Número de multisubdivisión total de una gráfica

Rita Zuazua, FCiencias, UNAM
(con D. Avella, M. Dettlaff, M. Lemanska)

Morelia, 2013

Problema General

- Empieza con una gráfica **G**;

Problema General

- Empieza con una gráfica **G**;
- Considera alguna propiedad o invariante de **G**, **P(G)**;

Problema General

- Empieza con una gráfica **G**;
- Considera alguna propiedad o invariante de **G**, **P(G)**;
- Aplícale a **G** una operación de gráficas para obtener una nueva gráfica **G'**;

Problema General

- Empieza con una gráfica **G**;
- Considera alguna propiedad o invariante de **G**, **P(G)**;
- Aplícale a **G** una operación de gráficas para obtener una nueva gráfica **G’**;
- Cuál es la relación entre **P(G)** y **P(G’)**

Problema menos general

- Empieza con una gráfica **G**;

Problema menos general

- Empieza con una gráfica **G**;
- Considera su número de dominación clásica o cualquier otra, **γ_(G)**;

Problema menos general

- Empiezа con una gráfica **G**;
- Considera su número de dominación clásica o cualquier otra, **γ_(G)**;
- Aplícale a **G** una operación de gráficas para obtener una nueva gráfica **G'**;

Problema menos general

- Empieza con una gráfica **G**;
- Considera su número de dominación clásica o cualquier otra, **γ_(G)**;
- Aplícale a **G** una operación de gráficas para obtener una nueva gráfica **G’**;
- Cuál es la relación entre **γ_(G)** y **γ_(G’)**.

Problema particular

- Empieza con una gráfica **G**;

Problema particular

- Empieza con una gráfica **G**;
- Considera su número de dominación total , **$\gamma T(G)$**;

Problema particular

- Empieza con una gráfica **G**;
- Considera su número de dominación total , **$\gamma T(G)$**;
- Aplícale a **G** la operación de subdividir o multisubdividir una arista para obtener una nueva gráfica **G'**;

Problema particular

- Empieza con una gráfica **G**;
- Considera su número de dominación total , **γT(G)**;
- Aplícale a **G** la operación de subdividir o multisubdividir una arista para obtener una nueva gráfica **G’**;
- Cómo cambió **γT(G)** .

Dominación Total

Dominación Total

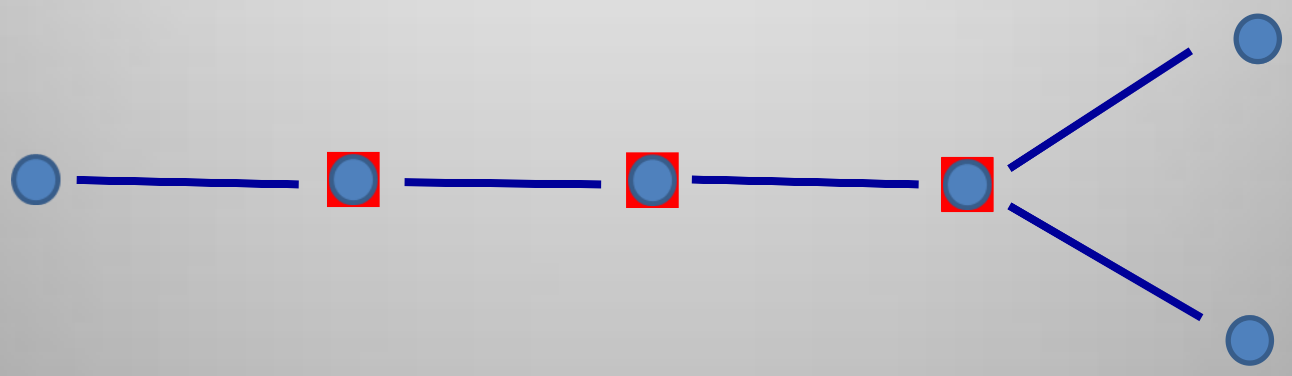
- Un subconjunto **D** de **V** es un **conjunto dominante total** de **G** si todo vértice de **G** es adyacente a un vértice en **D**.

Dominación Total

- Un subconjunto **D** de **V** es un **conjunto dominante total** de **G** si todo vértice de **G** es adyacente a un vértice en **D**.

- Denotaremos como **γT(G)** a la cardinalidad de un conjunto dominante total mínimo de G y diremos que **γT(G)** es el **número de dominación total** de G.

Conjunto Dominante Total



$\gamma T(G)=3$

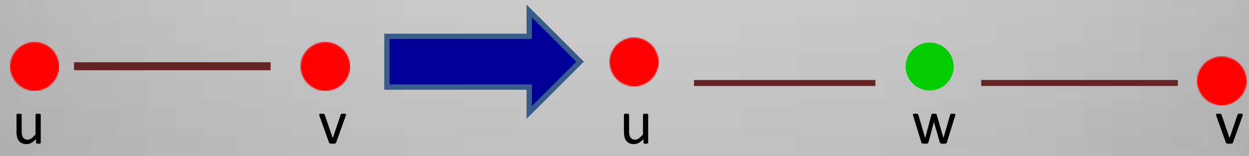
Subdivisión de una arista

Subdivisión de una arista

Sea **e=uv** una arista de **G**, definimos la gráfica **Ge** que tiene como vértices el conjunto **V(Ge)=V(G)U{w}**, y como aristas, **E(Ge)=E(G)\e U {uw, wv}.**

Subdivisión de una arista

Sea **e=uv** una arista de **G**, definimos la gráfica **Ge** que tiene como vértices el conjunto **V(Ge)=V(G)U{w}**, y como aristas, **E(Ge)=E(G)\e U {uw, wv}.**



Subdivisión de una arista

Subdivisión de una arista

El número de **subdivisión total** de una gráfica **G**, **sd_T(G)** es el mínimo número de aristas de **G** que deben de ser subdivididas de tal manera que el número de dominación total de **G** aumente.

Subdivisión de una arista

El número de **subdivisión total** de una gráfica **G**, **$sd_T(G)$** es el mínimo número de aristas de **G** que deben de ser subdivididas de tal manera que el número de dominación total de **G** aumente.

Se sabe, que para todo entero positivo **k**, existe una gráfica con **$sd_T(G) = k$**.

Subdivisión de una arista

El número de **subdivisión total** de una gráfica **G**, **$sd_T(G)$** es el mínimo número de aristas de **G** que deben de ser subdivididas de tal manera que el número de dominación total de **G** aumente.

Se sabe, que para todo entero positivo **k**, existe una gráfica con **$sd_T(G) = k$**.

Para el caso de árboles, se tiene que **$sd_T(G) \leq 3$.**

Multisubdivisión de una arista

Multisubdivisión de una arista

Sea **$e=uv$** una arista de **G**, definimos la gráfica **$G\{e,t\}$** tal que

$V(G\{e,t\})=V(G)\cup\{w_1,w_2, \ldots,w_t\}$;

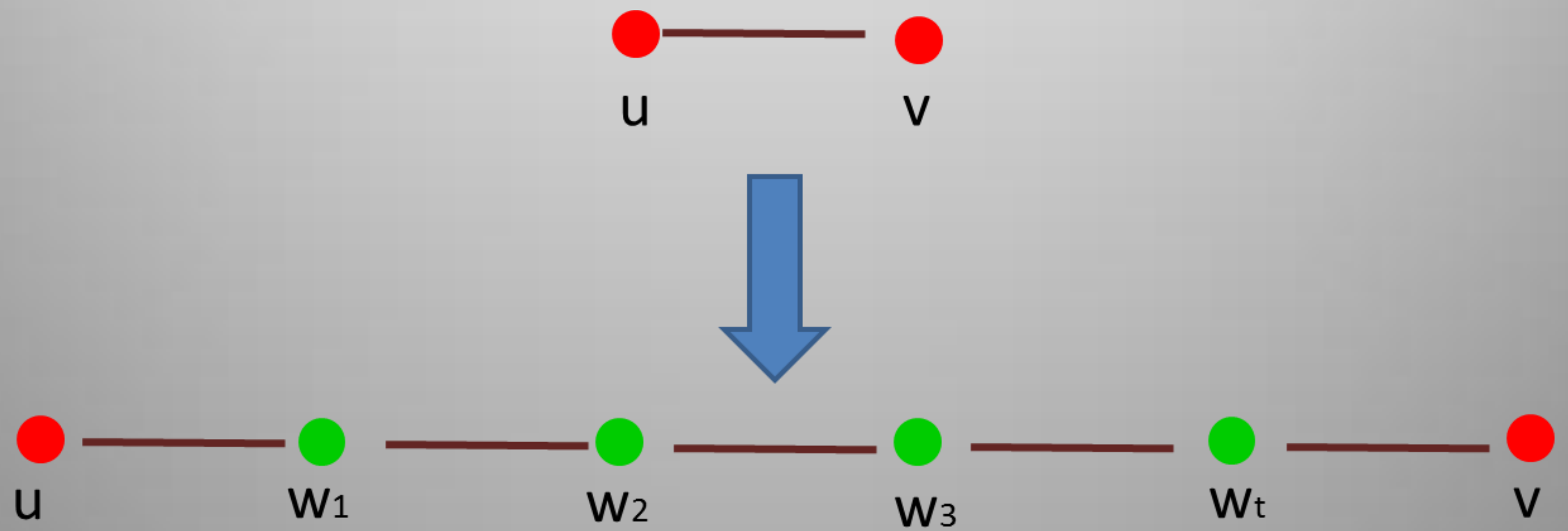
$E(G\{e,t\})=E(G)\setminus e\cup\{uw_1,w_1w_2,\ldots,w_tv\}$.

Multisubdivisión de una arista

Sea **e=uv** una arista de **G**, definimos la gráfica **G{e,t}** tal que

$V(G\{e,t\})=V(G) \cup \{w_1, w_2, \ldots, w_t\}$;

$E(G\{e,t\})=E(G)\setminus e \cup \{uw_1, w_1w_2, \ldots, w_tv\}$.



Multisubdivisión de una arista

Multisubdivisión de una arista

El número de **multisubdivisión total** de una arista **e**, **$msd_T(e)$** es el mínimo número de subdivisiones de la arista **e** tal que el número de dominación total de **G** aumente.

Multisubdivisión de una arista

El número de **multisubdivisión total** de una arista **e**, **$msd_T(e)$** es el mínimo número de subdivisiones de la arista **e** tal que el número de dominación total de **G** aumente.

Definimos el número de **multisubdivisión total** de una gráfica **G**, **$msd_T(G)$** como

$$msd_T(G) = \min \{msd_T(e) | e \text{ es una arista de } G\}$$

PREGUNTA 1

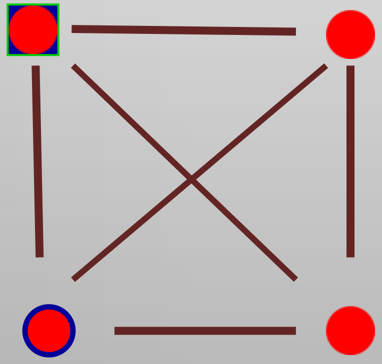
Cómo están relacionados el **$sd_T(G)$ y $msd_T(G)$** ?

Observación trivial, **$sd_T(G)=1$** si y sólo si **$msd_T(G)=1$**

PREGUNTA 1

La gráfica completa K_4, tiene

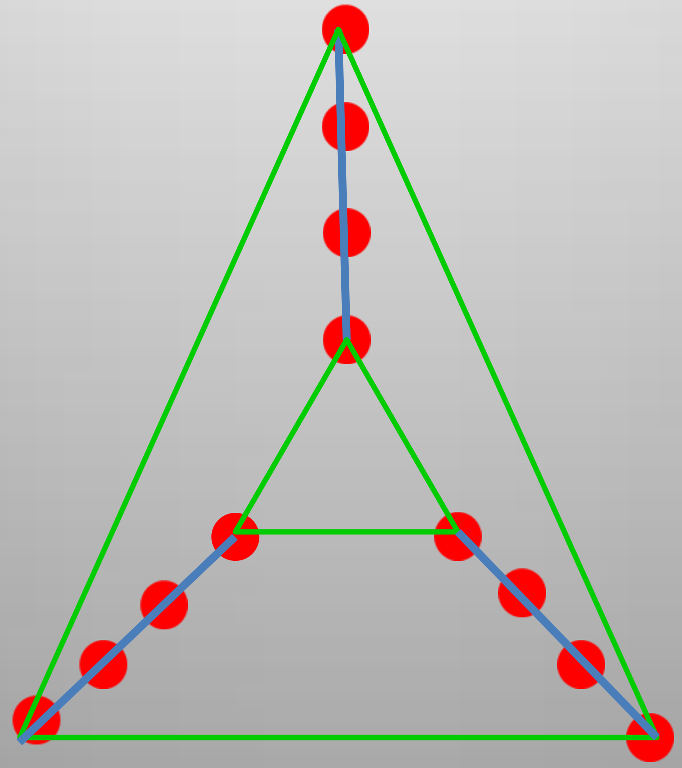
$\gamma T(K_4) = 2$, $sd_T(K_4) = 3$ y $msd_T(K_4) = 2$.



PREGUNTA 1

La siguiente gráfica tiene

$\gamma T(G) = 6$, $sd_T(G) = 2$ y $msd_T(G) = 3$



PREGUNTA 1

Cómo están relacionados el $sd_T(G)$ y $msd_T(G)$?

Observación trivial, $sdT(G)=1$ si y sólo si $msd_T(G)=1$

Respuesta: Estos dos números no son comparables.

PREGUNTA 2

Se sabe, que para todo entero positivo **k**, existe una gráfica con **$sd_T(G) = k$**.

Pasará lo mismo para **$msd_T(G)$** ?

PREGUNTA 2

Se sabe, que para todo entero positivo **k**, existe una gráfica con **$sd_T(G) = k$**.

Pasará lo mismo para **$msd_T(G)$** ?

Respuesta (Teorema): Para toda gráfica conexa **G,**

$1 \leq msd_T(G) \leq 3$!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

PREGUNTA 3

Para el caso de árboles, se tiene que **$sd_T(T) \leq 3$** y para toda gráfica conexa **G, $1 \leq msd_T(G) \leq 3$.**

PREGUNTA 3

Para el caso de árboles, se tiene que **$sd_T(T) \leq 3$** y para toda gráfica conexa **G, $1 \leq msd_T(G) \leq 3$.**

Será que para los árboles si hay alguna relación entre estos dos números?

FAMILIA DE ÁRBOLES

FAMILIA DE ÁRBOLES

Empieza con un P_6 tricoloreado de la siguiente forma

FAMILIA DE ÁRBOLES

Si un vértice es **Azul** o **Verde** puedes pegarle un camino con cuatro nuevos vértices, de la forma

FAMILIA DE ÁRBOLES

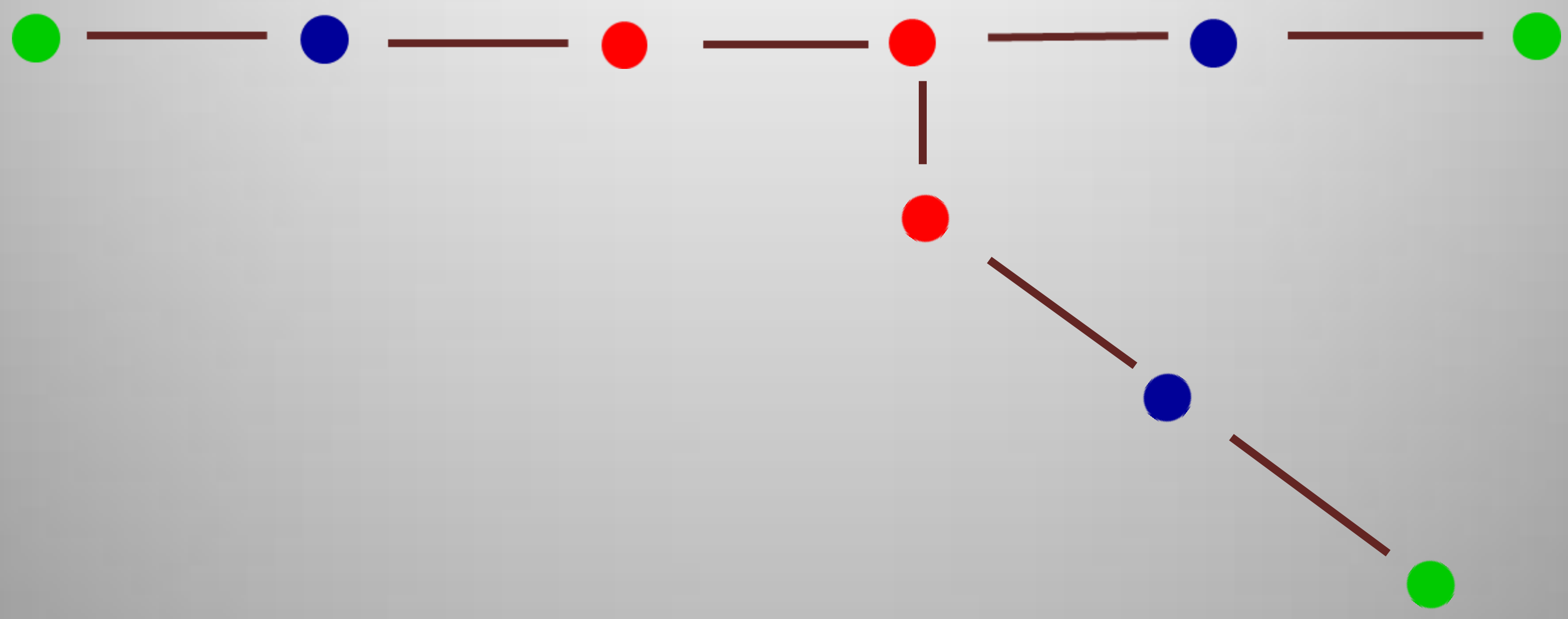
Si un vértice es **Azul** o **Verde** puedes pegarle un camino con cuatro nuevos vértices, de la forma

Si un vértice es **Rojo** puedes pegarle un camino con tres nuevos vértices , de la forma

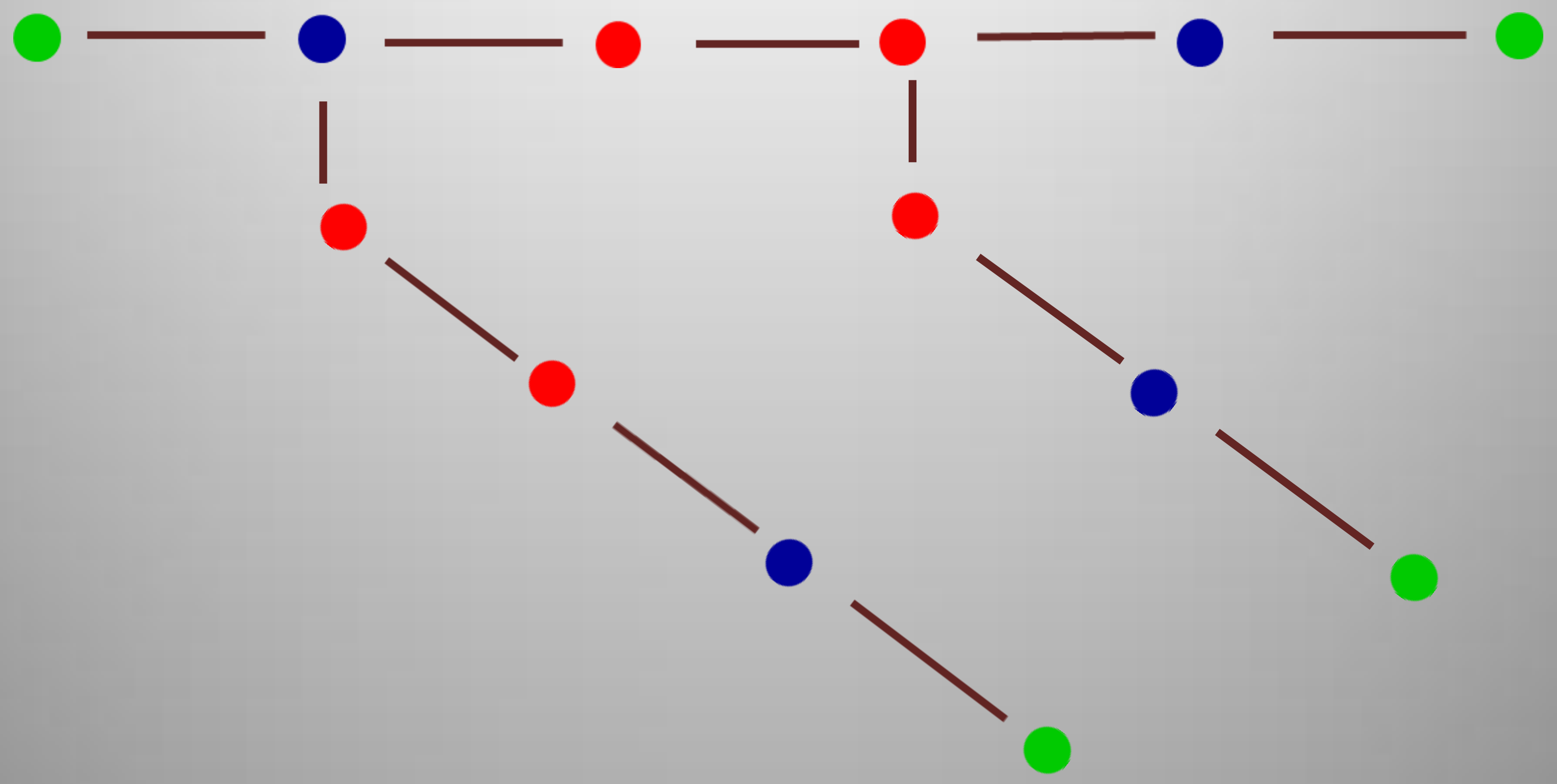
EJEMPLO FAMILIA DE ÁRBOLES

EJEMPLO FAMILIA DE ÁRBOLES

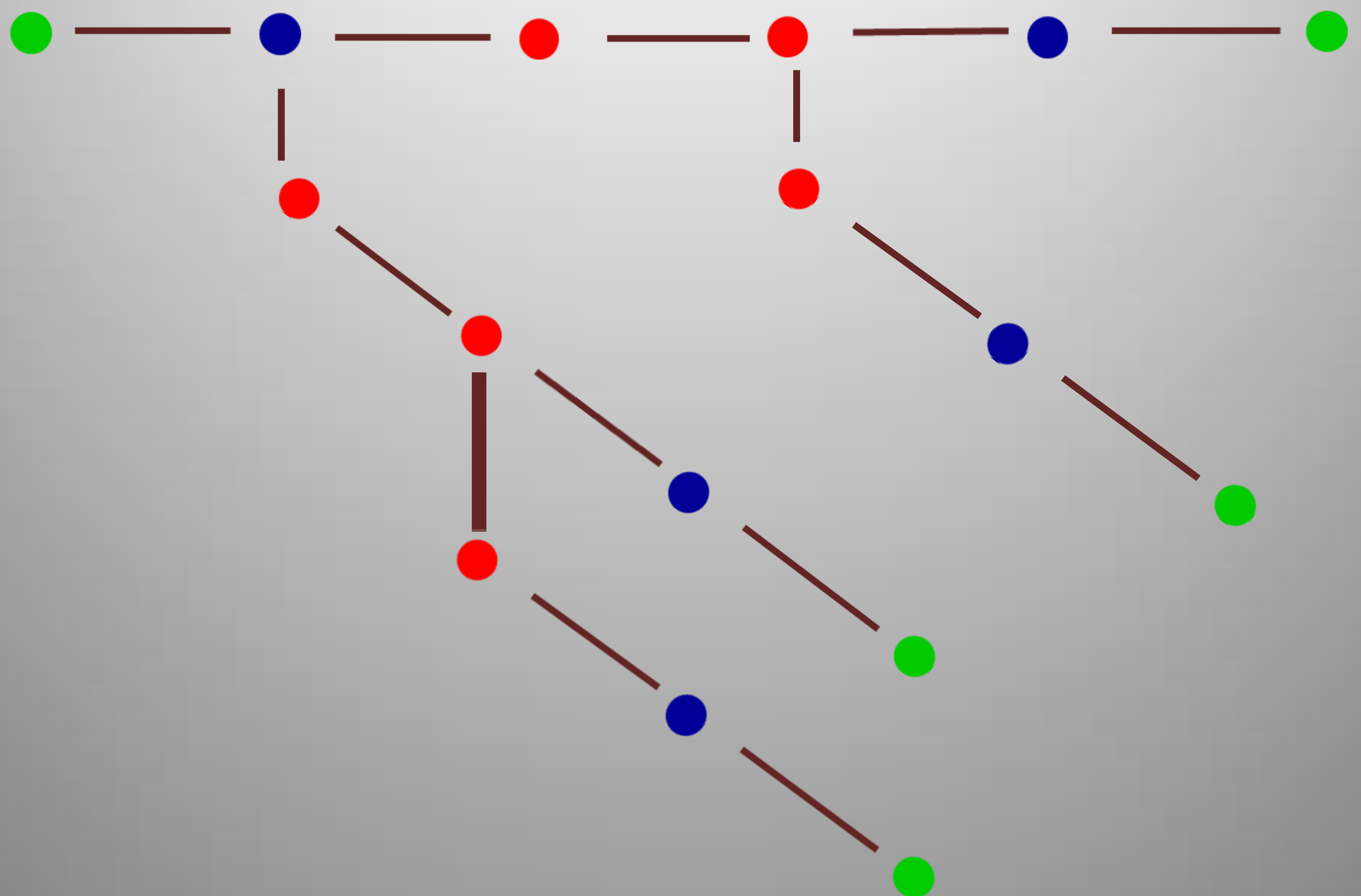
EJEMPLO FAMILIA DE ÁRBOLES



EJEMPLO FAMILIA DE ÁRBOLES



EJEMPLO FAMILIA DE ÁRBOLES



Familia de Árboles

Teorema: Un árbol **T** tiene número de multisubdivisión total igual a tres si y sólo si pertenece a la familia que acabamos de construir.

FAMILIA DE ÁRBOLES

Teorema: Un árbol **T** tiene número de multisubdivisión total igual a tres si y sólo si pertenece a la familia que acabamos de construir.

Además, T. Haynes et al, probaron que un árbol tiene número de subdivisión total tres si y sólo si pertenece a la anterior familia.

FAMILIA DE ÁRBOLES

Teorema: Un árbol **T** tiene número de multisubdivisión total igual a tres si y sólo si pertenece a la familia que acabamos de construir.

Además, T. Haynes et al, probaron que un árbol tiene número de subdivisión total tres si y sólo si pertenece a la anterior familia.

Teorema: para todo árbol **T** con tres o más vértices,

$$sd_T(T) = 3 \text{ si y sólo si } msd_T(T) = 3$$

FAMILIA DE ÁRBOLES

Observación trivial : Todo árbol **T** con más de tres vértices

$sd_T(T) = 1$ si y sólo si $msd_T(T) = 1$

FAMILIA DE ÁRBOLES

Observación trivial : Todo árbol **T** con más de tres vértices

$sd_T(T) = 1$ si y sólo si $msd_T(T) = 1$

Por el último teorema, **$sd_T(T) = 3$ si y sólo si $msd_T(T) = 3$**

FAMILIA DE ÁRBOLES

Observación trivial : Todo árbol **T** con más de tres vértices

$sd_T(T) = 1$ si y sólo si $msd_T(T) = 1$

Por el último teorema, **$sd_T(T) = 3$ si y sólo si $msd_T(T) = 3$**

Como para toda gráfica **G**, **$msd_T(G) \leq 3$,** podemos concluir

Teorema: para todo árbol **T** con tres o más vértices,

$sd_T(T) = msd_T(T)$

Tercera Escuela de Invierno de matemáticas discretas

13 al 18 de enero de 2014

Cimat, Guanajuato