Un operador relacionado al operador de clanes

Rafael Villarroel Flores, UAEH
Trabajo conjunto con Paco Larrión y Miguel Pizaña

Coloquio Víctor Neumann-Lara

8 de marzo de 2013

Nuestras gráficas:

En esta plática consideraremos sólo gráficas simples

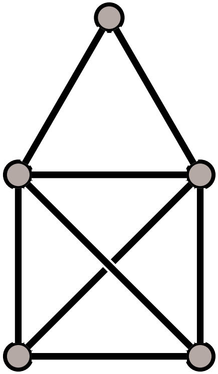
Nuestras gráficas:

En esta plática consideraremos sólo gráficas simples

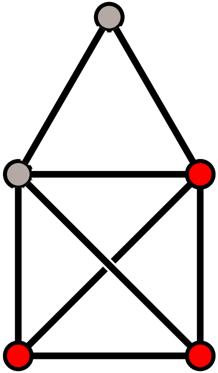
i.e. sin aristas dirigidas, sin lazos, sin aristas múltiples

Decimos que un conjunto de vértices X es una completa si para todos $x, y \in X$ con $x \neq y$ se tiene que $x \sim y$.

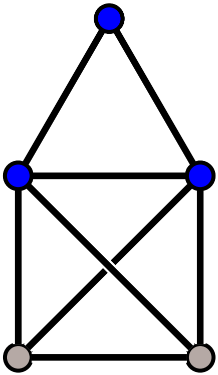
Decimos que un conjunto de vértices X es una completa si para todos $x, y \in X$ con $x \neq y$ se tiene que $x \sim y$.



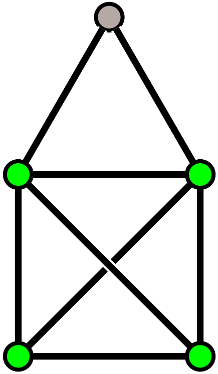
Decimos que un conjunto de vértices X es una completa si para todos $x, y \in X$ con $x \neq y$ se tiene que $x \sim y$.



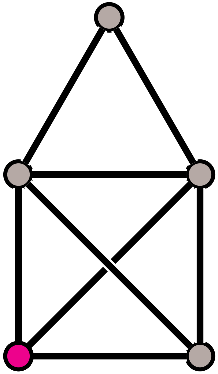
Decimos que un conjunto de vértices X es una completa si para todos $x, y \in X$ con $x \neq y$ se tiene que $x \sim y$.



Decimos que un conjunto de vértices X es una completa si para todos $x, y \in X$ con $x \neq y$ se tiene que $x \sim y$.

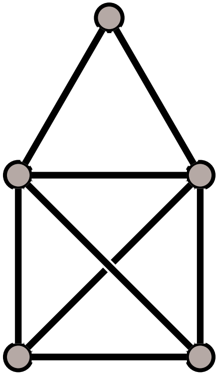


Decimos que un conjunto de vértices X es una completa si para todos $x, y \in X$ con $x \neq y$ se tiene que $x \sim y$.

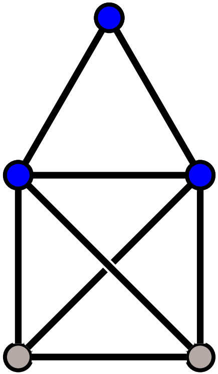


Un clan es una completa maximal.

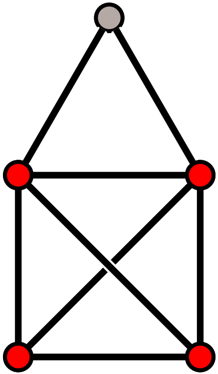
Un clan es una completa maximal.



Un clan es una completa maximal.



Un clan es una completa maximal.



La gráfica de clanes de G es la gráfica $K(G)$ tal que:

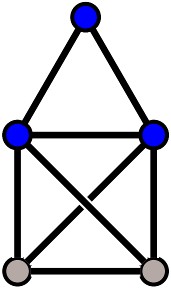
- $V\big(K(G)\big) = \{\, Q \subseteq V(G) \mid Q \text{ es clan de } G \,\}$,

La gráfica de clanes de G es la gráfica $K(G)$ tal que:

- $V\big(K(G)\big) = \{\, Q \subseteq V(G) \mid Q \text{ es clan de } G \,\}$,
- $E\big(K(G)\big) = \{\, \{Q_1, Q_2\} \mid Q_1 \neq Q_2, Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset \,\}$.

La gráfica de clanes de G es la gráfica $K(G)$ tal que:

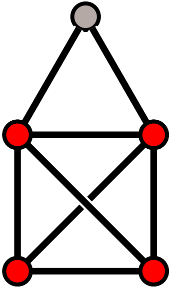
- $V\big(K(G)\big) = \{\, Q \subseteq V(G) \mid Q \text{ es clan de } G \,\}$,
- $E\big(K(G)\big) = \{\, \{Q_1, Q_2\} \mid Q_1 \neq Q_2, Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset \,\}$.



G

La gráfica de clanes de G es la gráfica $K(G)$ tal que:

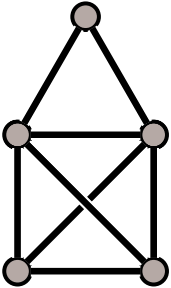
- $V\big(K(G)\big) = \{\, Q \subseteq V(G) \mid Q \text{ es clan de } G \,\}$,
- $E\big(K(G)\big) = \{\, \{Q_1, Q_2\} \mid Q_1 \neq Q_2, Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset \,\}$.



G

La gráfica de clanes de G es la gráfica $K(G)$ tal que:

- $V\big(K(G)\big) = \{\, Q \subseteq V(G) \mid Q \text{ es clan de } G \,\}$,
- $E\big(K(G)\big) = \{\, \{Q_1, Q_2\} \mid Q_1 \neq Q_2,\, Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset \,\}$.



G

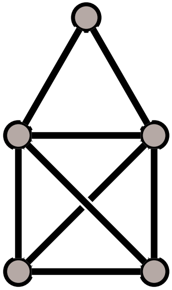
$K(G)$

Las gráficas iteradas de clanes se definen como:

$$K^0(G) = G, \qquad K^n(G) = K\Big(K^{n-1}(G)\Big), \quad n \geq 1.$$

Las gráficas iteradas de clanes se definen como:

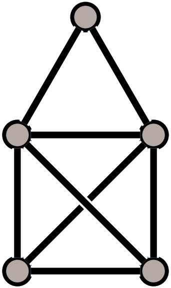
$$K^0(G) = G, \qquad K^n(G) = K\left(K^{n-1}(G)\right), \quad n \geq 1.$$



G

Las gráficas iteradas de clanes se definen como:

$$K^0(G) = G, \qquad K^n(G) = K\left(K^{n-1}(G)\right), \quad n \geq 1.$$

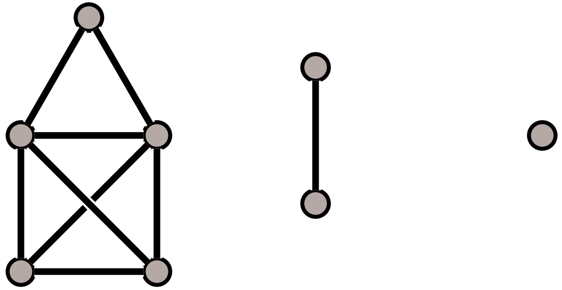


G

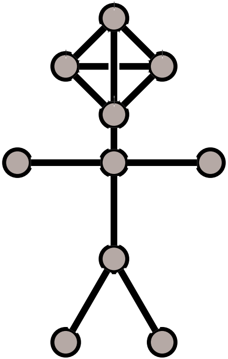
$K(G)$

Las gráficas iteradas de clanes se definen como:

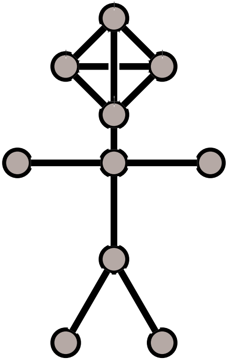
$$K^0(G) = G, \qquad K^n(G) = K\left(K^{n-1}(G)\right), \quad n \geq 1.$$



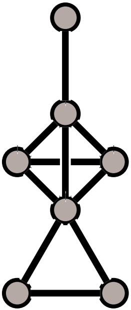
G $\qquad$ $K(G)$ $\qquad$ $K^2(G)$



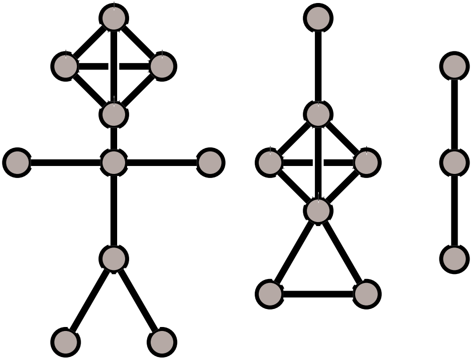
G



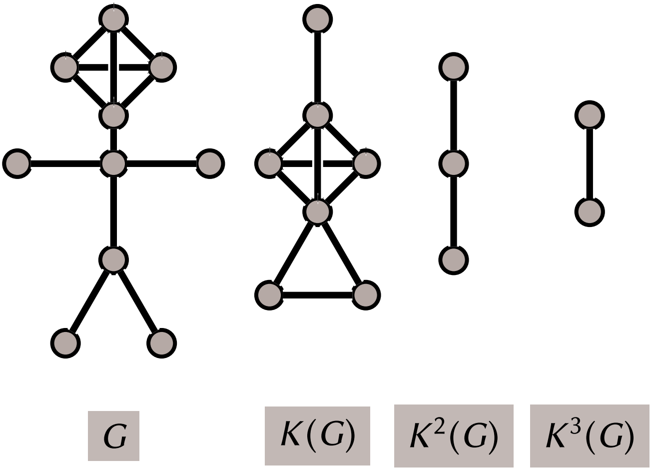
G

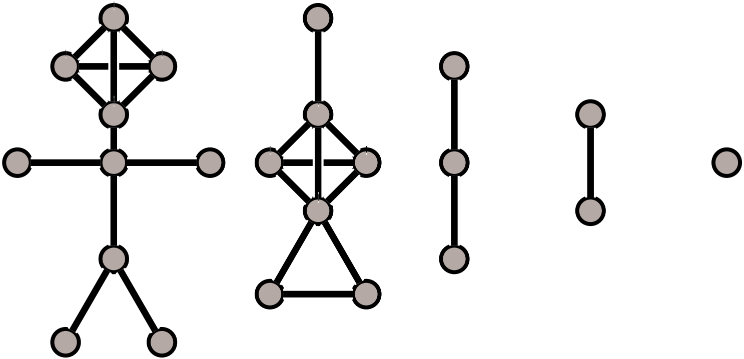


$K(G)$

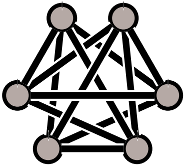


G $K(G)$ $K^{2}(G)$

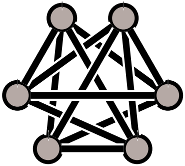

G
$K(G)$
$K^2(G)$
$K^3(G)$



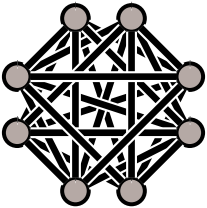
G $K(G)$ $K^2(G)$ $K^3(G)$ $K^4(G)$



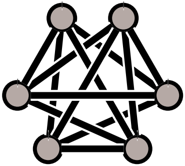
G



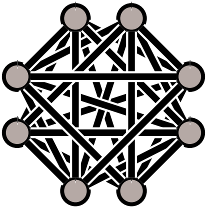
G



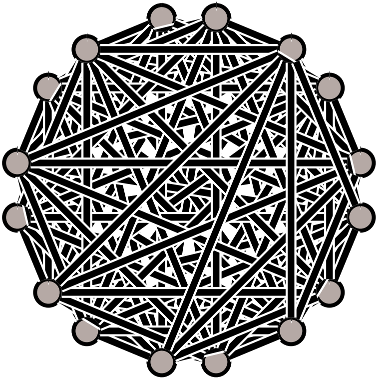
$K(G)$



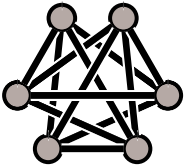
G



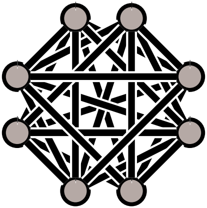
$K(G)$



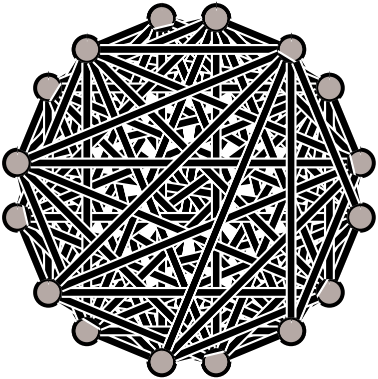
$K^2(G)$



G

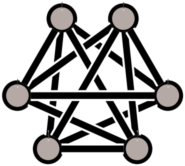


$K(G)$

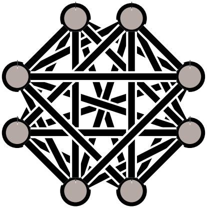


$K^2(G)$

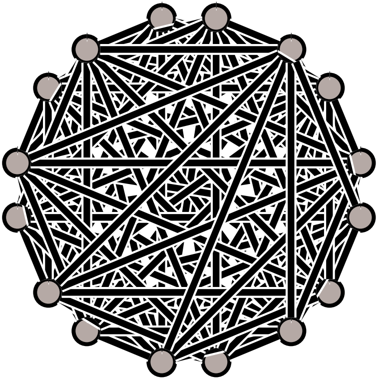
$$|K^3(G)| = 256,$$



G



$K(G)$



$K^2(G)$

$$|K^3(G)| = 256, \qquad |K^4(G)| = 2^{128}$$

Gráfica divergente:

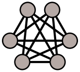
Si el conjunto

$$\{\, |K^n(G)| \mid n = 0, 1, 2, \ldots \,\}$$

no está acotado superiormente,

G es divergente.

Gráfica divergente:



Si el conjunto

$$\{\, |K^n(G)| \mid n = 0, 1, 2, \ldots \,\}$$

no está acotado superiormente,

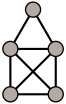
G es divergente.

Gráfica convergente:

Si G no es divergente, entonces es convergente.

Gráfica convergente:

Si G no es divergente, entonces es convergente.



Una colección C de subconjuntos de X es intersecante si $Q_1, Q_2 \in C$ implica $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$.

Una colección C de subconjuntos de X es intersecante si $Q_1, Q_2 \in C$ implica $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$.

$C = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$

Una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X es intersecante si $Q_1, Q_2 \in \mathcal{C}$ implica $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$.

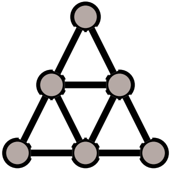
$$\mathcal{C} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$$

Una gráfica G es Helly si cualquier colección $\mathcal{C}$ intersecante de clanes es tal que $\cap\mathcal{C} \neq \emptyset$.

Una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X es intersecante si $Q_1, Q_2 \in \mathcal{C}$ implica $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$.

$\mathcal{C} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$

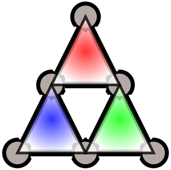
Una gráfica G es Helly si cualquier colección $\mathcal{C}$ intersecante de clanes es tal que $\cap\mathcal{C} \neq \emptyset$.



Una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X es intersecante si $Q_1, Q_2 \in \mathcal{C}$ implica $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$.

$\mathcal{C} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$

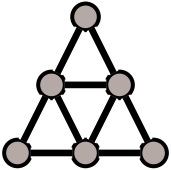
Una gráfica G es Helly si cualquier colección $\mathcal{C}$ intersecante de clanes es tal que $\cap\mathcal{C} \neq \emptyset$.



Una colección C de subconjuntos de X es intersecante si $Q_1, Q_2 \in C$ implica $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$.

$C = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$

Una gráfica G es Helly si cualquier colección C intersecante de clanes es tal que $\cap C \neq \emptyset$.



No Helly

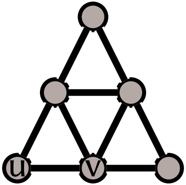
Teorema:

Si G es Helly, entonces G es convergente.

— *F. Escalante (1973)*

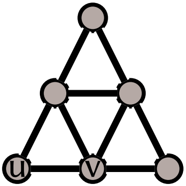
- Si $u \in V(G)$,
  $N[u] = \{ v \mid v \sim u \} \cup \{u\}$.
- u es dominado por v si
  $N[u] \subseteq N[v]$.

- Si $u \in V(G)$,
  $N[u] = \{ v \mid v \sim u \} \cup \{u\}$.
- u es dominado por v si
  $N[u] \subseteq N[v]$.



v domina a u

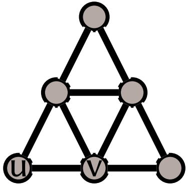
- Si $u \in V(G)$,
  $N[u] = \{ v \mid v \sim u \} \cup \{u\}$.
- u es dominado por v si
  $N[u] \subseteq N[v]$.



v domina a u

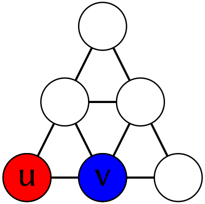
Una gráfica G es desmantelable si removiendo sucesivamente vértices dominados se llega a la gráfica de un vértice.

- Si $u \in V(G)$, $N[u] = \{ v \mid v \sim u \} \cup \{u\}$.
- u es dominado por v si $N[u] \subseteq N[v]$.

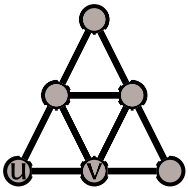


v domina a u

Una gráfica G es desmantelable si removiendo sucesivamente vértices dominados se llega a la gráfica de un vértice.

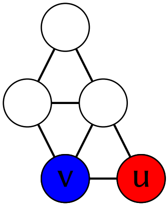


- Si $u \in V(G)$,
  $N[u] = \{ v \mid v \sim u \} \cup \{u\}$.
- u es dominado por v si
  $N[u] \subseteq N[v]$.

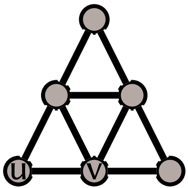


v domina a u

Una gráfica G es desmantelable si removiendo sucesivamente vértices dominados se llega a la gráfica de un vértice.

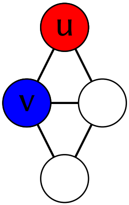


- Si $u \in V(G)$, $N[u] = \{ v \mid v \sim u \} \cup \{u\}$.
- u es dominado por v si $N[u] \subseteq N[v]$.

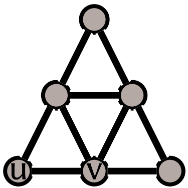


v domina a u

Una gráfica G es desmantelable si removiendo sucesivamente vértices dominados se llega a la gráfica de un vértice.

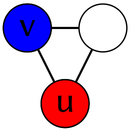


- Si $u \in V(G)$,
  $N[u] = \{ v \mid v \sim u \} \cup \{u\}$.
- u es dominado por v si
  $N[u] \subseteq N[v]$.

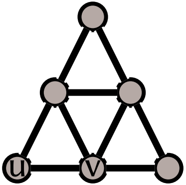


v domina a u

Una gráfica G es desmantelable si removiendo sucesivamente vértices dominados se llega a la gráfica de un vértice.

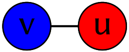


- Si $u \in V(G)$, $N[u] = \{\, v \mid v \sim u \,\} \cup \{u\}$.
- u es dominado por v si $N[u] \subseteq N[v]$.

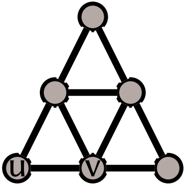


v domina a u

Una gráfica G es desmantelable si removiendo sucesivamente vértices dominados se llega a la gráfica de un vértice.

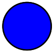


- Si $u \in V(G)$, $N[u] = \{ v \mid v \sim u \} \cup \{u\}$.
- u es dominado por v si $N[u] \subseteq N[v]$.

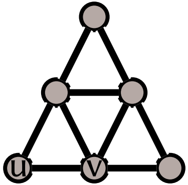


v domina a u

Una gráfica G es desmantelable si removiendo sucesivamente vértices dominados se llega a la gráfica de un vértice.

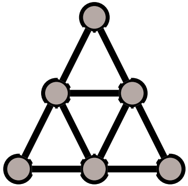


- Si $u \in V(G)$,
  $N[u] = \{\, v \mid v \sim u \,\} \cup \{u\}$.
- u es dominado por v si
  $N[u] \subseteq N[v]$.



v domina a u

Una gráfica G es desmantelable si removiendo sucesivamente vértices dominados se llega a la gráfica de un vértice.



Desmantelable

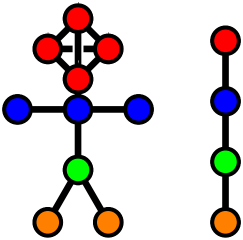
Teorema:

Si G es desmantelable, entonces G es convergente (más aún, es nula, i.e. $|K^n(G)| = 1$ para alguna n).

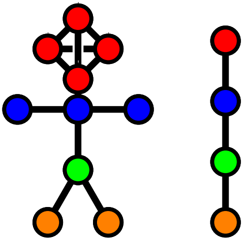
— ***E. Prisner (1992)***

Un morfismo de gráficas $f\colon G \to L$ es una función tal que $x \sim y$ implica $f(x) \sim f(y)$ o $f(x) = f(y)$.

Un morfismo de gráficas $f\colon G \to L$ es una función tal que $x \sim y$ implica $f(x) \sim f(y)$ o $f(x) = f(y)$.

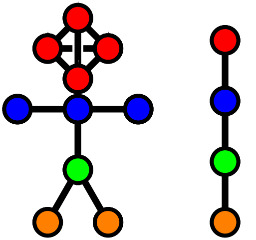


Un morfismo de gráficas $f\colon G \to L$ es una función tal que $x \sim y$ implica $f(x) \sim f(y)$ o $f(x) = f(y)$.

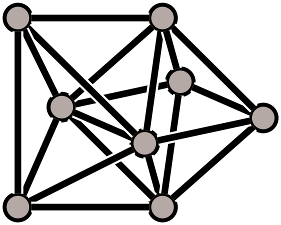


Si L es una subgráfica de G, una retracción $r\colon G \to L$ es un morfismo tal que $r(x) = x$ para todo $x \in L$.

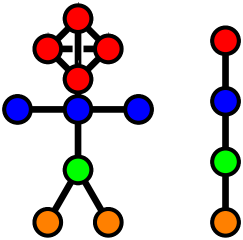
Un morfismo de gráficas $f\colon G \to L$ es una función tal que $x \sim y$ implica $f(x) \sim f(y)$ o $f(x) = f(y)$.



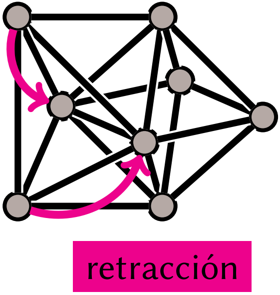
Si L es una subgráfica de G, una retracción $r\colon G \to L$ es un morfismo tal que $r(x) = x$ para todo $x \in L$.



Un morfismo de gráficas $f\colon G \to L$ es una función tal que $x \sim y$ implica $f(x) \sim f(y)$ o $f(x) = f(y)$.



Si L es una subgráfica de G, una retracción $r\colon G \to L$ es un morfismo tal que $r(x) = x$ para todo $x \in L$.



Teorema:

Si $r\colon G \to L$ ***es una retracción, existe una retracción*** $K(r)\colon K(G) \to K(L)$***. En particular, si*** L ***es divergente,*** G ***es divergente***

— ***V. Neumann–Lara (1976)***

La gráfica $H(G)$ se define como:

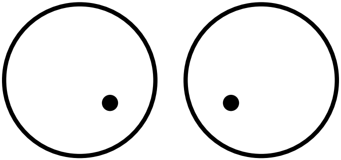
- $V\big(H(G)\big) = \{\, (x, Q) \mid Q \text{ es clan de } G, x \in Q \,\}$,

La gráfica $H(G)$ se define como:

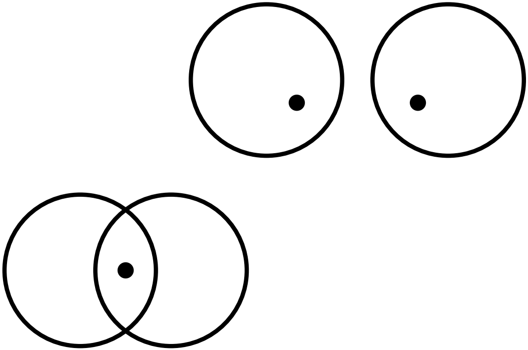
- $V\big(H(G)\big) = \{\, (x, Q) \mid Q \text{ es clan de } G, x \in Q \,\}$,
- $(x_1, Q_1) \sim (x_2, Q_2)$ si $(x_1, Q_1) \neq (x_2, Q_2)$, $x_1 \in Q_2$ y $x_2 \in Q_1$.

- $V\Big(H(G)\Big) = \{\, (x, Q) \mid Q \text{ es clan de } G, x \in Q \,\}$,
- $(x_1, Q_1) \sim (x_2, Q_2)$ si $(x_1, Q_1) \neq (x_2, Q_2)$, $x_1 \in Q_2$ y $x_2 \in Q_1$.

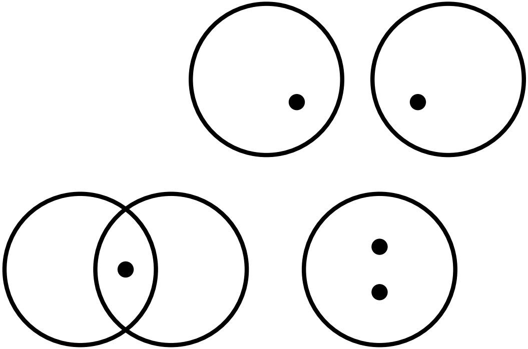
- $V\Big(H(G)\Big) = \{\, (x, Q) \mid Q \text{ es clan de } G, x \in Q \,\}$,
- $(x_1, Q_1) \sim (x_2, Q_2)$ si $(x_1, Q_1) \neq (x_2, Q_2)$, $x_1 \in Q_2$ y $x_2 \in Q_1$.



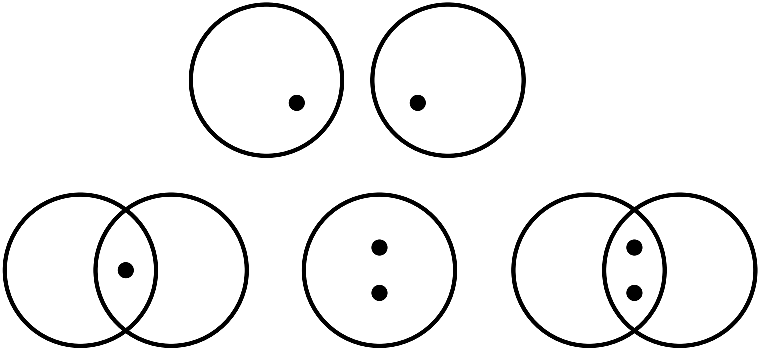
- $V\Big(H(G)\Big) = \{\, (x, Q) \mid Q \text{ es clan de } G, x \in Q \,\}$,
- $(x_1, Q_1) \sim (x_2, Q_2)$ si $(x_1, Q_1) \neq (x_2, Q_2)$, $x_1 \in Q_2$ y $x_2 \in Q_1$.



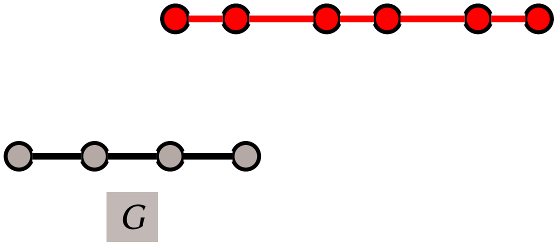
- $V\Big(H(G)\Big) = \{\,(x, Q) \mid Q \text{ es clan de } G, x \in Q\,\}$,
- $(x_1, Q_1) \sim (x_2, Q_2)$ si $(x_1, Q_1) \neq (x_2, Q_2)$, $x_1 \in Q_2$ y $x_2 \in Q_1$.

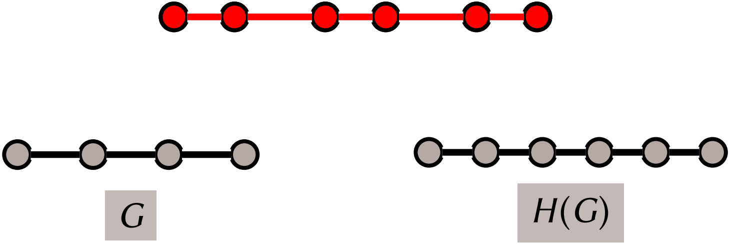


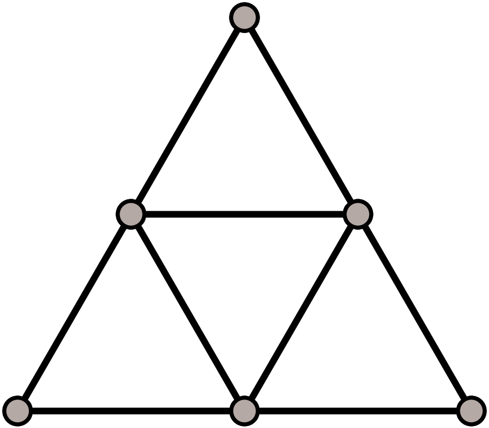
- $V\Big(H(G)\Big) = \{\, (x, Q) \mid Q \text{ es clan de } G, x \in Q \,\}$,
- $(x_1, Q_1) \sim (x_2, Q_2)$ si $(x_1, Q_1) \neq (x_2, Q_2)$, $x_1 \in Q_2$ y $x_2 \in Q_1$.



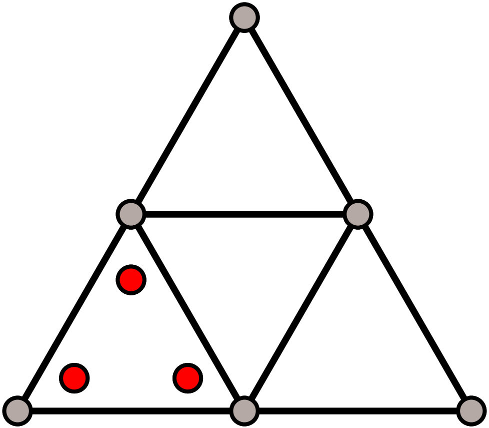
G

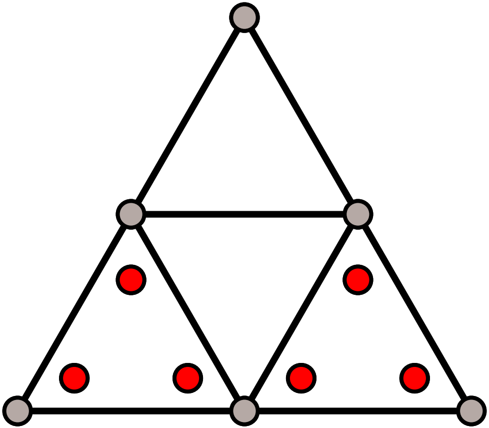

G

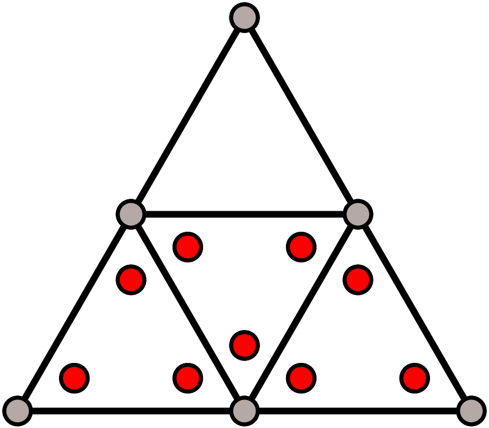

G
H(G)

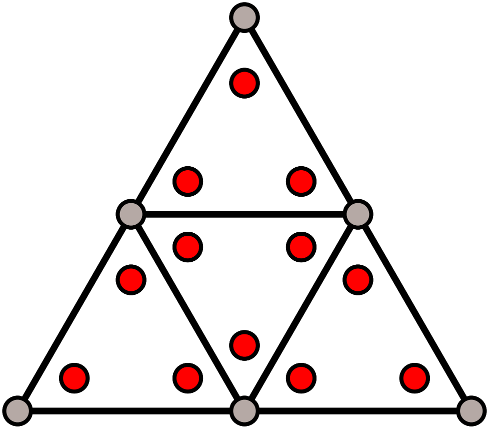


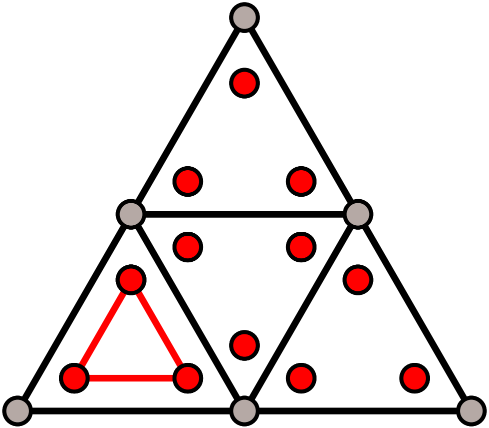
G

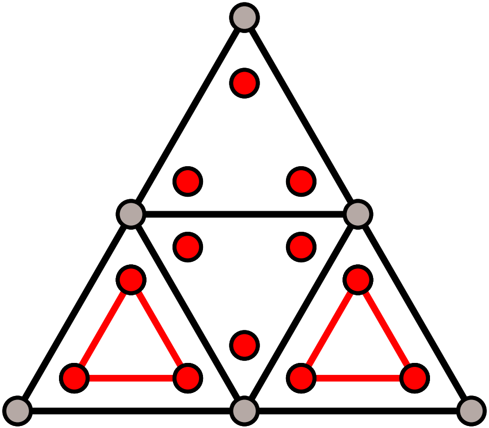


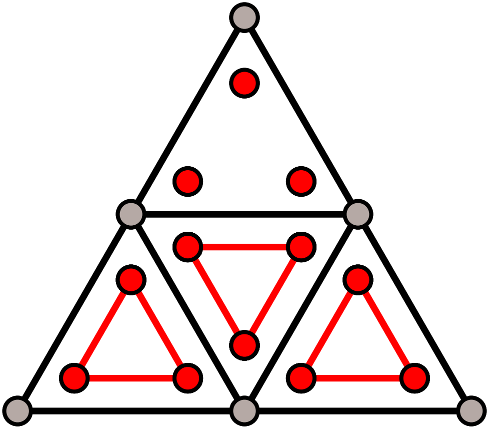


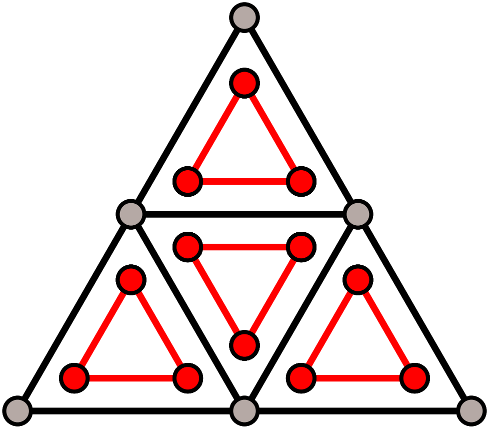


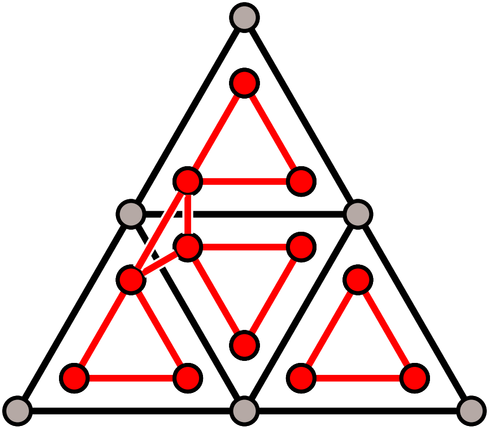


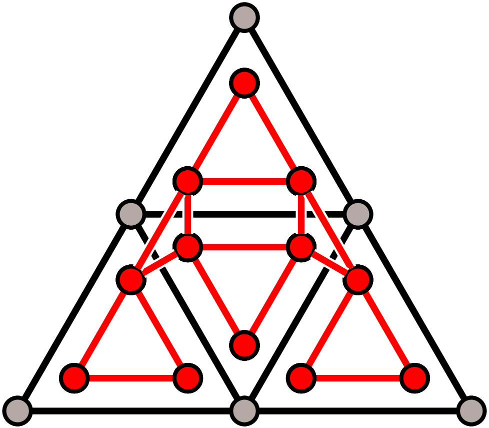


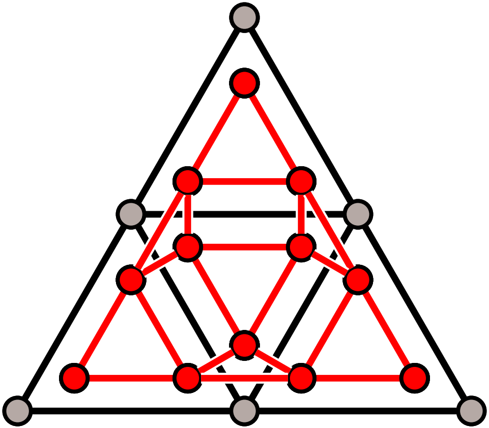


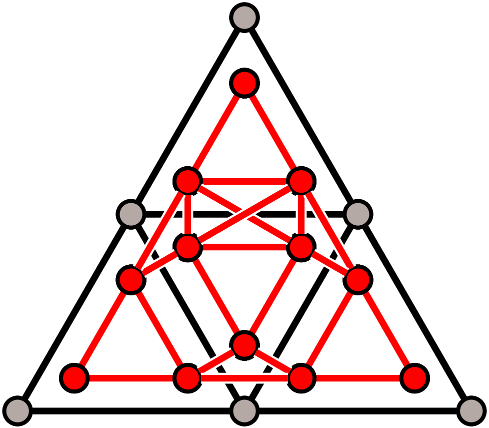


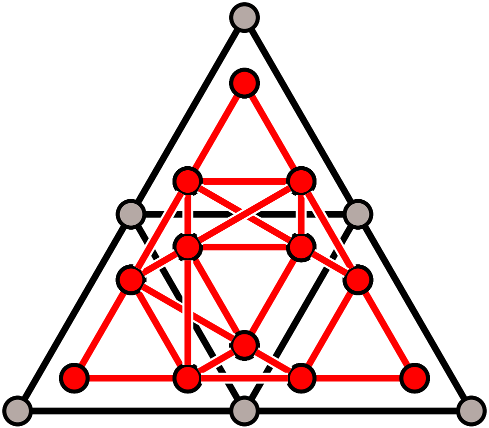


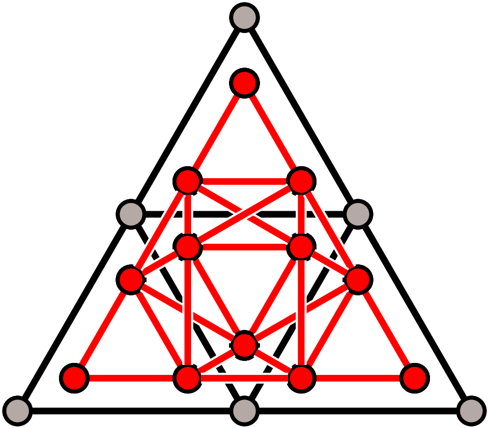


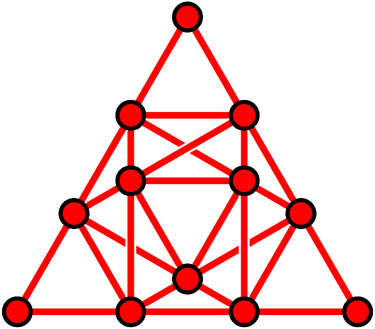












$H(G)$

El operador H apareció explícitamente en un trabajo publicado en el 2008 por Larrión, Pizaña y V., sin embargo puede obtenerse como composición de dos operadores definidos por Bandelt, Farber y Hell en 1993.

Proposición

Para toda gráfica G, $|G| \leq |H(G)|$.

Proposición

Para toda gráfica G, $|G| \leq |H(G)|$.

Proposición

Los siguientes enunciados son equivalentes:

- G es completa
- $H(G)$ es completa
- $|H(G)| = |G|$.

Por lo tanto, toda gráfica no completa es H-divergente.

Teorema:

- G ***es Helly si y sólo si*** $H(G)$ ***es Helly.***
- G ***es desmantelable si y sólo si*** $H(G)$ ***es desmantelable.***

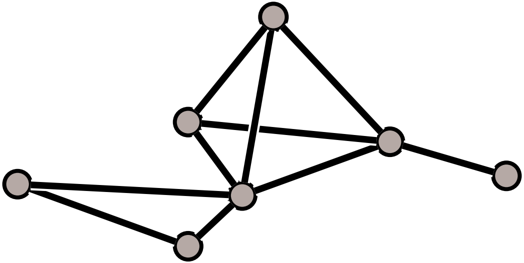
— ***Bandelt, Farber, Hell (1993)***

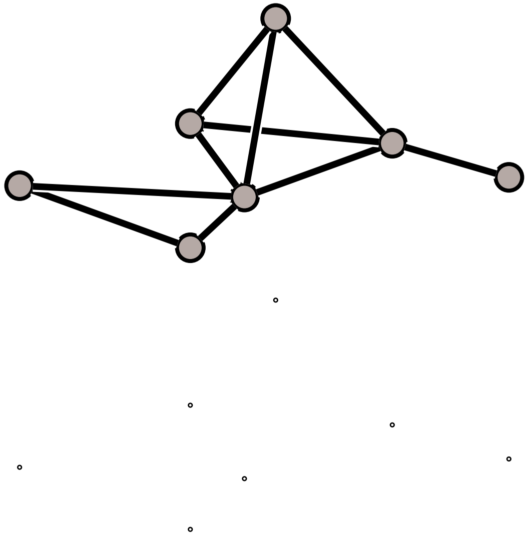
Teorema:

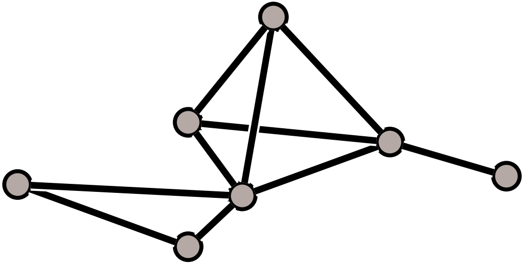
Para toda gráfica G se tiene que:

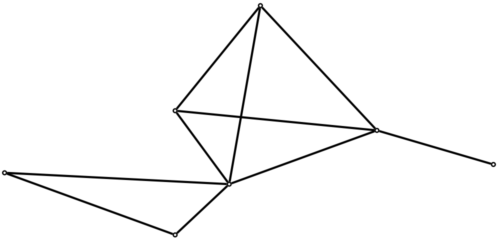
$$G \simeq H(G) \simeq K\Big(H(G)\Big).$$

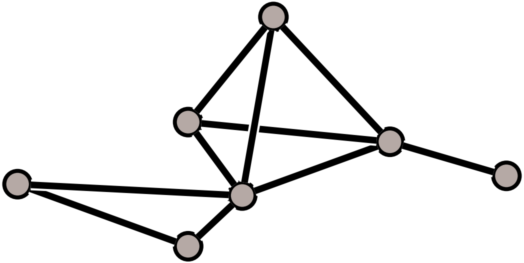
— ***Larrión, Pizaña, V. (2008)***

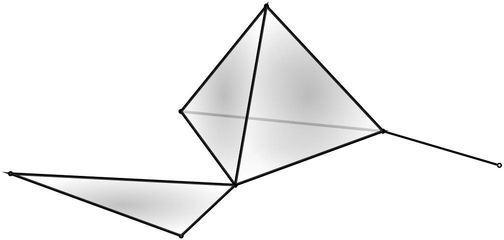


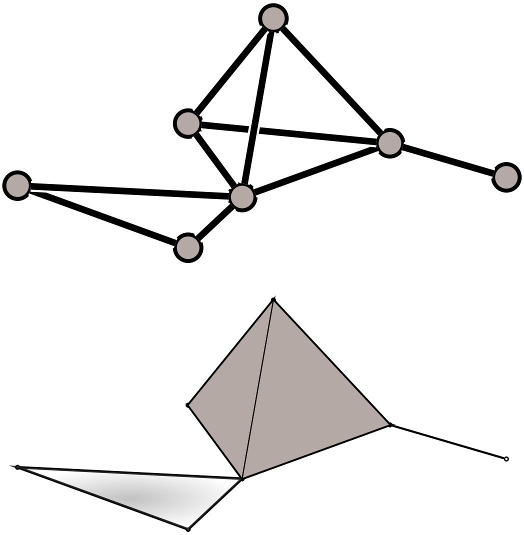








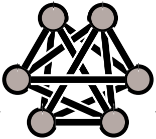


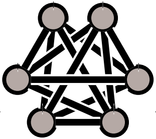


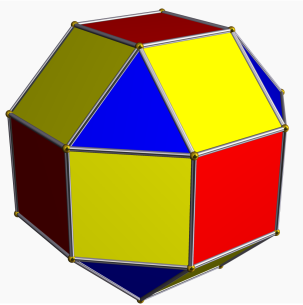
Sabemos que $G \simeq H(G) \simeq K\Big(H(G)\Big)$.

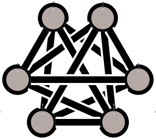
Pregunta

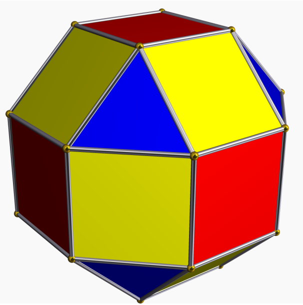
¿Existen G y n tales que $K^n\Big(H(G)\Big) \not\simeq G$?

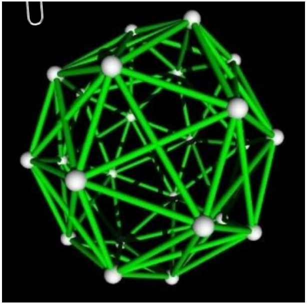
$H($  $) =$

$H($  $) =$



$H($  $) =$





Si G es el octaedro.

índice	0	1	2	3	4	5
iteradas de G	6	8	16	$2^8 = 256$	2^{128}	$2^{2^{127}}$
iteradas de $H(G)$	24	26	32	50	80	234

Recordemos:

- Si $r\colon G \to L$ es retracto, hay un retracto $K(r)\colon K(G) \to K(L)$. (Neumann-Lara)

Recordemos:

- Si $r\colon G \to L$ es retracto, hay un retracto $K(r)\colon K(G) \to K(L)$. (Neumann-Lara)

Por otro lado:

- Si $r\colon G \to L$ es retracto, hay un retracto $H(r)\colon H(G) \to H(L)$.
- $H(O_3)$ es divergente. (LPV, 2012)

Pregunta

¿Se tiene que G es convergente si y sólo si $H(G)$ es convergente?

Si G es el disfenoide chato

índice	0	1	2	3	4	5
iteradas de G	8	12	20	56	1076	$> 737 \cdot 10^7$
iteradas de $H(G)$	36	38	48	74	124	286

(aún $|K^6\Big(H(G)\Big)| = 824$).

Aunque parece que $H(G)$ es divergente para toda G divergente, sólo hemos demostrado que $H(G)$ es divergente si G se retrae al octaedro O_3.

Aunque parece que $H(G)$ es divergente para toda G divergente, sólo hemos demostrado que $H(G)$ es divergente si G se retrae al octaedro O_3.

¡Gracias!