Demostración combinatoria del anudamiento intrínseco de la gráfica K_7.

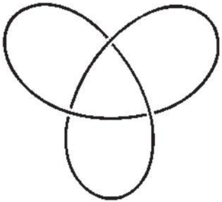
Ulises Morales Fuentes

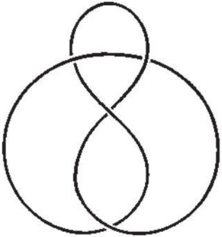
3 de marzo de 2013

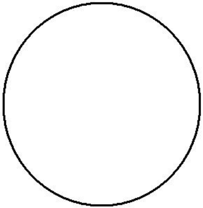
Nudos

Un nudo es un encaje de S^1 en $\mathbb{R}^3$ tal que la imagen es poligonal, es decir la imagen de S^1 en $\mathbb{R}^3$ esta formada por un número finito de segmentos de recta. Una proyección regular de un nudo es una función $\alpha : S^1 \to \mathbb{R}^2$ tal que el número de punto singulares es finito y además $|\alpha^{-1}(x)| \leqslant 2$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Si para dos nudos K_1 y K_2 existe un homeomorfismo que preserva orientación $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $h(K_1) = K_2$, se dice que los nudos son isotópicos y dicha isotopía la denotaremos por $K_1 \simeq K_2$. Se sabe que la información sobre la clase de isotopía del nudo esta dada por una proyección regular D en el plano, en donde se han distinguido lo tipos de cruces.

Ejemplos

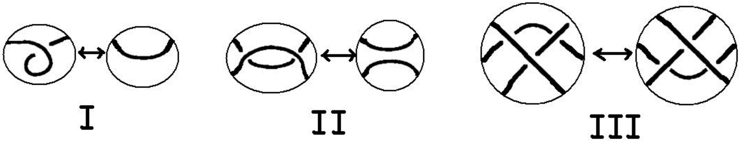




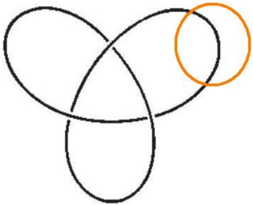


Movidas de Reidemeister

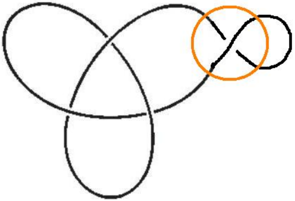
Recordemos el Teorema de Reidemeister: Sean K_1 , K_2 nudo o enlaces y sean D_1 , D_2 sus diagramas regulares correspondientes, entonces $K_1 \simeq K_2$ si y solo si D_1 se puede obtener de D_2 mediante un número finito de de isotopías del plano y de un número finito de movidas de Reidemeister:



Ejemplo de nudos isotópicos



$\simeq$

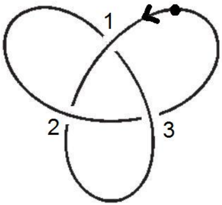


Invariante $k(N_D)$

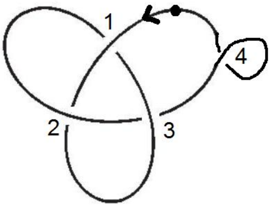
Nota: A partir de aquí toda igualdad representa igualdad módulo 2, es decir estaremos trabajando en $\mathbb{Z}_2$.

$$k(N_D) = \sum_{x<y} e(x,y)(1+u(x))u(y).$$

En donde $e(x,y) = 1$ si y solo si x y y están intercalados. Y $u(x) = 1$ si y solo si al recorrer el nudo en el orden definido primero se pasa por abajo.



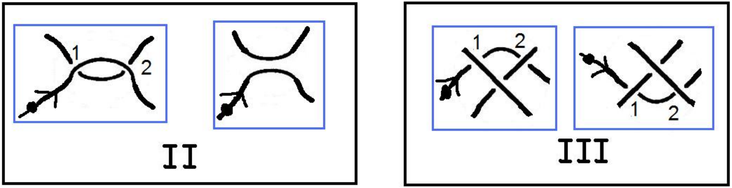
= N



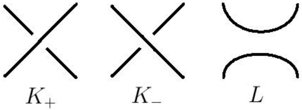
= N'

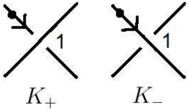
$k(N) = 1$ $\qquad$ $k(N') = 1$

Invariante $k(N_D)$



$k(K_+) = k(K_-) + lk(L_1 \cup L_2)$ mód2





$$
\begin{aligned}
& k(K_+) - k(K_-) \\
= \quad & \textstyle\sum_{x<y} e(x,y)u(x)(u(y)+1) - \sum_{x<y} e(x,y)u'(x)(u'(y)+1) \\
= \quad & \textstyle\sum_{1<y} e(1,y)u(1)(u(y)+1) - \sum_{1<y} e(1,y)u'(1)(u'(y)+1) \\
= \quad & \textstyle\sum_{1<y} e(1,y)u(1)(u(y)+1) \\
= \quad & \textstyle\sum_{1<y} e(1,y)(u(y)+1)
\end{aligned}
$$

El número de entrelazamiento módulo dos de un enlace doble es igual al número de veces que L_2 pasa por arriba de L_1.
Observemos que la última expresión es decir $\sum_{1<y} e(1,y)(u(y)+1)$ es igual al número de entrelazamiento de $L = L_1 \cup L_2$ módulo dos.

Gráfica intrínsecamente anudada

Una gráfica G es *intrínsecamente anudada* si para cualquier encaje $f : G \to \mathbb{R}^3$ existe un ciclo C de G tal que $f\,|_C$ es un nudo no trivial.

A continuación veremos que la gráfica K_7 es intrínsecamente anudada.

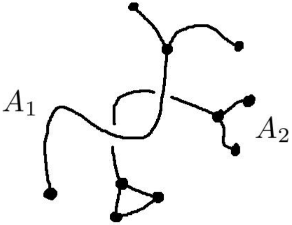
Dado un encaje de K_7 en $\mathbb{R}^3$, definimos $\sigma \in \mathbb{Z}_2$ como $\sigma = \sum k(C)$ en donde k es el invariante de nudos definido anteriormente y la suma se toma sobre todos los ciclos Hamiltonianos C de K_7.

Veremos que σ es invariante bajo cambio de cruces, esto lo haremos usando la igualdad $k(K_+) = k(K_-) + lk(L) \mod 2$.

En dicho encaje de K_7 existen tres tipos de cruces:

- (I) de un arista consigo misma,
- (II) de dos aristas adyacentes,
- (III) y de dos aristas distintas no adyacentes.

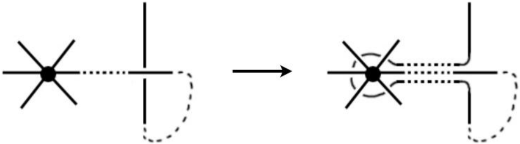
Sean A_1 y A_2 dos gráficas ajenas, encajadas en $\mathbb{R}^3$ de manera que la proyección de $A_1 \cup A_2$ sea regular. Definamos $\omega(A_1, A_2) \in \mathbb{Z}_2$ como el número de veces que A_1 cruza por arriba a A_2 módulo 2. Diremos que A_1 y A_2 son "círculos" si A_1 y A_2 son dos encajes distintos de S^1, es decir son un enlace doble. Observemos que si A_1 y A_2 son "círculos" entonces $\omega(A_1, A_2) = lk(A_1, A_2) \mod 2$.



$$\omega(A_1, A_2) = 0$$

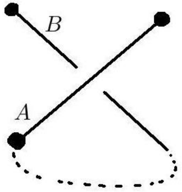
Cambio de cruce tipo I

Nuestro objetivo es ver que σ no cambia si alguno de los tipos de cruces mencionados cambia. Observemos que el cruce del tipo (I), es decir de un arista consigo misma, se puede reemplazar con cinco cambios de cruces entre aristas distintas, es por esta razón que no es necesario considerarlo.



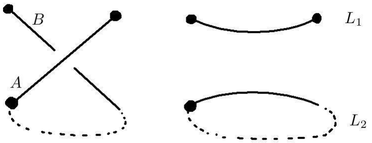
Cambio de cruce tipo II

Si queremos cambiar un cruce de dos aristas adyacentes A, B, podemos primero contraer A, moviendo sus vértices sobre ella misma (A), hacia el punto de cruzamiento en cuestión, esto lo hacemos arrastrando (i.e mediante una isotopía de gráficas encajadas) el resto de la gráfica. Del mismo modo movemos el vértice de B que no pertenece a A hacia el punto de cruzamiento. De esta manera siempre podemos pensar que los puntos de cruzamiento de dos aristas adyacentes se ve como en la figura:



Cambio de cruce tipo II

$$\begin{aligned}
\sigma(K_7) - \sigma(K_7') &= \sum_{C\in H} k(C) - \sum_{C'\in H} k(C') \\
&= \sum_{C\in H} k(C) - k(C') \\
&= \sum_{C\in H} lk(L_1(C) \cup L_2(C)) \\
&= \sum_{C\in H} \sum_{e\in E(C)-\{A,B\}} \omega(L_1(C), e) \\
&= \sum_{e\in E(C)-\{A,B\}} \sum_{C\in H \text{ t.q. } A,B,e\in E(C)} \omega(L_1(C), e)
\end{aligned}$$



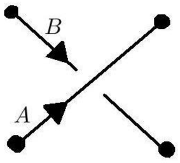
Ahora, para cada arista e en K_7, tal que $e \neq A$, B, el número de de ciclos Hamiltonianos tal que contienen a A, B y e es:

- 0, si e, A, B tienen un vértice en común;
- 3!, si e es adyacente a A o a B, pero no a ambas.
- $2 \times 3!$, en otro caso.

De aquí que para cada arista $e \neq A$, B en K_7, $\omega(L_1, e)$ aparece un número par de veces en $\sigma(K_7) - \sigma(K_7')$. Por lo que $\sigma(K_7) - \sigma(K_7') = 0$ y por tanto σ no cambia al cambiar el cruce en cuestión.

Cambio de cruce tipo III

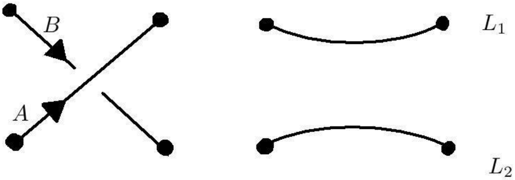
De manera similar al caso II, para un cruce de dos aristas no adyacentes A, B, podemos contraer los vértices de A y B (arrastrando el resto de la gráfica con dicha contracción) de tal manera que la proyección cerca del cruce en cuestión se vea como en la figura:



Sean A, B, dos aristas no adyacentes. Sea $L = L_1 \cup L_2$ como en la figura que se observa abajo. Sea $\varepsilon(C) \in \mathbb{Z}_2$ el cambio en $k(C)$ causado por el cambio de cruce. Entonces tenemos:

$$\varepsilon(C) = lk(L_1, L_2) = \sum \omega(E_1, E_2),$$

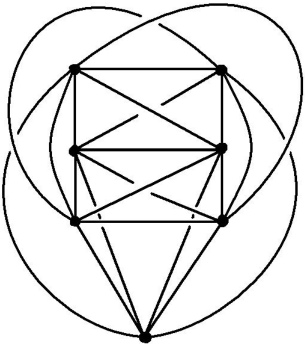
en donde la suma se toma sobre todas las parejas de aristas $\{E_1, E_2\}$ de C tal que $E_i \subset L_i$, $i = 1, 2$.
Sean $\{E_1, E_2\}$ una pareja de aristas de K_7 tal que ni E_1 ni E_2 son A o B, entonces si definimos $\nu(E_1, E_2)$ como el número de ciclos Hamiltonianos tal que contienen a A y a B y que además $E_i \subset L_i$, $i = 1, 2$, entonces $\nu(E_1, E_2)$ siempre es par.



Entonces tenemos que en $\sum \varepsilon(C)$ (en donde la suma se toma sobre todos los ciclos Hamiltonianos tal que contienen a A y a B) cada término $\omega(E_1, E_2)$ aparece un número par de veces. Como $\sigma = \sum \varepsilon(C)$ concluimos que σ no cambia al cambiar el cruce en cuestión.

Un encaje muy particular de K_7

Para concluir la demostración de que K_7 es intrínsecamente anudada, basta observar que el encaje descrito en la figura de abajo, tiene un único ciclo Hamiltoniano T, tal que T no es un nudo trivial, y de hecho T es el nudo trébol, lo cual implica que $\sigma = \sum k(C) = k(T) = 1$.



Gracias

- Conway J.H., Gordon C. McA. 1983. Knots and Links in Spatial Graphs. j. Graph Theory 7:445-453.
- Lannes J., Sur l'invariant de Kervaire des noeuds classiques. Comment. Math. Helvetic 60 (1985) 179-192.
- Colin C. Adams, The Knot Book. W H Freeman and Company, New York, 1994.
- Lickorish, An Introduction to Knot Theory. Graduate Texts in Mathematics Volume 175 of Introduction to Knot Theory Series. Springer, 1991.