcal{S} = \{S \subseteq V(D) | S$ es seminúcleo módulo $A(D_1)$ de $D\} \neq \emptyset$.
S_0 es el pozo de $D_{\mathcal{S}}$. P.D. S_0 es núcleo de D.



$(S_0 \setminus T) \cup K$ es seminúcleo módulo $A(D_1)$ de D (trayectorias)
pero $S_0 \to (S_0 \setminus T) \cup K$!!!!
por lo tanto S_0 es núcleo de D.

Gracias