Número Cromático de Borel

Fernando Hernández   José de Jesús Pelayo Gómez

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas

7 de Marzo de 2013

Contenido

1. Preliminares
   - Motivación
   - Teorema de Erdös-Bruijn
   - Un ejemplo
2. Juguemos a las escondidas
   - ¿Qué ocupamos?
   - Contemos, pero sólo hasta el 3
   - Uno dos tres por todos mis compañeros!!
3. Algunos otros resultados
   - Todos los valores son posibles
   - Grado máximo

La gráfica de la distancia unitaria

Sea G la gráfica dada por:

- $V(G) = \mathbb{R}^2$

La gráfica de la distancia unitaria

Sea G la gráfica dada por:

- $V(G) = \mathbb{R}^2$
- x, y son adyacentes si $d(x, y) = 1$.

Surgen algunas preguntas

Podemos preguntarnos algunas cosas sobre esta gráfica.

Surgen algunas preguntas

Podemos preguntarnos algunas cosas sobre esta gráfica.

- ¿Por qué la definimos así?

Surgen algunas preguntas

Podemos preguntarnos algunas cosas sobre esta gráfica.

- ¿Por qué la definimos así?
- ¿Tiene algo interesante esta gráfica?

Surgen algunas preguntas

Podemos preguntarnos algunas cosas sobre esta gráfica.

- ¿Por qué la definimos así?
- ¿Tiene algo interesante esta gráfica?
- ¿Por qué estudiar gráficas infinitas?

Surgen algunas preguntas

Podemos preguntarnos algunas cosas sobre esta gráfica.

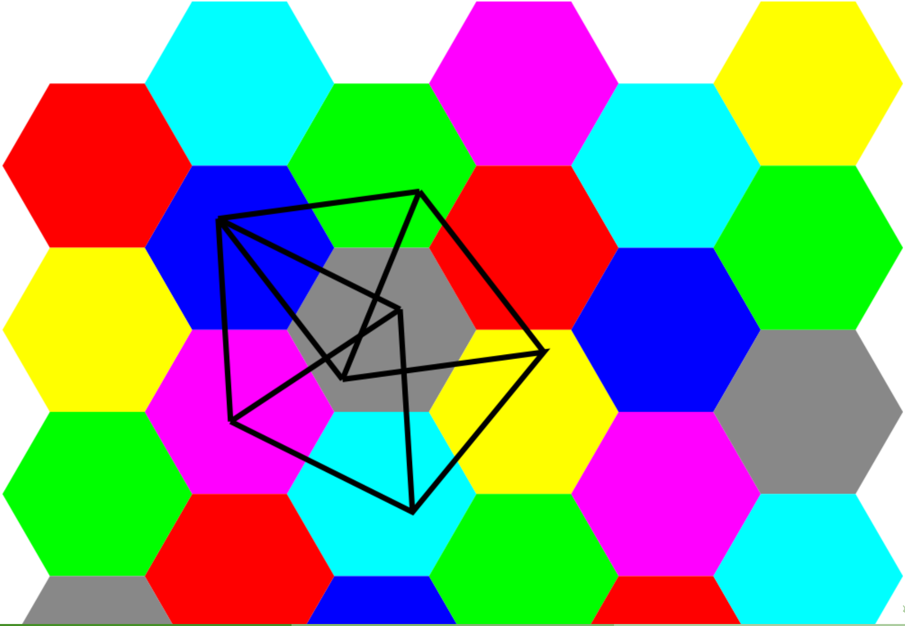
- ¿Por qué la definimos así?
- ¿Tiene algo interesante esta gráfica?
- ¿Por qué estudiar gráficas infinitas?
- ¿Cuál es el número cromático de G?

Surgen algunas preguntas

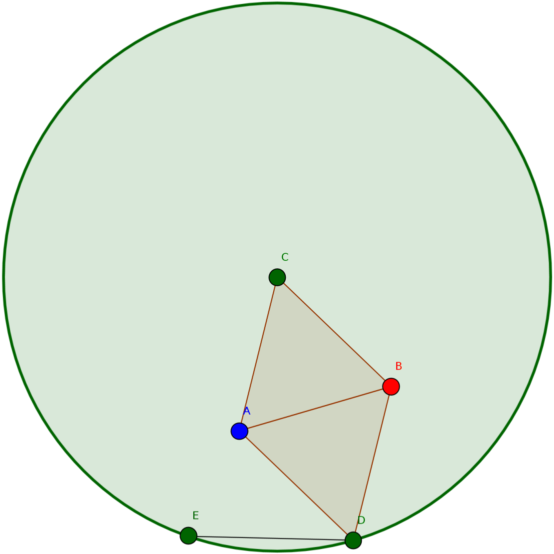
Podemos preguntarnos algunas cosas sobre esta gráfica.

- ¿Por qué la definimos así?
- ¿Tiene algo interesante esta gráfica?
- ¿Por qué estudiar gráficas infinitas?
- ¿Cuál es el número cromático de G?
- Bueno, como no soy filósofo, sólo responderé (en parte) la última pregunta.

Un dibujito



Otro dibujo



Parte de la respuesta

De estas dos observaciones se sigue que $\chi(G) \in \{4, 5, 6, 7\}$.

Parte de la respuesta

De estas dos observaciones se sigue que $\chi(G) \in \{4, 5, 6, 7\}$. No es muy difícil probar que toda subgráfica finita de G tiene número cromático 4.

Parte de la respuesta

De estas dos observaciones se sigue que $\chi(G) \in \{4, 5, 6, 7\}$. No es muy difícil probar que toda subgráfica finita de G tiene número cromático 4. Si soponemos Axioma de Elección resutla que $\chi(G) = 4$.

Parte de la respuesta

De estas dos observaciones se sigue que $\chi(G) \in \{4, 5, 6, 7\}$. No es muy difícil probar que toda subgráfica finita de G tiene número cromático 4. Si soponemos Axioma de Elección resutla que $\chi(G) = 4$. Si todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son medibles según Lebesgue, entonces $\chi(G) \in \{5, 6, 7\}$.

Teorema de Erdös-Bruijn

Sea G una gráfica. Entonces $\chi(G) \leq k$ si y sólo si $\chi(H) \leq k$ para toda H subgráfica finita de G.

Teorema de Erdös-Bruijn

Sea G una gráfica. Entonces $\chi(G) \leq k$ si y sólo si $\chi(H) \leq k$ para toda H subgráfica finita de G. Demostración:

Teorema de Erdös-Bruijn

Sea G una gráfica. Entonces $\chi(G) \leq k$ si y sólo si $\chi(H) \leq k$ para toda H subgráfica finita de G. Demostración:

- Una implicación es obvia.

Teorema de Erdös-Bruijn

Sea G una gráfica. Entonces $\chi(G) \leq k$ si y sólo si $\chi(H) \leq k$ para toda H subgráfica finita de G. Demostración:

- Una implicación es obvia. Para la otra, consideremos a $k = \{0, 1, ..., k-1\}$ con la topología discreta.

Teorema de Erdös-Bruijn

Sea G una gráfica. Entonces $\chi(G) \leq k$ si y sólo si $\chi(H) \leq k$ para toda H subgráfica finita de G. Demostración:

- Una implicación es obvia. Para la otra, consideremos a $k = \{0, 1, ..., k-1\}$ con la topología discreta.
- Sea k^V el conjunto de funciones de V en k con la topología producto.

Teorema de Erdös-Bruijn

Sea G una gráfica. Entonces $\chi(G) \leq k$ si y sólo si $\chi(H) \leq k$ para toda H subgráfica finita de G. Demostración:

- Una implicación es obvia. Para la otra, consideremos a $k = \{0, 1, ..., k-1\}$ con la topología discreta.
- Sea k^V el conjunto de funciones de V en k con la topología producto.
- Claro que k es compacto, pues es finito. Por teorema de Tychonoff k^V es compacto.

Demostración

- Sea $F_H = \{f \in k^V : f|_H$ es buena coloración de H$\}$.

Demostración

- Sea $F_H = \{f \in k^V : f|_H$ es buena coloración de H$\}$.
- Claramente $\{F_H\}_{H \leq G}$ y H finita, tiene la PIF.

Demostración

- Sea $F_H = \{f \in k^V : f|_H \text{ es buena coloración de H}\}$.
- Claramente $\{F_H\}_{H \leq G}$ y H finita, tiene la PIF.
- Sea $f \notin F_H$, entonces existen $u, v \in V(H)$ tales que $a = f(u) = f(v)$ con u y v adyacentes en H. Así $U = \{g \in k^V : g(u) = g(v) = a\}$ es abierto básico de la topología producto que contiene a f y no intersecta a F_H.

Demostración

- Sea $F_H = \{f \in k^V : f|_H \text{ es buena coloración de H}\}$.
- Claramente $\{F_H\}_{H \leq G}$ y H finita, tiene la PIF.
- Sea $f \notin F_H$, entonces existen $u, v \in V(H)$ tales que $a = f(u) = f(v)$ con u y v adyacentes en H. Así $U = \{g \in k^V : g(u) = g(v) = a\}$ es abierto básico de la topología producto que contiene a f y no intersecta a F_H.
- De este modo f es punto interior de $k^V \setminus F_H$ por lo que $k^V \setminus F_H$ es abierto y entonces F_H es cerrado.

Demostración

- Sea $F_H = \{f \in k^V : f|_H \text{ es buena coloración de H}\}$.
- Claramente $\{F_H\}_{H \leq G}$ y H finita, tiene la PIF.
- Sea $f \notin F_H$, entonces existen $u, v \in V(H)$ tales que $a = f(u) = f(v)$ con u y v adyacentes en H. Así $U = \{g \in k^V : g(u) = g(v) = a\}$ es abierto básico de la topología producto que contiene a f y no intersecta a F_H.
- De este modo f es punto interior de $k^V \setminus F_H$ por lo que $k^V \setminus F_H$ es abierto y entonces F_H es cerrado.
- Por compacidad, $\bigcap_H F_H \neq \emptyset$ y cualquier función en la intersección es una buena coloración para G. ■

Definiciones

Antes de continuar, unas pocas definiciones.

Definiciones

Antes de continuar, unas pocas definiciones.

- Un espacio topológico se dirá que es polaco si es completamente metrizable y separable.

Definiciones

Antes de continuar, unas pocas definiciones.

- Un espacio topológico se dirá que es polaco si es completamente metrizable y separable.
- $\mathbb{R}$,

Definiciones

Antes de continuar, unas pocas definiciones.

- Un espacio topológico se dirá que es polaco si es completamente metrizable y separable.
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$,

Definiciones

Antes de continuar, unas pocas definiciones.

- Un espacio topológico se dirá que es polaco si es completamente metrizable y separable.
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$,

Definiciones

Antes de continuar, unas pocas definiciones.

- Un espacio topológico se dirá que es polaco si es completamente metrizable y separable.
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{I}$,

Definiciones

Antes de continuar, unas pocas definiciones.

- Un espacio topológico se dirá que es polaco si es completamente metrizable y separable.
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{I}^{\mathbb{N}}$,

Definiciones

Antes de continuar, unas pocas definiciones.

- Un espacio topológico se dirá que es polaco si es completamente metrizable y separable.
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{I}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{P}$,

Definiciones

Antes de continuar, unas pocas definiciones.

- Un espacio topológico se dirá que es polaco si es completamente metrizable y separable.
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{I}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{P}$, $2^{\mathbb{N}}$,

Definiciones

Antes de continuar, unas pocas definiciones.

- Un espacio topológico se dirá que es polaco si es completamente metrizable y separable.
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{I}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{P}$, $2^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$,

Definiciones

Antes de continuar, unas pocas definiciones.

- Un espacio topológico se dirá que es polaco si es completamente metrizable y separable.
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{I}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{P}$, $2^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $S_{\mathbb{N}}$ son polacos.

Definiciones

Antes de continuar, unas pocas definiciones.

- Un espacio topológico se dirá que es polaco si es completamente metrizable y separable.
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{I}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{P}$, $2^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $S_{\mathbb{N}}$ son polacos.
- La σ-álgebra de Borel es la generada por los abiertos (o cerrados).

Definiciones

Antes de continuar, unas pocas definiciones.

- Un espacio topológico se dirá que es polaco si es completamente metrizable y separable.
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{I}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{P}$, $2^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $S_{\mathbb{N}}$ son polacos.
- La σ-álgebra de Borel es la generada por los abiertos (o cerrados).
- Una función se llam Borel si regresa conjuntos abiertos en conjuntos Borel (por ejemplo, las funciones continuas).

Definiciones

Antes de continuar, unas pocas definiciones.

- Un espacio topológico se dirá que es polaco si es completamente metrizable y separable.
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{I}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{P}$, $2^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $S_{\mathbb{N}}$ son polacos.
- La σ-álgebra de Borel es la generada por los abiertos (o cerrados).
- Una función se llam Borel si regresa conjuntos abiertos en conjuntos Borel (por ejemplo, las funciones continuas).
- Se define una coloración Borel como una buena coloración y tal que la función es Borel (pensando el conjunto de colores con la topología discreta).

Ahora sí, el ejemplo

Sea $\mathcal{H}$ la gráfica tal que los vértices son los reales y dos vértices son adyacentes si su distancia es una potencia (entera) de 3. Entonces:

Ahora sí, el ejemplo

Sea $\mathcal{H}$ la gráfica tal que los vértices son los reales y dos vértices son adyacentes si su distancia es una potencia (entera) de 3. Entonces:

- $\chi(\mathcal{H}) = 2$ con Axioma de Elección.

Ahora sí, el ejemplo

Sea $\mathcal{H}$ la gráfica tal que los vértices son los reales y dos vértices son adyacentes si su distancia es una potencia (entera) de 3. Entonces:

- $\chi(\mathcal{H}) = 2$ con Axioma de Elección.
- $\chi(\mathcal{H}) > \aleph_0$ si asumimos que todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ son medibles.

Ahora sí, el ejemplo

Sea $\mathcal{H}$ la gráfica tal que los vértices son los reales y dos vértices son adyacentes si su distancia es una potencia (entera) de 3. Entonces:

- $\chi(\mathcal{H}) = 2$ con Axioma de Elección.
- $\chi(\mathcal{H}) > \aleph_0$ si asumimos que todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ son medibles.
- $\chi_B(\mathcal{H}) > \aleph_0$

Ahora sí, el ejemplo

Sea $\mathcal{H}$ la gráfica tal que los vértices son los reales y dos vértices son adyacentes si su distancia es una potencia (entera) de 3. Entonces:

- $\chi(\mathcal{H}) = 2$ con Axioma de Elección.
- $\chi(\mathcal{H}) > \aleph_0$ si asumimos que todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ son medibles.
- $\chi_B(\mathcal{H}) > \aleph_0$
- $\chi_B(\mathcal{H}) = \mathfrak{c}$ con Hipótesis del Continuo o con Axioma de Martin.

Ahora sí, el ejemplo

- Sea $(x_0, x_1, ..., x_{n-1})$ un ciclo de $\mathcal{H}$. Entonces $|x_i - x_{i+1}| = 3^{n_i}$, para $i \in \mathbb{Z}_n$.

Ahora sí, el ejemplo

- Sea $(x_0, x_1, ..., x_{n-1})$ un ciclo de $\mathcal{H}$. Entonces $|x_i - x_{i+1}| = 3^{n_i}$, para $i \in \mathbb{Z}_n$.
- Además $\sum_{\imath \in \mathbb{Z}_n} \pm(x_i - x_{i+1}) = 0$.

Ahora sí, el ejemplo

- Sea $(x_0, x_1, ..., x_{n-1})$ un ciclo de $\mathcal{H}$. Entonces $|x_i - x_{i+1}| = 3^{n_i}$, para $i \in \mathbb{Z}_n$.
- Además $\sum_{\imath \in \mathbb{Z}_n} \pm(x_i - x_{i+1}) = 0$.
- Sea $n = min\{n_i | i \in \mathbb{Z}_n\}$.

Ahora sí, el ejemplo

- Sea $(x_0, x_1, ..., x_{n-1})$ un ciclo de $\mathcal{H}$. Entonces $|x_i - x_{i+1}| = 3^{n_i}$, para $i \in \mathbb{Z}_n$.
- Además $\sum_{\imath \in \mathbb{Z}_n} \pm(x_i - x_{i+1}) = 0$.
- Sea $n = min\{n_i | i \in \mathbb{Z}_n\}$. De aquí que $3^n \sum_{\imath \in \mathbb{Z}_n} \pm 3^{n_i - n} = 0$.

Ahora sí, el ejemplo

- Sea $(x_0, x_1, ..., x_{n-1})$ un ciclo de $\mathcal{H}$. Entonces $|x_i - x_{i+1}| = 3^{n_i}$, para $i \in \mathbb{Z}_n$.
- Además $\sum_{\imath \in \mathbb{Z}_n} \pm(x_i - x_{i+1}) = 0$.
- Sea $n = min\{n_i | i \in \mathbb{Z}_n\}$. De aquí que $3^n \sum_{\imath \in \mathbb{Z}_n} \pm 3^{n_i - n} = 0$.
- Los sumandos son todos impares y la suma da 0, así en particular hay una cantidad par de ellos y por lo tanto $\mathcal{H}$ no tiene ciclos de longitud impar.

Ahora sí, el ejemplo

- Sea $(x_0, x_1, ..., x_{n-1})$ un ciclo de $\mathcal{H}$. Entonces $|x_i - x_{i+1}| = 3^{n_i}$, para $i \in \mathbb{Z}_n$.
- Además $\sum_{\imath \in \mathbb{Z}_n} \pm(x_i - x_{i+1}) = 0$.
- Sea $n = min\{n_i | i \in \mathbb{Z}_n\}$. De aquí que $3^n \sum_{\imath \in \mathbb{Z}_n} \pm 3^{n_i - n} = 0$.
- Los sumandos son todos impares y la suma da 0, así en particular hay una cantidad par de ellos y por lo tanto $\mathcal{H}$ no tiene ciclos de longitud impar.
- Por teorema de Erdös-Bruijn $\chi_B(\mathcal{H}) = 2$ (aquí usamos elección).

Ahora sí, el ejemplo

- Supongamos que tenemos una coloración con $\aleph_0$ colores, y sean $A_0, A_1, \ldots$ Las clases cromáticas.

Ahora sí, el ejemplo

- Supongamos que tenemos una coloración con $\aleph_0$ colores, y sean $A_0, A_1, \ldots$ Las clases cromáticas.
- Si todos los $A_n's$ son medibles entonces existe A_k de medida postivia.

Ahora sí, el ejemplo

- Supongamos que tenemos una coloración con $\aleph_0$ colores, y sean $A_0, A_1, \ldots$ Las clases cromáticas.
- Si todos los $A_n's$ son medibles entonces existe A_k de medida postivia.
- Es un ejercicio clásico de medida probar que existe $\epsilon > 0$ tal que $(-\epsilon, \epsilon) \subseteq A_k - A_k$ (teorema de Steinhaus).

Ahora sí, el ejemplo

- Supongamos que tenemos una coloración con $\aleph_0$ colores, y sean $A_0, A_1, ...$ Las clases cromáticas.
- Si todos los $A_n' s$ son medibles entonces existe A_k de medida postivia.
- Es un ejercicio clásico de medida probar que existe $\epsilon > 0$ tal que $(-\epsilon, \epsilon) \subseteq A_k - A_k$ (teorema de Steinhaus).
- Tomemos $N \in \mathbb{Z}$ suficientemente chico de modo que $3^N \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Ahora sí, el ejemplo

- Supongamos que tenemos una coloración con $\aleph_0$ colores, y sean $A_0, A_1, \ldots$ Las clases cromáticas.
- Si todos los $A_n's$ son medibles entonces existe A_k de medida postivia.
- Es un ejercicio clásico de medida probar que existe $\epsilon > 0$ tal que $(-\epsilon, \epsilon) \subseteq A_k - A_k$ (teorema de Steinhaus).
- Tomemos $N \in \mathbb{Z}$ suficientemente chico de modo que $3^N \in (-\epsilon, \epsilon)$.
- Entonces en A_k hay dos puntos a distancia 3^N y esos dos puntos son adyacentes.

Ahora sí, el ejemplo

Hasta aquí hemos probado las afirmaciones 1 a 3 porque los conjuntos Borel son medibles.

Ahora sí, el ejemplo

Hasta aquí hemos probado las afirmaciones 1 a 3 porque los conjuntos Borel son medibles. La última afirmación es obvia con hipótesis del continuo.

Ahora sí, el ejemplo

Hasta aquí hemos probado las afirmaciones 1 a 3 porque los conjuntos Borel son medibles. La última afirmación es obvia con hipótesis del continuo. Para la última parte de la demostración basta recordar que unión de κ conjuntos de medida 0 es medible y de medida 0, asumiendo axioma de Martin.

Proposición 1

Sean (X, τ) un espacio polaco y $f : X \to \mathbb{N}$ una función *Borel*. Entonces, existe topología polaca σ tal que f es continua con esa topología.
Demostración:

Proposición 1

Sean (X, τ) un espacio polaco y $f : X \to \mathbb{N}$ una función *Borel*. Entonces, existe topología polaca σ tal que f es continua con esa topología.
Demostración:

- Sea (X, τ) polaco y sea $A \subset X$ cerrado. Entonces existe $\tau \subset \tau_A$ topología polaca tal que A es *clopen*.

Proposición 1

Sean (X, τ) un espacio polaco y $f : X \to \mathbb{N}$ una función *Borel*. Entonces, existe topología polaca σ tal que f es continua con esa topología.
Demostración:

- Sea (X, τ) polaco y sea $A \subset X$ cerrado. Entonces existe $\tau \subset \tau_A$ topología polaca tal que A es *clopen*.
- Si $\tau_1 \subset \tau_2 \subset \ldots$ son topologías polacas sobre X, entonces $\langle \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tau_n \rangle$ es polaca.

Proposición 1

Sean (X, τ) un espacio polaco y $f : X \to \mathbb{N}$ una función *Borel*. Entonces, existe topología polaca σ tal que f es continua con esa topología.
Demostración:

- Sea (X, τ) polaco y sea $A \subset X$ cerrado. Entonces existe $\tau \subset \tau_A$ topología polaca tal que A es *clopen*.
- Si $\tau_1 \subset \tau_2 \subset \dots$ son topologías polacas sobre X, entonces $\langle \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tau_n \rangle$ es polaca.
- Sea $\mathcal{A} = \{A \subset X |$ existe $\tau \subset \tau_A$ topología polaca en donde A es *clopen*$\}$.

Proposición 1

Sean (X, τ) un espacio polaco y $f : X \to \mathbb{N}$ una función *Borel*. Entonces, existe topología polaca σ tal que f es continua con esa topología.
Demostración:

- Sea (X, τ) polaco y sea $A \subset X$ cerrado. Entonces existe $\tau \subset \tau_A$ topología polaca tal que A es *clopen*.
- Si $\tau_1 \subset \tau_2 \subset \ldots$ son topologías polacas sobre X, entonces $\langle \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tau_n \rangle$ es polaca.
- Sea $\mathcal{A} = \{A \subset X |$ existe $\tau \subset \tau_A$ topología polaca en donde A es *clopen*$\}$.
- $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ porque $\mathcal{A}$ es σ-álgebra y contine a los cerrados.

Proposición 1

- Consideremos $A_n = f^{-1}[\{n\}]$ y τ_n topología en la cual $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son *clopen*.

Proposición 1

- Consideremos $A_n = f^{-1}[\{n\}]$ y τ_n topología en la cual $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son *clopen*.
- Entonces en la topología $\langle \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tau_n \rangle$ cada A_n es abierto y de este modo f es continua. $\blacksquare$

Proposición 2

Sean X polaco y $\mathcal{D} = (X, A)$ una gráfica dirigida. Sea $\mathcal{G}$ la gráfica correspondiente a $\mathcal{D}$. Supongamos que para cada conjunto Borel $Y \subset X$ el conjunto $A^{-1}(Y)$ es Borel. Entonces $\chi_B(\mathcal{G}) \leq \aleph_0$ si y sólo si existe topología $\tau \subset \sigma$ tal que $x \notin cl_\sigma(A(x))$. Demotración:

Proposición 2

Sean X polaco y $\mathcal{D} = (X, A)$ una gráfica dirigida. Sea $\mathcal{G}$ la gráfica correspondiente a $\mathcal{D}$. Supongamos que para cada conjunto Borel $Y \subset X$ el conjunto $A^{-1}(Y)$ es Borel. Entonces $\chi_B(\mathcal{G}) \leq \aleph_0$ si y sólo si existe topología $\tau \subset \sigma$ tal que $x \notin cl_\sigma(A(x))$. Demotración:

- $\Leftarrow$: Sea $\{U_n\}$ una base para σ.

Proposición 2

Sean X polaco y $\mathcal{D} = (X, A)$ una gráfica dirigida. Sea $\mathcal{G}$ la gráfica correspondiente a $\mathcal{D}$. Supongamos que para cada conjunto Borel $Y \subset X$ el conjunto $A^{-1}(Y)$ es Borel. Entonces $\chi_B(\mathcal{G}) \leq \aleph_0$ si y sólo si existe topología $\tau \subset \sigma$ tal que $x \notin cl_\sigma(A(x))$. Demotración:

- $\Leftarrow$: Sea $\{U_n\}$ una base para σ. Sea $c(x) =$ el menor n tal que $x \in U_n$ y $U_n \cap A(x) = \emptyset$.

Proposición 2

Sean X polaco y $\mathcal{D} = (X, A)$ una gráfica dirigida. Sea $\mathcal{G}$ la gráfica correspondiente a $\mathcal{D}$. Supongamos que para cada conjunto Borel $Y \subset X$ el conjunto $A^{-1}(Y)$ es Borel. Entonces $\chi_B(\mathcal{G}) \leq \aleph_0$ si y sólo si existe topología $\tau \subset \sigma$ tal que $x \notin cl_\sigma(A(x))$. Demotración:

- $\Leftarrow$: Sea $\{U_n\}$ una base para σ. Sea $c(x) =$ el menor n tal que $x \in U_n$ y $U_n \cap A(x) = \emptyset$. Entonces c es Borel y buena coloración.

Proposición 2

Sean X polaco y $\mathcal{D} = (X, A)$ una gráfica dirigida. Sea $\mathcal{G}$ la gráfica correspondiente a $\mathcal{D}$. Supongamos que para cada conjunto Borel $Y \subset X$ el conjunto $A^{-1}(Y)$ es Borel. Entonces $\chi_B(\mathcal{G}) \leq \aleph_0$ si y sólo si existe topología $\tau \subset \sigma$ tal que $x \notin cl_\sigma(A(x))$. Demotración:

- $\Leftarrow$: Sea $\{U_n\}$ una base para σ. Sea $c(x) =$ el menor n tal que $x \in U_n$ y $U_n \cap A(x) = \emptyset$. Entonces c es Borel y buena coloración.
- $\Rightarrow$: Si $c : X \to \mathbb{N}$ es una coloración Borel, entonces sea σ topología Polaca tal que c es continua. Cada $A_n = f^{-1}[\{n\}]$ es σ-clopen. Así que $A_n \cap A(x) = \emptyset$. $\blacksquare$

Lema 1

Sean X Polaco y $\mathcal{D} = (X, A)$ una gráfica dirigida. Sea $\mathcal{G}$ la gráfica correspondiente a $\mathcal{D}$. Supongamos que para cada conjunto Borel $Y \subset X$ el conjunto $A^{-1}(Y)$ es Borel. Entonces $\chi_B(\mathcal{G}) \leq \aleph_0$ si cada vértice tiene exgrado finito. En particular si $\mathcal{G}$ está generada por una cantidad finita de funciones Borel entonces $\chi_B(\mathcal{G}) \leq \aleph_0$. Demotración:

Lema 1

Sean X Polaco y $\mathcal{D} = (X, A)$ una gráfica dirigida. Sea $\mathcal{G}$ la gráfica correspondiente a $\mathcal{D}$. Supongamos que para cada conjunto Borel $Y \subset X$ el conjunto $A^{-1}(Y)$ es Borel. Entonces $\chi_B(\mathcal{G}) \leq \aleph_0$ si cada vértice tiene exgrado finito. En particular si $\mathcal{G}$ está generada por una cantidad finita de funciones Borel entonces $\chi_B(\mathcal{G}) \leq \aleph_0$. Demotración:

- En Proposicón 2 tome $\sigma = \tau$.

Lema 2

Sea $s_n : n^{\mathbb{N}} \to n^{\mathbb{N}}$ dada por $s_n(x)_i = x_{i+1}$. Entonces $\chi_B(\mathcal{G}_{s_n}) \leq 3$.
Demotración por inducción sobre n:
n=2:

Lema 2

Sea $s_n : n^{\mathbb{N}} \to n^{\mathbb{N}}$ dada por $s_n(x)_i = x_{i+1}$. Entonces $\chi_B(\mathcal{G}_{s_n}) \leq 3$.
Demotración por inducción sobre n:
n=2:

- Partimos $2^{\mathbb{N}}$ como sigue:

Lema 2

Sea $s_n : n^{\mathbb{N}} \to n^{\mathbb{N}}$ dada por $s_n(x)_i = x_{i+1}$. Entonces $\chi_B(\mathcal{G}_{s_n}) \leq 3$.
Demotración por inducción sobre n:
n=2:

- Partimos $2^{\mathbb{N}}$ como sigue:
- $A_0 = \{x \in 2^{\mathbb{N}}$: x comienza con un número impar de ceros $\}$

Lema 2

Sea $s_n : n^{\mathbb{N}} \to n^{\mathbb{N}}$ dada por $s_n(x)_i = x_{i+1}$. Entonces $\chi_B(\mathcal{G}_{s_n}) \leq 3$.
Demotración por inducción sobre n:
n=2:

- Partimos $2^{\mathbb{N}}$ como sigue:
- $A_0 = \{x \in 2^{\mathbb{N}}$: x comienza con un número impar de ceros $\}$
- $A_1 = \{x \in 2^{\omega}$: x comienza con un número impar de unos $\}$

Lema 2

Sea $s_n : n^{\mathbb{N}} \to n^{\mathbb{N}}$ dada por $s_n(x)_i = x_{i+1}$. Entonces $\chi_B(\mathcal{G}_{s_n}) \leq 3$.
Demotración por inducción sobre n:
n=2:

- Partimos $2^{\mathbb{N}}$ como sigue:
- $A_0 = \{x \in 2^{\mathbb{N}}$: x comienza con un número impar de ceros $\}$
- $A_1 = \{x \in 2^{\omega}$: x comienza con un número impar de unos $\}$
- $A_2 = 2^{\mathbb{N}} \backslash (A_0 \cup A_1)$
  Ésta es una coloración Borel de $\mathcal{G}_{s_2}$

Lema 2

$n \to n+1$:

Lema 2

$n \to n+1$:

- Sea $c : n^{\mathbb{N}} \to 3$ una coloración Borel de $\mathcal{G}_{s_n}$. Ahora encontremos $c^* : (n+1)^{\mathbb{N}} \to 3$ coloración Borel.

Lema 2

$n \to n+1$:

- Sea $c : n^{\mathbb{N}} \to 3$ una coloración Borel de $\mathcal{G}_{s_n}$. Ahora encontremos $c^* : (n+1)^{\mathbb{N}} \to 3$ coloración Borel. Para $x \in (n+1)^{\mathbb{N}}$ consideremos los siguientes casos:

Lema 2

$n \to n+1$:

- Sea $c : n^{\mathbb{N}} \to 3$ una coloración Borel de $\mathcal{G}_{s_n}$. Ahora encontremos $c^* : (n+1)^{\mathbb{N}} \to 3$ coloración Borel. Para $x \in (n+1)^{\mathbb{N}}$ consideremos los siguientes casos:
- Si existe una infinidad de i's tales que $x_i = n$ y una infinidad tal que $x_i \in n$. Al conjunto de estos x's llamemoslo X_1

Lema 2

$n \to n+1$:

- Sea $c : n^{\mathbb{N}} \to 3$ una coloración Borel de $\mathcal{G}_{s_n}$. Ahora encontremos $c^* : (n+1)^{\mathbb{N}} \to 3$ coloración Borel. Para $x \in (n+1)^{\mathbb{N}}$ consideremos los siguientes casos:
- Si existe una infinidad de i's tales que $x_i = n$ y una infinidad tal que $x_i \in n$. Al conjunto de estos x's llamemoslo X_1
  $c^*(x) = 0$ si x comienza con un número impar de n's

Lema 2

$n \to n+1$:

- Sea $c : n^{\mathbb{N}} \to 3$ una coloración Borel de $\mathcal{G}_{s_n}$. Ahora encontremos $c^* : (n+1)^{\mathbb{N}} \to 3$ coloración Borel. Para $x \in (n+1)^{\mathbb{N}}$ consideremos los siguientes casos:
- Si existe una infinidad de i's tales que $x_i = n$ y una infinidad tal que $x_i \in n$. Al conjunto de estos x's llamemoslo X_1
  $c^*(x) = 0$ si x comienza con un número impar de n's
  $c^*(x) = 1$ si x comienza con un número impar de elementos de n

Lema 2

$n \to n+1$:

- Sea $c : n^{\mathbb{N}} \to 3$ una coloración Borel de $\mathcal{G}_{s_n}$. Ahora encontremos $c^* : (n+1)^{\mathbb{N}} \to 3$ coloración Borel. Para $x \in (n+1)^{\mathbb{N}}$ consideremos los siguientes casos:
- Si existe una infinidad de i's tales que $x_i = n$ y una infinidad tal que $x_i \in n$. Al conjunto de estos x's llamemoslo X_1
  $c^*(x) = 0$ si x comienza con un número impar de n's
  $c^*(x) = 1$ si x comienza con un número impar de elementos de n
  $c^*(x) = 2$ en otro caso

Lema 2

- En x sólo hay una contidad finita de coordenadas distintas de n.

Lema 2

- En x sólo hay una contidad finita de coordenadas distintas de n. A tales x's los agrupamos en un conjunto X_2

Lema 2

- En x sólo hay una contidad finita de coordenadas distintas de n. A tales x's los agrupamos en un conjunto X_2
- $c^*(x) = 0$ si x comienza con un número impar de elementos menores que n.

Lema 2

- En x sólo hay una contidad finita de coordenadas distintas de n. A tales x's los agrupamos en un conjunto X_2
- $c^*(x) = 0$ si x comienza con un número impar de elementos menores que n.
- $c^*(x) = 1$ si x comienza con un número impar de n's.

Lema 2

- En x sólo hay una contidad finita de coordenadas distintas de n. A tales x's los agrupamos en un conjunto X_2
- $c^*(x) = 0$ si x comienza con un número impar de elementos menores que n.
- $c^*(x) = 1$ si x comienza con un número impar de n's.
- $c^*(x) = 2$ en otro caso.

Lema 2

Lema 2

- En x solo hay una contidad finita de coordenadas iguales a n.

Lema 2

- En x solo hay una contidad finita de coordenadas iguales a n. Este es nuestro conjunto X_3.

Lema 2

- En x solo hay una contidad finita de coordenadas iguales a n. Este es nuestro conjunto X_3.
- Para $x \in X_3$ podemos escribir de manera única $x = s^\frown y$ donde $s \in (n+1)^k$ para algún k, $s_{k-1} = n$ (si $x > 0$) y $y \in n^{\mathbb{N}}$.

Lema 2

- En x solo hay una contidad finita de coordenadas iguales a n. Este es nuestro conjunto X_3.
- Para $x \in X_3$ podemos escribir de manera única $x = s^\frown y$ donde $s \in (n+1)^k$ para algún k, $s_{k-1} = n$ (si $x > 0$) y $y \in n^{\mathbb{N}}$. Entonces: $c^*(x) = (c(y) + k)_{mod 3}$

Lema 2

- En x solo hay una contidad finita de coordenadas iguales a n. Este es nuestro conjunto X_3.
- Para $x \in X_3$ podemos escribir de manera única $x = s^\frown y$ donde $s \in (n+1)^k$ para algún k, $s_{k-1} = n$ (si $x > 0$) y $y \in n^{\mathbb{N}}$. Entonces: $c^*(x) = (c(y) + k)_{mod 3}$
- Cada coloración en X_i es coloración Borel, además no hay arista entre x y y si $x \in X_i$ y $y \in X_j$ para $i \neq j$.

Teorema

Sean X un espacio polaco y $F : X \to X$ una función Borel. Entonces $\chi_B(\mathcal{G}_F) \in \{1, 2, 3, \aleph_0\}$.

Teorema

Sean X un espacio polaco y $F : X \to X$ una función Borel. Entonces $\chi_B(\mathcal{G}_F) \in \{1, 2, 3, \aleph_0\}$.

- Por *Lema 1* $\chi_B(\mathcal{G}_F) \leq \aleph_0$.

Teorema

Sean X un espacio polaco y $F : X \to X$ una función Borel. Entonces $\chi_B(\mathcal{G}_F) \in \{1, 2, 3, \aleph_0\}$.

- Por *Lema 1* $\chi_B(\mathcal{G}_F) \leq \aleph_0$.
- Supongamos que $\chi_B(\mathcal{G}_F) \leq n$ y sea $c : X \to n$ una buena coloración Borel.

Teorema

Sean X un espacio polaco y $F : X \to X$ una función Borel. Entonces $\chi_B(\mathcal{G}_F) \in \{1, 2, 3, \aleph_0\}$.

- Por *Lema 1* $\chi_B(\mathcal{G}_F) \leq \aleph_0$.
- Supongamos que $\chi_B(\mathcal{G}_F) \leq n$ y sea $c : X \to n$ una buena coloración Borel.
- Definimos $p : X \to n^{\mathbb{N}}$ por $p(x)_i = c(F^i(x))$.

Teorema

Sean X un espacio polaco y $F : X \to X$ una función Borel. Entonces $\chi_B(\mathcal{G}_F) \in \{1, 2, 3, \aleph_0\}$.

- Por *Lema 1* $\chi_B(\mathcal{G}_F) \leq \aleph_0$.
- Supongamos que $\chi_B(\mathcal{G}_F) \leq n$ y sea $c : X \to n$ una buena coloración Borel.
- Definimos $p : X \to n^{\mathbb{N}}$ por $p(x)_i = c(F^i(x))$.
- Sea $c' : n^{\mathbb{N}} \to 3$ una buena coloración (por *Lema 2*)

Teorema

Sean X un espacio polaco y $F : X \to X$ una función Borel. Entonces $\chi_B(\mathcal{G}_F) \in \{1, 2, 3, \aleph_0\}$.

- Por *Lema 1* $\chi_B(\mathcal{G}_F) \leq \aleph_0$.
- Supongamos que $\chi_B(\mathcal{G}_F) \leq n$ y sea $c : X \to n$ una buena coloración Borel.
- Definimos $p : X \to n^{\mathbb{N}}$ por $p(x)_i = c(F^i(x))$.
- Sea $c' : n^{\mathbb{N}} \to 3$ una buena coloración (por *Lema 2*)
- Entonces $\hat{c} = c' \circ p$ es una coloración Borel. $\blacksquare$

Ejemplos

Resulta que todos los valores son posibles.

Ejemplos

Resulta que todos los valores son posibles.

- Si por ejemplo tomados $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como la identidad entonces como $\mathcal{G}_F$ no tiene aristas y así $\chi_B(\mathcal{G}_F) = 1$.

Ejemplos

Resulta que todos los valores son posibles.

- Si por ejemplo tomados $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como la identidad entonces como $\mathcal{G}_F$ no tiene aristas y así $\chi_B(\mathcal{G}_F) = 1$.
- Tomando $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $F(x) = -x$ se tiene que $\chi_B(\mathcal{G}_F) = 2$.

Ejemplos

Resulta que todos los valores son posibles.

- Si por ejemplo tomados $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como la identidad entonces como $\mathcal{G}_F$ no tiene aristas y así $\chi_B(\mathcal{G}_F) = 1$.
- Tomando $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $F(x) = -x$ se tiene que $\chi_B(\mathcal{G}_F) = 2$.
- Para cualquier n resutla que $\chi_B(\mathcal{G}_{s_n}) = 3$ pues $\mathcal{G}_{s_n}$ tiene triángulos.

Ejemplos

Resulta que todos los valores son posibles.

- Si por ejemplo tomados $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como la identidad entonces como $\mathcal{G}_F$ no tiene aristas y así $\chi_B(\mathcal{G}_F) = 1$.
- Tomando $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $F(x) = -x$ se tiene que $\chi_B(\mathcal{G}_F) = 2$.
- Para cualquier n resutla que $\chi_B(\mathcal{G}_{s_n}) = 3$ pues $\mathcal{G}_{s_n}$ tiene triángulos.
- Si tomamos $F : [\mathbb{N}]^{\mathbb{N}} \to [\mathbb{N}]^{\mathbb{N}}$, entonces $\chi(\mathcal{G}_F) = 2$, pero $\chi_B(\mathcal{G}_F) = \aleph_0$.

Proposición

Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función cualquiera. Entonces $\chi_B(\mathcal{G}_f) \leq 3$.

Proposición

Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función cualquiera. Entonces $\chi_B(\mathcal{G}_f) \leq 3$. Demostración:

Proposición

Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función cualquiera. Entonces $\chi_B(\mathcal{G}_f) \leq 3$. Demostración:

- Es fácil probar que toda subgráfica finita tiene una coloración propia con 3 colores.

Proposición

Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función cualquiera. Entonces $\chi_B(\mathcal{G}_f) \leq 3$. Demostración:

- Es fácil probar que toda subgráfica finita tiene una coloración propia con 3 colores.
- Por teorema de Erdös el número cromático es menor o igual que 3

Proposición

Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función cualquiera. Entonces $\chi_B(\mathcal{G}_f) \leq 3$. Demostración:

- Es fácil probar que toda subgráfica finita tiene una coloración propia con 3 colores.
- Por teorema de Erdös el número cromático es menor o igual que 3
- Toda coloración es coloración Borel en $\mathbb{N}$ porque $\mathbb{N}$ es discreto.

Proposición

Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función cualquiera. Entonces $\chi_B(\mathcal{G}_f) \leq 3$. Demostración:

- Es fácil probar que toda subgráfica finita tiene una coloración propia con 3 colores.
- Por teorema de Erdös el número cromático es menor o igual que 3
- Toda coloración es coloración Borel en $\mathbb{N}$ porque $\mathbb{N}$ es discreto.
- ¡¡Esto es cierto incluso si cada vértice tiene grado infinito!!

Teorema

Sea G una gráfica sobre un espacio polaco X y tal que $N(Y)$ es Borel para cada Y Borel (Esto es cierto por ejemplo si cada vértice tiene grado finito o si G está generada por una cantidad numerable de funciones).

Teorema

Sea G una gráfica sobre un espacio polaco X y tal que $N(Y)$ es Borel para cada Y Borel (Esto es cierto por ejemplo si cada vértice tiene grado finito o si G está generada por una cantidad numerable de funciones). Si $\Delta(G) = k$, entonces $\chi_B(G) \leq k + 1$. Demostración:

Teorema

Sea G una gráfica sobre un espacio polaco X y tal que $N(Y)$ es Borel para cada Y Borel (Esto es cierto por ejemplo si cada vértice tiene grado finito o si G está generada por una cantidad numerable de funciones). Si $\Delta(G) = k$, entonces $\chi_B(G) \leq k + 1$. Demostración:

- Primero probamos que G tiene núcleo Borel.

Teorema

Sea G una gráfica sobre un espacio polaco X y tal que $N(Y)$ es Borel para cada Y Borel (Esto es cierto por ejemplo si cada vértice tiene grado finito o si G está generada por una cantidad numerable de funciones). Si $\Delta(G) = k$, entonces $\chi_B(G) \leq k + 1$. Demostración:

- Primero probamos que G tiene núcleo Borel.
- El resto de la prueba es por inducción y se hace idéntica que en gráficas finitas.

Teorema

Sea G una gráfica sobre un espacio polaco X y tal que $N(Y)$ es Borel para cada Y Borel (Esto es cierto por ejemplo si cada vértice tiene grado finito o si G está generada por una cantidad numerable de funciones). Si $\Delta(G) = k$, entonces $\chi_B(G) \leq k + 1$. Demostración:

- Primero probamos que G tiene núcleo Borel.
- El resto de la prueba es por inducción y se hace idéntica que en gráficas finitas.

Un "corolario" de esto es que si G está generada por n funciones todas ellas $\leq k$ a 1, entonces $\chi_B(G) \leq k(n+1)+1$

Datos curiosos

Realmente lo que se hizo en la prueba de $1, 2, 3$ fue encajar con una función Borel a cualquier gráfica generada por una función en otra gráfica de la cual ya sabíamos datos.

Datos curiosos

Realmente lo que se hizo en la prueba de $1, 2, 3$ fue encajar con una función Borel a cualquier gráfica generada por una función en otra gráfica de la cual ya sabíamos datos. Resulta que hay gráficas isomorfas pero de modo que no se pueden encajar la primera en la segunda ni viceversa con funciones Borel, aunque eso ya será tema de otra plática.

Fin

GRACIAS!!!