XXX Coloquio Víctor Neumann-Lara de Teoría de las Gráficas, Combinatoria y sus Aplicaciones

Oaxaca, Oaxaca, del 2 al 6 de marzo de 2015

Editores

Eduardo Rivera Campo Gelasio Salazar Anaya



Presentación

El Coloquio Víctor Neumann-Lara de Teoría de las Gráficas, Combinatoria y sus Aplicaciones se celebra cada año desde 1985. El Coloquio reúne a los investigadores nacionales que trabajan en áreas afines a la Combinatoria y a sus estudiantes. Es un evento académico abierto, en donde se enriquece y fortalece la investigadores de otros países, y se acerca a los estudiantes a la investigación en las distintas áreas de la Combinatoria.

En 2015, el coloquio celebrará su 30^a edición en la Ciudad de Oaxaca del 2 al 6 de marzo con la participación de los conferencistas invitados Camino Balbuena, Clara Grima, Pavol Hell y Jorge Ramírez Alfonsín. Para conmemorar esta ocasión, el Comité Organizador decidió reunir en este volumen los resúmenes de las ponencias que se presentarán en el coloquio.

Los editores

Comité Organizador

- Mika Olsen, Universidad Autónoma Metropolitana-C
- Mucuy-kak Guevara, Universidad Nacional Autónoma de México
- Ana Paulina Figueroa, Instituto Tecnológico Autónomo de México
- Diego González, Universidad Autónoma Metropolitana-C
- David Flores-Peñaloza, Universidad Nacional Autónoma de México

Comité Local

• Criel Merino, Universidad Nacional Autónoma de México

Comité Directivo

- Hortensia Galeana Sánchez, Universidad Nacional Autónoma de México
- Eduardo Rivera Campo , Universidad Autónoma Metropolitana-I

Contenido

Conferencias Plenarias

•	Descomposiciones del politopo de bases de un matroide
•	Técnicas cuánticas para la evolución de grafos aleatorios
•	Sobre el orden de las jaulas con una pareja de cinturas prefijada

Comunicaciones

La gráfica de apareamientos perfectos restringida a una familia de ciclos Ana Paulina Figueroa, Julián Fresán y Eduardo Rivera Campo	15
Mapas regulares y quirales en el Monstruo del Lago Ness Alexander Arredondo, Camilo Ramírez Maluendas y Ferrán Valdez	19
Conexidad por trayectorias monocromáticas Diego González Moreno, Mucuy-kak Guevara y Juan José Montellano Ballesteros	23
Coloraciones y algoritmos concurrentes Armando Castañeda Rojano	27
Regularidad estocástica de caminatas aleatorias en digráficas Ricardo Gómez Aíza	31
Topología en el estudio de gráficas de clanes Rafael Villarroel Flores, Paco Larrión y Miguel Pizaña	37
Algoritmo de factor 3 para el problema del reparador sobre una recta con ventanas de tiempo unitarias Luis E. Urbán Rivero, Cynthia A. Rodríguez Villalobos, Rafael López Bracho y Francisco Javier Zaragoza Martínez	43
Tropicalizando gráficas Johana Luviano	47
Un acercamiento a las ASR-gráficas Gabriela Juan García y Joaquín Tey Carrera	51
Primeros resultados sobre la existencia de ciclos hamiltonianos en la suma generalizada de digráficas Narda Cordero-Michel, Hortensia Galeana-Sánchez e Ilán A. Goldfeder	57
Buscando jaulas cúbicas a partir de gráficas de Cayley Citlalli Zamora Mejía y Rafael Villarroel Flores	61
Índice aritmético-geométrico de una gráfica Juan Carlos Hernández Gómez, José M. Rodríguez y José M. Sigarreta	65
Propiedades matemáticas del diferencial de una gráfica Sergio Bermudo, Juan C. Hernández Gómez y José M. Sigarreta	69

• Primeros resultados sobre la existencia de ciclos hamiltonianos en la <i>P</i> -composición de digráficas <i>Ma. del Pilar Cano, Hortensia Galeana-Sánchez e Ilán A. Goldfeder</i>	73
• Número de perforación, número cromático y la conjetura de Katchalski Bertín Hernández T. y Déborah Oliveros B.	77
• Índice cromático circular con una aplicación a un problema de asignación Ma. Guadalupe Rodríguez S. y José de Jesús Rodríguez M.	81
• Sobre la computabilidad del clan comportamiento Carmen Cedillo y Miguel Pizaña	87
• Acerca de una conjetura de Erdős-Grünbaum A. Montejano, L. Montejano, E. Roldán-Pensado y P. Soberón	93
• Sobre el índice pseudoacromático-conexo de las gráficas completas Gabriela Araujo-Pardo y Christian Rubio-Montiel	97
• Complejos que modelan un sistema distribuido Fernando A. Benavides y Sergio Rajsbaum	101
• Curvas que se pintan solas Hans L. Fetter	105
Ciclos en torneos multipartitos Ana Paulina Figueroa, Juan José Montellano Ballesteros y Mika Olsen	109
• Jaulas mixtas Gabriela-Araujo Pardo, César Hernández Cruz y Juan José Montellano Ballesteros	115
• Sobre las extensiones finitas de gráficas Natalia García-Colín, Miguel Angel Pizaña y Rafael Villarroel-Flores	117
• Desigualdades para la constante de hiperbolicidad de gráficas cúbicas José M. Sigarreta, José M. Rodríguez y Yadira Torres-Nuñez	121
• Total dominación en el producto cartesiano de gráficas Sergio Bermudo, Walter Carballosa y José M. Sigarreta	125
• Digráficas H-pancromáticas Hortensia Galeana-Sánchez y Rocío Rojas Monroy	129
• Una caracterización combinatoria de triangulaciones del disco Edgar Morales Avalos y Natalia García-Colín	133
• Digráficas núcleo imperfectas críticas y familias de torneos generalizados Hortensia Galeana-Sánchez y Mika Olsen	137
• Gráficas y ajedrez Adriana Hansberg	141
• La segunda capa convexa de todo dibujo rectilíneo óptimo de K_n es un triángulo J. Leaños, M. Lomelí-Haro, M. Ramírez-Ibáñez y L. M. Rivera-Martínez	145
• Rumbo a transfiguraciones planas de gráficas en una cuadrícula <i>Fidel Barrera-Cruz</i>	149
• Una introducción al análisis topológico de datos Natalia García-Colín	155

Conexidad promedio Diego González Moreno, Mucuy-kak Guevara y Mika Olsen	159
• Turán proporcional y cotas para el número cromático Leonardo Ignacio Martínez Sandoval y Luis Montejano Peimbert	
• Coloraciones completas de gráficas planas Sara Murillo Garcia, Gabriela Araujo-Pardo, Christian Rubio-Montiel, Esteban Contreras y Andrea Tort	167
• Gráficas mixtas de Moore Gabriela Araujo-Pardo, Camino Balbuena, Mirka Miller y Mara Ždímalová	
• Explorando el concepto de perfección en 3-hipergráficas Natalia García-Colín, Amanda Montejano y Déborah Oliveros	
 Resultados extremales en gráficas de intersección de cajas en R^d A. Martínez-Pérez, L. Montejano y D. Oliveros 	
• Algoritmos locales para detectar conjuntos de corte	

Descomposiciones del politopo de bases de un matroide*

Jorge Luis Ramírez Alfonsín[†]

Resumen

Una descomposición del politopo de bases P(M) de un matroide M es una descomposición de la forma $P(M) = \bigcup_{i=1}^{t} P(M_i)$ donde cada $P(M_i)$ es también el politopo de bases de algún matroide M_i , y para cada $1 \le i \ne j \le t$, la intersección $P(M_i) \cap P(M_j)$ es una cara de ambos $P(M_i) \ge P(M_j)$.

En esta plática discutiremos resultados sobre la existencia (y la no existencia) de tales descomposiciones en dos o más partes.

Palabras Clave. Matroide. Politopo de Bases.

1 Introducción

Un matroide $M = (E, \mathcal{B})$ de rango r es un conjunto finito $E = \{1, \ldots, n\}$ junto con una colección no vacía $\mathcal{B} = \mathcal{B}(M)$ de subconjuntos de E de cardinal r (llamados bases de M) que verifican el siguiente axioma de intercambio de bases:

si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $e \in B_1 \setminus B_2$ entonces existe $f \in B_2 \setminus B_1$ tal que $(B_1 - e) + f \in \mathcal{B}$.

La familia de conjuntos *independientes* de M, denotada por $\mathcal{I}(M)$, consiste de todos los subconjuntos de las bases de M.

Definición 1 El politopo de bases de un matroide $M = (E, \mathcal{B})$ es definido como la envoltura convexa de los vectores incidentes de las bases de M, esto es,

$$P(M) := \operatorname{conv}\left\{\sum_{i \in B} e_i : B \text{ una base de } M\right\},\$$

donde e_i denota el *i*-ésimo vector de la base canónica de \mathbb{R}^n .

P(M) es un politopo de dimensión a lo más n-1. Observemos que P(M) es una cara del politopo de conjuntos independientes I(M) el cual es obtenido como la envoltura convexa del conjunto de vectores incidentes de los independientes de M. Estos politopos fueron inicialmente estudiados por Edmonds [6].

Definición 2 Una decomposición del politopo de bases P(M) es una descomposición de la forma

$$P(M) = \bigcup_{i=1}^{t} P(M_i)$$

donde cada $P(M_i)$ es también el politopo de bases de algún matroide M_i , y para cada $1 \le i \ne j \le t$, la intersección $P(M_i) \cap P(M_j)$ es una cara de ambos $P(M_i) \ge P(M_j)$.

^{*}Trabajo realizado con apoyo de ANR TEOMATRO grant ANR-10-BLAN 0207 †Université Montpellier 2, jramirez@um2.fr

Diremos que P(M) es descomponible si su politopo de bases tiene una descomposición con $t \ge 2$ (indescomponible en caso contrario). Una descomposición es llamada partición por hiperplano si t = 2.

Este tipo de descomposiciones han aparecido en diferentes contextos. Por ejemplo, fueron tratadas por Hacking, Keel y Tevelev [7, Section 3.3] en relación a la compactificación de ciertos espacios de arreglos de hiperplanos (ver también [8] y [9, Section 2.6]), por Speyer [13, 14] con respecto a espacios tropicales lineales y por Lafforgue [10, 11] durante el estudio de compactificaciones de las celdas de Schubert finas de los Grassmannianos. En particular, el trabajo de Lafforgue implica que para un matroide M representado por vectores en \mathbb{F}^r , si P(M) is indescomponible, entonces M será rígido, esto es, Mtendrá solamente un número finito de realizaciones (considerando escalas y la acción de $GL(r,\mathbb{F})$). Más recientemente, Billera, Jia y Reiner [2] (ver también Luoto [12]), Speyer [13, 14], Derksen [5] y Ardila, Fink y Rincon [1] han estudiado diferentes funciones matroidales que se comportan como valuaciones con respecto a la decomposición del politopo de bases asociado.

2 Resultados conocidos

Por lo visto arriba es de mucho interés saber cuando un politopo de bases de un matroide es descomponible o no. Desafortunadamente no se conoce muchos sobre la existencia de tales descomposiciones aún en el caso más sencillo cuando t = 2.

Kapranov [8, Section 1.3] demostró que todas las descomposicions de matroides de rango dos (apropiadamente parametrizados) pueden ser obtenidos como una sucesión de particiones de hiperplanos. En [2], Billera, Jia y Reiner encontraron cinco matroides de rango tres con 6 elementos cuyos politipos de bases son indescomponibles. Ellos también demostraron que P(M) puede descomponerse en tres partes (cada una indescomponible) donde M es el matroide de rango tres con elements $\{1, \ldots, 6\}$ teniendo como bases todas las tripletas excepto $\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}$ and $\{3, 5, 6\}$. Más aún, ellos demostraron que esta descomposición no puede ser obtenida con una sucesión de particiones de hiperplanos.

3 Divisiones de hiperplanos

Sea $M = (E, \mathcal{B})$ un matroide de rango r y sea $A \subseteq E$. Recordemos que el conjunto de independientes de la *restricción* de M a A, denotado por $M|_A$, está dado por $\mathcal{I}(M|_A) = \{I \subseteq A : I \in \mathcal{I}(M)\}$.

Definición 3 Sea (E_1, E_2) una partición de E, tal que $E = E_1 \cup E_2$ y $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Sea $r_i > 1$, i = 1, 2 el rango del matroide $M|_{E_i}$. Diremos que (E_1, E_2) es una buena partición si existen enteros $0 < a_1 < r_1$ y $0 < a_2 < r_2$ con las siguientes propiedades:

 $(P1) r_1 + r_2 = r + a_1 + a_2 y$

(P2) para todo $X \in \mathcal{I}(M|_{E_1})$ con $|X| \leq r_1 - a_1$ y para todo $Y \in \mathcal{I}(M|_{E_2})$ con $|Y| \leq r_2 - a_2$ tenemos $X \cup Y \in \mathcal{I}(M)$.

Lema 1 Sea $M = (E, \mathcal{B})$ un matroide de rango r y sea (E_1, E_2) una buena partición de E. Sea

 $\mathcal{B}(M_1) = \{ B \in \mathcal{B}(M) : |B \cap E_1| \le r_1 - a_1 \} \ \text{y} \ \mathcal{B}(M_2) = \{ B \in \mathcal{B}(M) : |B \cap E_2| \le r_2 - a_2 \}.$

donde r_i es el rango del matroide $M|_{E_i}$, $i = 1, 2 y a_1, a_2$ son enteros que satisfacen las propiedades (P1) y (P2). Entonces, $\mathcal{B}(M_1) y \mathcal{B}(M_2)$ son las familias de bases de los matroides $M_1 y M_2$ respectivamente.

Teorema 2 [3] Sea $M = (E, \mathcal{B})$ un matroide de rango r y sea (E_1, E_2) una buena partición de E. Sean M_1 y M_2 los matroides dados por el lema 1. Entonces, $P(M) = P(M_1) \cup P(M_2)$ es una partición por hiperplanos no trivial.

3.1 Matroides uniformes

Diremos que dos particiones por hiperplanos $P(M_1) \cup P(M_2)$ y $P(M'_1) \cup P(M'_2)$ de P(M) son equivalentes si $P(M_i)$ es combinatoriamente equivalente a $P(M'_i)$ para cada i = 1, 2, esto es, las latices de caras correspondientes son isomorfas (en caso contrario diremos que las particiones de hiperplanos son diferentes). **Definición 4** El matroide uniforme, denotado por $U_{r,n}$ tiene n elementos y sus bases son todos los subconjuntos de $\{1, \ldots, n\}$ de cardinal r.

Corolario 3 [3] Sean $n \ge r+2 \ge 4$ enteros. Sea $h(U_{r,n})$ el número de particiones de hiperplanos diferentes de $P(U_{r,n})$. Entonces, $h(U_{r,n}) \ge \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$.

3.2 Suma directa

Sea $M_1 = (E_1, \mathcal{B})$ y $M_2 = (E_2, \mathcal{B})$ matroides de rango r_1 y r_2 respectivamente dónde $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. La suma directa, denotada por $M_1 \oplus M_2$, de los matroides M_1 and M_2 tiene como conjunto base la unión disjunta $E(M_1 \oplus M_2) = E(M_1) \cup E(M_2)$ y como conjunto de bases $\mathcal{B}(M_1 \oplus M_2) = \{B_1 \cup B_2 | B_1 \in \mathcal{B}\}$ $\mathcal{B}(M_1), B_2 \in \mathcal{B}(M_2)\}.$

Teorema 4 [3] Sean $M_1 = (E_1, \mathcal{B})$ y $M_2 = (E_2, \mathcal{B})$ matroides de rango r_1 y r_2 respectivamente donde $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Entonces, $P(M_1 \oplus M_2)$ tiene una división de hiperplano no trivial si y solo si $P(M_1)$ o $P(M_2)$ tiene una división de hiperplano no trivial.

3.3 Matroide binario

Teorema 5 [3] Sea M un matroide binario. Entonces, P(M) no tiene una partición por hiperplano no trivial.

Corolario 6 [3] Sea P(M) el politopo de bases de un matroide que tenga el hipercubo como 1-esqueleto. Entonces, P(M) es indescomponible.

4 Sucesión de particiones por hiperplanos

Una pregunta natural es la siguiente: dado un politopo de bases P(M) de un matroide M jes posible encontrar una sucesión de separaciones por hiperplanos que de una descomposición de P(M)? esto es jes posible encontrar una separación por hiperplano de P(M) tal que una de las dos partes obtenidas tenga una separación por hiperplano tal que a su turno, tenga una separación por hiperplano continuando así se obtiene una descomposición de P(M)?

Una de las dificultades cuando se aplica una sucesión de separaciones por hiperplanos es que las intersecciones obtenidas tiene que ser el politopo de bases de un matroide y, en general, la intersección de matroides no es siempre un matroide, por ejemplo, $\mathcal{B}(M_1) = \{\{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}\}$ y $\mathcal{B}(M_2) =$ $\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$ son matroides pero $\mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2) = \{\{1,3\},\{2,3\},\{2,4\}\}$ no lo es.

Definición 5 Sea $M = (E, \mathcal{B})$ un matroide de rango r y sea $A \subseteq E$. Sea $t \ge 2$ un entero tal que $r \ge t$. Sea $E = \bigcup_{i=1}^{t} E_i$ una t-partición de $E = \{1, \dots, n\}$ y sea $r_i = r(M|_{E_i}) > 1, i = 1, \dots, t$. Diremos que $\bigcup_{i=1}^{t} E_i$ es una buena t-partición si existen enteros $0 < a_i < r_i$ con las siguientes propiedades :

$$(Q1) r = \sum_{i=1}^{t} a_i,$$

(Q2) (a) Para todos los índices j con $1 \le j \le t - 1$

si
$$X \in \mathcal{I}(M|_{E_1 \cup \cdots \cup E_j})$$
 con $|X| \le a_1$ y $Y \in \mathcal{I}(M|_{E_{j+1} \cup \cdots \cup E_t})$ con $|Y| \le a_2$,
entonces $X \cup Y \in \mathcal{I}(M)$.

(b) Para todo par
$$j, k \text{ con } 1 \leq j < k \leq t-1$$

si $X \in \mathcal{I}(M|_{E_1 \cup \dots \cup E_j}) \text{ con } |X| \leq \sum_{i=1}^j a_i, Y \in \mathcal{I}(M|_{E_{j+1} \cup \dots \cup E_k}) \text{ con } |Y| \leq \sum_{i=j+1}^k a_i \text{ y } Z \in \mathcal{I}(M|_{E_{k+1} \cup \dots \cup E_t})$
con $|Z| \leq \sum_{i=k+1}^t a_i$, entonces $X \cup Y \cup Z \in \mathcal{I}(M)$.

Notemos que una buena 2-partición dada por (Q2) (a) con t = 2 es una buena partición previamente definida arriba.

Lema 7 Sea $t \ge 2$ un entero y sea $E = \bigcup_{i=1}^{t} E_i$ una buena t-partición con enteros $0 < a_i < r(M|_{E_i})$, $i=1,\ldots,t$. Sea

$$\mathcal{B}(M_1) = \{ B \in \mathcal{B}(M) : |B \cap E_1| \le a_1 \}$$

y, para cada $j = 1, \ldots, t$, sea

$$\mathcal{B}(M_j) = \{ B \in \mathcal{B}(M) : |B \cap E_1| \ge a_1, \dots, |B \cap \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i| \ge \sum_{i=1}^{j-1} a_i, |B \cap \bigcup_{i=1}^j E_i| \le \sum_{i=1}^j a_i \}.$$

Entonces, $\mathcal{B}(M_i)$ es la colección de bases de matroides para cada $i = 1, \ldots, t$.

Teorema 8 [4] Sea $t \ge 2$ un entero y sea $M = (E, \mathcal{B})$ un matroide de rango r. Sea $E = \bigcup_{i=1}^{t} E_i$ una buena t-partición con enteros $0 < a_i < r(M|_{E_i}), i = 1, ..., t$. Entonces, P(M) es una sucesión de t divisiones de hiperplanos obteniendo una descomposición

$$P(M) = \bigcup_{i=1}^{t} P(M_i).$$

donde M_i , $1 \leq i \leq t$, son los matroides dados por el Lema 7.

4.1 Matroides uniformes

Corolario 9 [4] Sean $n, r, t \ge 2$ enteros tales que $n \ge r + t$ y $r \ge t$. Sea $p_t(n)$ el número de descomposiciones del entero n de la forma $n = \sum_{i=1}^{t} p_i$ con $p_i \ge 2$ y sea $h_t(U_{r,n})$ el número de descomposiciones de $P(U_{r,n})$ en t partes. Entonces, $h_t(U_{r,n}) \ge p_t(n)$.

4.2 Suma directa

Teorema 10 [4] Sean $M_1 = (E_1, \mathcal{B})$ y $M_2 = (E_2, \mathcal{B})$ matroides de rango r_1 y r_2 respectivamente donde $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Entonces, $P(M_1 \oplus M_2)$ admite una sucesión de separaciones por hiperplano si $P(M_1)$ o $P(M_2)$ admite una sucesión de separaciones por hiperplano.

Referencias

- Ardila F., Fink A., Rincon F., Valuations for matroid polytope subdivisions, Bulletin, Canad. J. Math. 62 (2010), 1228–1245.
- [2] Billera L.J., Jia N., Reiner V., A quasisymmetric function for matroids, European J. Combin. 30 (2009) 1727–1757.
- [3] Chatelain V., Ramírez Alfonsín J.L., Matroid base polytope decomposition, Adv. Appl. Math. 47(2011), 158–172.
- [4] Chatelain V., Ramírez Alfonsín J.L., Matroid base polytope decomposition II: sequences of hyperplane splits, Adv. in Appl. Math., 54 (2014), 121–136.
- [5] Derksen H., Symmetric and-quasi-symmetric functions associated to polymatroids, J. Algebraic Combin. 30 (2010), 29–33 pp.

- [6] Edmonds J., Submodular functions, matroids, and certain polyhedra, in: Combinatorial Structures and their Applications (Proc. Calgary Internat. Conf., Calgary, Alta., 1969), Gordon and Breach, New York 1970 69–87 (reprinted in Combinatorial optimization—Eureka, you shrink!, 11–26, Lecture Notes in Comput. Sci. 2570 Springer, Berlin, 2003).
- [7] Hacking P., Keel S., Tevelev J., Compactification of the moduli space of hyperplane arrangements, J. Algebraic Geom. 15 (2006) 657–680.
- [8] Kaprano M., Chow quotients of Grassmannians I, Soviet Math. 16 (1993) 29–110.
- [9] Keel S., Tevelev J., Chow quotients of Grassmannians II, ArXiv:math/0401159 (2004).
- [10] Lafforgue L., Pavages des simplexes, schémas de graphes recollés et compactification des PGL_r^{n+1}/PGL_r , Invent. Math. 136 (1999) 233–271.
- [11] Lafforgue L., Chirurgie des grassmanniennes, CRM Monograph Series 19 American Mathematical Society, Providence, RI 2003.
- [12] Luoto K.W., A matroid-friendly basis for the quasisymmetric functions, J. Combin. Theory Ser. A 115 (2008) 777–798.
- [13] Speyer D.E., Tropical linear spaces, SIAM J. Disc. Math. 22 (2008) 1527–1558.
- [14] Speyer D.E., A matroid invariant via K-theory of the Grassmannian, Advances in Mathematics, 221 (2009) 882–913.

Técnicas cuánticas para la evolución de grafos aleatorios

Enrique F. Borja^{*}

Clara Grima[†] Alber

Alberto Márquez[‡] Reyes

Reyes Zambrano[§]

Resumen

Con la idea de modelar el comportamiento de diversas redes sociales a lo largo del tiempo, mostramos algunos resultados preliminares sobre evolución de grafos aleatorias empleando técnicas inspiradas en la mecánica cuántica. Presentaremos el formalismo y veremos como podemos pasar de una descripción microscópica a una descripción macroscópica. Por último, compararemos nuestro modelo con los bien conocidos grafos de Erdős-Rényi.

Palabras Clave. Grafo aleatorio. Hamiltoniano. Operadores de creación y destrucción. Erdős-Rényi.

1 Introducción

La evolución temporal de grafos es un tema de candente actualidad. La aparición de las redes sociales, y su importancia comercial y política, nos obliga a mejorar nuestra capacidad de modelado de dichos sistemas.

Para ello, introducimos un modelo que nos permite describir la evolución temporal de los valores esperados de las características de los grafos a dos niveles. Por un lado podemos modelar el comportamiento microscópico de las aristas entre nodos tal y como se hace en los trabajos clásicos. Por otro lado, podemos acercarnos a las técnicas de las grafos aleatorios exponenciales donde se trabaja con colectivos siguiendo el espíritu de la mecánica estadística en física. Para acometer este objetivo aplicamos las técnicas de las mecánica estadística de Baez et al. que toman su inspiración en la mecánica cuántica. Esto nos permite describir los procesos de creación y destrucción de las aristas entre nodos del grafo. Esta idea tiene como ventaja que podemos aplicar las ideas cuánticas sin tener que enfrentarnos a los problemas derivados de su formulación en espacios de Hilbert complejos y del omnipresente principio de indeterminación de Heisenberg.

2 Breve resumen sobre mecánica estocástica

En esta sección vamos a introducir los elementos esenciales de la mecánica estocástica [1] que emplearemos a lo largo de este trabajo. Por razones de espacio y para mantener la claridad de la exposición omitiremos los detalles técnicos.

Queremos describir un sistema (la evolución de un grafo que modela una red dinámica) que está definido según el número de constituyentes (nodos) del mismo. El número de constituyentes se representan por n. En este contexto supondremos que dichos elementos constituyentes del sistema se pueden crear y destruir. Profundizaremos en ello en lo que sigue pero ahora tenemos que introducir el concepto de estado.

Un estado Ψ en mecánica estocástica se define como una serie de potencias formal en la variable z.

$$\Psi = \sum_{n} \psi_n z^n,\tag{1}$$

^{*}Universidad de Sevilla (España), efernandez19@us.es

[†]Universidad de Sevilla (España), grima@us.es

[‡]Universidad de Sevilla (España), almar@us.es

[§]Universidad de Sevilla (España), mzambrano16@alumno.uned.es

donde los coeficientes de la serie ψ_n son las probabilidades de que nuestro sistema tenga un número n de constituyentes. Por supuesto, tenemos que asegurar la condición

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n = 1. \tag{2}$$

Llegados a este punto tenemos que introducir los operadores de creación y de destrucción. Un operador de creacción se denota por a^{\dagger} y su actuación sobre un estado es simplemente la multiplicación por z. Si tomamos el estado $\Psi = z^n$ la actuación del operador a^{\dagger} viene dada por

$$a^{\dagger}z^n = z^{n+1}.\tag{3}$$

Por otro lado, el operador de destrucción, que denotaremos por a, actúa como un operador de derivación d/dz. Su actuación sobre el anterior estado da lugar a

$$az^n = \frac{dz^n}{dz} = z^{n-1}.$$
(4)

Es interesante calcular el conmutador entre estos dos operadores,

$$\left[a,a^{\dagger}\right] = 1,\tag{5}$$

Este conmutador define completamente el álgebra de los operadores que vamos a definir y será de gran utilidad en lo que sigue. De hecho, en mecánica cuántica esta relación es la que define de forma abstracta los operadores de creación y destrucción. Dicho nombre es totalmente apropiado dados los términos en los que hemos definido los estados y la actuación de dichos operadores. Por supuesto, se cumple que $[a, a] = [a^{\dagger}, a^{\dagger}] = 0$.

Un operador interesante es el operador número, A, que es el que cuenta el número de constituyentes del sistema. Este operador expresa en términos de los operadores $a \ge a^{\dagger}$ del siguiente modo,

$$A = a^{\dagger}a, \tag{6}$$

empleando las relaciones de conmutación entre a y a^{\dagger} obtenemos los siguientes conmutadores, [A, A] = 0, $[A, a^{\dagger}] = a^{\dagger}$ y [A, a] = -a La evolución temporal de los estados vendrá definida por la acción de un operador lineal, el Hamiltoniano, representado por H y que definiremos apropiadamente en la siguiente sección para el caso que nos ocupa.

En este trabajo estamos interesados en el estudio de la evolución temporal de los valores esperados de distintos observables del sistema. Sea O un operador construido con operadores $a \ge a^{\dagger}$. Para llegar a los resultados de interés introduciremos una notación compacta útil en los cálculos.

Denotaremos la relación (2) por $\Sigma \Psi$. Para que la evolución temporal esté bien definida se tienen que cumplir las siguientes relaciones:

$$\sum a^{\dagger} \Psi = \sum \Psi, \tag{7}$$

у

$$\sum a\Psi = \sum A\Psi.$$
(8)

El valor esperado del operador O se define como $\langle O \rangle = \sum O \Psi$. Su evolución temporal viene dada por la siguiente expresión,

$$\frac{d}{dt}\langle O\rangle = \sum_{8} OH\Psi. \tag{9}$$

3 El Hamiltoniano definido para grafos

La herramienta fundamental que hará modificar nuestro grafo a lo largo del tiempo es el Hamiltoniano.

Definiremos nuestro grafo G de la forma usual dado un conjunto V de n nodos y un conjunto de aristas E. Los nodos serán indexados por letras latinas minúsculas i, j, \ldots que tomarán valores de 1 a n. Las aristas se denotarán por el par de nodos que unen, así ij denotará la arista entre el nodo i y el nodo j. Según la imagen que estamos construyendo podremos construir aristas entre dos nodos aplicando un operador de creación entre los nodos implicados, por lo tanto, a_{ij}^{\dagger} creará una arista entre los nodos i y j. Los operadores de destrucción actuán de forma análoga. Por ahora nos centraremos en grafos no dirigidos y sin autolazos.

En este caso tenemos que extender las relaciones de conmutación para este caso de la siguiente forma

$$\left[a_{kl}, a_{ij}^{\dagger}\right] = \delta_{kl,ij},\tag{10}$$

donde la $\delta_{kl,ij}$ es una delta de Kronecker generalizada, que tal y como definiremos las sumas sobre vértices y teniendo en cuenta las características de los grafos en las que estamos trabajando, toma el valor 1 cuando los operadores actúan sobre las misma arista y toma el valor 0 cuando actúan sobre aristas diferentes.

Podemos definir el operador que cuenta las aristas entre un par de nodos

$$A_{ij} = a_{ij}^{\dagger} a_{ij}, \tag{11}$$

no es difícil notar que este operador es la representación en nuestro modelo del elemento ij de la matriz de adyacencia. Por tanto, nuestro modelo tiene que tener los ingredientes necesarios para asegurar que dichos operadores solo pueden tener autovalores 0 o 1. Este es un punto sutil que está relacionado con el carácter fermiónico de las aristas de la gráfica. Dicho de otro modo, las multiaristas entre un par de nodos no están permitidas.

Las relaciones de conmutación que involucran a los operadores A_{ij} que utilizaremos en los cálculos que siguen son:

$$\begin{split} & [A_{kl}, A_{ij}] = 0, \\ & [A_{kl}, a_{ij}] = -a_{kl}\delta_{kl,ij}, \\ & \left[A_{kl}, a_{ij}^{\dagger}\right] = a_{kl}^{\dagger}\delta_{kl,ij}. \end{split}$$

3.1 El Hamiltoniano

Con las herramientas que hemos definido en anteriormente estamos en disposición de construir nuestro Hamiltoniano. Este operador contendrá diversas partes teniendo cada una de ellas un significado en la evolución del grafo. En estas líneas que siguen definiremos cada una de las contribuciones del Hamiltoniano.

Hamiltoniano libre

El Hamiltoniano libre simplemente da cuenta del número de aristas presentes en el grafo.

$$H_0 = \gamma_0 \sum_i \sum_{j < i} A_{ij},\tag{12}$$

donde γ_0 es un parámetro real que tiene que ser fijado dependiendo de las propiedades del grafo.

Hamiltoniano aleatorio

En esta parte del Hamiltoniano se tiene en cuenta la posibilidad de que dos nodos cualesquiera del grafo se interactúen entre sí creando o destruyendo una arista entre ellos.

$$H_R = \alpha \sum_{i} \sum_{j>i} (a_{ij}^{\dagger} - 1)(1 - A_{ij}) + \beta \sum_{i} \sum_{j>i} (a_{ij} - A_{ij}),$$
(13)

donde α y β son parámetros reales que cumplen $\alpha + \beta = 1$.

El Hamiltoniano total será por tanto

$$H = H_0 + H_R$$

Como veremos en la próxima sección la única parte de Hamiltoniano que genera evolución temporal es el H_R dado que H_0 conmuta con todos los observables que vamos a estudiar al estar estos construidos como composición de operadores del tipo A_{ij} .

4 Erdős-Rényi

En esta sección exponemos cómo nuestro modelo puede recuperar el comportamiento de un grafo aleatorio de Erdős-Rényi,[2], en términos de los valores promedio de cantidades medibles en el grafo. El modelo nos da la evolución temporal de estos valores promedio y se recuperan los resultados conocidos en el límite de tiempos de evolución grandes.

Número total de Aristas

El número total de aristas de nuestro grafo como $E = \sum_k \sum_{l>k} A_{kl}$. La evolución temporal del valor promedio de este observable viene dado por:

$$\frac{d}{dt}\langle E\rangle = \sum E H_R \Psi.$$
(14)

El resultado, para un estado inicial $\Psi_0 = 1$, el grafo sin aristas, tiene la forma

$$\langle E(t) \rangle = \frac{\alpha n(n-1)}{2} - \frac{\alpha n(n-1)}{2} e^{-t}.$$
 (15)

Se puede calcular cualquier otra magnitud relevante del grafo como el grado promedio de un nodo, el número de caminos de longitud 2, el número de 2-estrellas, etc. Todos los resultados son idénticos asintóticamente con los resultados conocidos de este tipo de grafos.

Empleando estos resultados podemos acometer el estudio estadístico de un colectivo de grafos aleatorios [3]. Para ello utilizamos la función de partición del sistema suponiendo que el promedio del número total de aristas está fijado. La función de partición está definida por

$$Z = \sum_{\mathcal{G}} e^{\langle H_0 \rangle} = (1 + e^{\gamma_0})^{\binom{n}{2}},\tag{16}$$

donde \mathcal{G} es el colectivo de todos los grafos posibles considerando que son todas equiprobables e imponiendo un valor esperado del número de aristas. A partir de este resultado es trivial recuperar la distribución de probabilidad de Erdős-Rényi para obtener un grafo concreto dentro del colectivo.

$$P(G) = \left(\frac{e^{\gamma_0}}{1+e^{\gamma_0}}\right)^{\langle E \rangle} \left(\frac{1}{1+e^{\gamma_0}}\right)^{\binom{n}{2}-\langle E \rangle}$$
(17)

Referencias

- Baez, J. C., Biamonde, J.: A Course on Quantum Techniques for Stochastic Mechanics, arXiv:1209.3632v1 [quant-ph], 2012.
- [2] Albert, Réka., Barabasi, Albert-Lazlo.: Statistical Mechanics of complex networks, Reviews of modern physics 74 2002, 47 – 97.
- [3] Fronczak, Agata.: Exponential random graph models, Chapter in Encyclopedia of Social Network Analysis and Mining, R. Alhajj, J. Rokne (Eds.) Springer-Verlag 2014.

Sobre el orden de las jaulas con una pareja de cinturas prefijada^{*}

C. Balbuena^{\dagger} J. Salas^{\ddagger}

Resumen

Una (k; g, h)-gráfica es una k-regular gráfica con pareja de cinturas (g, h) donde g es la cintura de la gráfica, h es la longitud de un ciclo más pequeño de diferente paridad que g y g < h. Una (k; g, h)-jaula es una (k; g, h)-gráfica con el menor número posible de vértices denotado por n(k; g, h). En [4], Harary y Kóvacs plantearon la conjetura $n(k; g, h) \leq n(k, h)$ para todo $k \geq 3, g \geq 3, h \geq g + 1$. En este trabajo probamos esta conjetura para toda (k; g, h)-jaula con g impar suponiendo que una (k, h)-jaula bipartita exista. Y cuando g es par probamos la conjetura para $h \geq 2g - 1$, suponiendo que una (k, g)-jaula exista.

Palabras Clave. Gráfica. Jaulas. Pareja de cinturas.

1 Introducción

En [4], Harary and Kóvacs generalizaron el concepto de (k, g)-jaulas reemplazando la condición de la cintura con una *pareja de cinturas* (g, h), (i.e. g es la cintura del gráfica, h es la longitud del ciclo más pequeño de diferente paridad que g y g < h). En ese trabajo los autores probaron la existencia de (k; g, h)-jaulas con $3 \le g < h$, y obtuvieron la siguiente desigualdad: $n(k; g, h) \le 2n(k, h)$. Também probaron que si $k \ge 3$ y $h \ge 4$, entonces $n(k; h - 1, h) \le n(k, h)$, y establecieron la conjetura siguiente.

Conjectura 1 ([4]) $n(k; g, h) \le n(k, h)$ para todo $k \ge 3, g \ge 3, h \ge g + 1$.

Los valores exactos n(k; 4, h) se estudiaron en [5, 7, 9] y los valores exactos de n(3; 6, h) para h = 7, 9, 11 se determinaron en [2]. Todos estos valores cumplen la Conjetura 1. En [1] se probó la desigualdad estricta n(k; h - 1, h) < n(k, h) para $k \ge 3$ y $h \ge 4$.

Queremos enfatizar que toda (k, g)-jaula conocida con cintura par g, es bipartita y se conjetura que todas las jaulas con cintura par son bipartitas [6, 8]. En este aspecto, hay un resultado (c.f. [?]) que establece que todas las (k, g)-jaulas con cintura par g y tal que tienen exceso $e = n(k, g) - n_0(k, g) \le k-2$ son bipartitas. De aquí que el requisito de la existencia de (k, g)-jaulas bipartitas para g par, es natural.

En primer lugar probamos la Conjetura 1 cuando la cintura (más pequeña) g es impar supuesto que existe una (k, h)-jaula bipartita con g < h. También probamos que n(3; 5, 8) = 18. En segundo lugar estudiamos la Conjetura 1 cuando la cintura (más pequeña g es par, y probamos la desigualdad estricta n(k; g, h) < n(k, h) si $h \ge 2g - 1$ suponiendo que existe una (k, g)-jaula bipartita. Además, probamos la conjetura para cinturas g = 6, 8, 12 y k = q + 1, donde q > 2 es una potencia de primo.

2 Conjetura 1 vale para pareja de cinturas (g,h) con g impar

Teorema 1 Sea $h \ge 6$ par y $k \ge 3$. Supongamos que existe una (k, h)-jaula bipartita. Si $g \ge 5$ es un número impar tal que $h/2 + 1 \le g < h$, entonces

$$n(k;g,h) \leq \begin{cases} n(k,h) - 2\sum_{i=0}^{(h-g-3)/2} (k-1)^i - (k-1)^{(h-g-1)/2} & \text{for } h \ge 8; \\ n(k,h) - 1 & \text{for } h = 6. \end{cases}$$

^{*}Trabajo realizado con apoyo del Ministerio de Educación y Ciencia de España, y el Fondo Europeo Regional para el Desarrollo (ERDF) bajo el proyecto MTM2011-28800-C02-02

[†]Universitat Politécnica de Catalunya, m.camino.balbuena@upc.edu

[‡]Universitat Politécnica de Catalunya, julian.salas@upc.edu

Teorema 2 n(3;5,8) = 18. (ver Fig. 1)



Figura 1: Un (3; 5, 8)-gráfica de 18 vértices

Teorema 3 Sea h > 6 par y $k \ge 3$. Supongamos que hay una (k, h)-jaula bipartita. Si g es un número impar tal que $g \le h/2 - 1$, entonces n(k; g, h) < n(k, h).

Teorema 4 Sea $h \equiv 2 \pmod{4}$ y $k \geq 3$. Supongamos que hay una (k, h)-jaula bipartita. Entonces $n(k; h/2, h) \leq n(k, h)$.

3 Conjetura 1 vale para pareja de cinturas (g,h) con g par y $h \ge 2g-1$

En [2] se calculan los valores exactos n(3;6,7) = 18, n(3;6,9) = 24 y n(3;6,11) = 28. También se prueba que $n(3;6,h) \leq \frac{1}{3}(10h+2k)$ para $0 \leq k \leq 2$ y $h \equiv k \mod (3)$. Como consecuencia obtenemos el corolario siguiente donde se muestra que la Conjetura 1 vale para toda jaula cúbica de pareja cinturas (6,h).

Corolario 5 n(3; 6, h) < n(3, h).

Para continuar estudiando la Conjetura 1 para toda (k; g, h)-jaula con g par y h impar, introducimos una construcción que resulta muy útil para romper ciclos cortos al tiempo que se preserva la regularidad y la cintura par.

Definición 1 Sean G, H dos gráficas vértice disjuntas, $uv \in E(G)$ y $st \in E(H)$. Definimos un nuevo gráfica $G^{uv}\Gamma_{st}H$, al que llamamos **inserción** de (G, uv) en (H, st), de la forma siguiente:

- $V(G^{uv}\Gamma_{st}H) = V(G) \cup V(H)$
- $E(G^{uv}\Gamma_{st}H) = (E(G) \setminus \{uv\}) \cup (E(H) \setminus \{st\}) \cup \{us, vt\}.$

Teorema 6 Sea $k \ge 3$ y $g \ge 6$ par. Entonces $n(k; g, 2g - 1) \le 2n(k, g)$ suponiendo que existe una (k, g)-jaula bipartita.

Demostración. Sea G una (k, g)-jaula bipartita con $k \ge 3$ y $g \ge 6$. Sea $uv \in E(G)$ una arista de un girdle α de G, consideremos el gráfica inserción $G^{uv}\Gamma_{v'u'}G'$, donde G' es una copia vértice disjunta de G y denotemos por $x' \in V(G')$ la copia del vértice $x \in V(G)$. Sea $N_G(v) - u = \{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}$, supongamos que $v_1 \in V(\alpha)$ ysea $w \in (N_G(v_1) - v) \cap V(\alpha)$. Construimos una nuevo gráfica H a partir de $G^{uv}\Gamma_{v'u'}G'$ como sigue:

- Se eliminan las aristas vv_2 y v_1w y se añaden las aristas vw, v_1v_2 .
- Se eliminan las aristas v_1x (en G) y v'_1x' (en G') y se añaden las aristas v_1x', v'_1x para todo $x \in N(v_1) \setminus \{v, w\}.$

- Si $k \ge 4$, se eliminan las aristas $v_i z$ (en G) y $v'_i z'$ (en G') y añadimos las aristas $v'_i z, v_i z'$ para todo $z \in N(v_i) \setminus \{v\}$ e i = 3, ..., k - 1.

La demostración consiste en probar que el gráfica H es una (k; g, 2g-1)-gráfica de donde se deduce que $n(k; g, 2g-1) \leq 2n(k, g)$.

Lema 7 Sea $k \ge 3$, $g \ge 6$ par y l un entero tal que $1 \le l \le g/2 - 1$. Entonces $n(k; g, g+2l-1) \le 4n(k, g)$ suponiendo que existe una (k, g)-jaula bipartita.

Teorema 8 Sea $k \ge 3$, $g \ge 6$ par y supongamos que hay una (k,g)-jaula bipartita. Entonces $n(k;g,mg+r) \le (k(m-1)+4)n(k,g)$ para $m \ge 1$ y r cualquier número impar tal que $1 \le r \le g-1$. Además, cuando r = g-1, $n(k;g,(m+1)g-1) \le 2mn(k,g)$.

Teorema 9 Supongamos que existe una (k, g)-jaula bipartita con $k \ge 3$ y cintura par $g \ge 6$. Entonces n(k; g, h) < n(k, h) para $h \ge 2g - 1$ impar excepto para k = 3 y h = 2g + 1.

Demostración. Supongamos h = 2g - 1. Usando la cota de Sauer $n(k,g) \le 4(k-1)^{g-3}$, cf. [3], y Teorema 6, se sigue que $n(k;g,2g-1) \le 2n(k,g) \le 8(k-1)^{g-3} \le k(k-1)^{g-3} + k(k-1)^{g-2} < n_0(k,2g-1) \le n(k,2g-1)$, y por tanto el teorema es válido.

Cualquier $h \ge 2g+1$ se puede expresar como h = mg+r para $m \ge 2$ y r impar tal que $1 \le r \le g-1$. Entonces $h = mg+r \le (m+1)g-1$ para todo r impar tal que $1 \le r \le g-1$. Tenemos

$$n(k, mg + r) \ge n_0(k, mg + r) = 1 + k \sum_{i=0}^{(mg+r-3)/2} (k-1)^i > k(k-1)^{(mg+r-3)/2}.$$

Para $k \ge 4$ y $m \ge 2$ o k = 3, m = 2 y $r \ge 3$, o k = 3 y $m \ge 3$ tenemos

$$k(k-1)^{(mg+r-3)/2} > (k(m-1)+4)4(k-1)^{g-3}.$$

Usando la cota de Sauer $n(k,g) \leq 4(k-1)^{g-3}$ [3], y Lema 8 se sigue que

$$k(k-1)^{(mg+r-3)/2} > (k(m-1)+4)n(k,g) \ge n(k;g,mg+r),$$

y por tanto el resultado vale.

Corolario 10 Para toda cintura g = 6, 8, 12 y toda potencia de primo q > 2 se tiene n(q+1; g, h) < n(q+1, h) para todo número impar h > g.

Referencias

- Bao-guang Xu, Ping Wang, Jian-fang Wang: On the Monotonicity of (k; g, h)-graphs, Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series 18(3) (2002), 477–480.
- [2] Campbell, C.M.: On cages for girth pair (6, b), Discrete Math. 177 (1997), 259–266.
- [3] Exoo, G., Jajcay, R.: Dynamic Cage Survey, Electron. J. Combin. 15 (2008), #DS16.
- [4] Harary, F., Kovács, P.: Regular graphs with given girth pair, J. Graph Theory 7 (1983), 209 218.
- [5] Kovács, P.: The minimal trivalent graphs with given smallest odd cycle, Discrete Math. 54 (1985), 295–299.
- [6] Pisanski, T., Boben, M., Marusic, D., Orbanic A., Graovac A.: The 10-cages and derived configurations, Discrete Math. 275 (2004), 265–276.
- [7] Pullman, N.J., Wormald, N.C.: Regular graphs with prescribed odd girth, Utilitas Math. 24 (1983), 243-251.
- [8] Wong, P.K.: Cages–a survey, J. Graph Theory 6 (1982), 1–22.
- [9] Zhang, Guo-Hui: Smallest regular graphs with prescribed odd girth, J. Graph Theory 15(5) (1991), 453-467.

La gráfica de apareamientos perfectos restringida a una familia de ciclos^{*}

Ana Paulina Figueroa[†]

Julán Fresán[‡]

Eduardo Rivera-Campo[§]

Resumen

Dada una familia de ciclos C de una gráfica G, definimos M(G, C) como la gráfica que tiene como vértices a los apareamientos perfectos de G y en la cual L y N son adyacentes si su diferencia simétrica es un ciclo en C. En este trabajo damos condiciones necesarias y condiciones suficientes para que M(G, C) sea conexa.

Palabras Clave. Gráfica de apareamientos. Ciclo extensible. Conexidad.

1 Introducción

Dada una gráfica G = (V, E), un *apareamiento* M es un subconjunto de aristas de G tales que cada vértice en V incide a lo más con una arista en M. Un apareamiento M de G es *perfecto* si todo vértice de G es incidente con alguna arista de M.

Los problemas de maximización de apareamientos y apareamientos perfectos se pueden plantear como problemas de programación entera. El problema de maximización de apareamientos perfectos, PM, se plantea definiendo una variable x_e para cada arista $e \in E$ con peso c_e y una restricción para cada vértice $u \in V$ como sigue:

Maximizar
$$\sum_{e \in E} c_e x_e$$
 sujeto a
 $\sum_{e \perp u} x_e = 1 \quad \forall \ u \in V$
 $x_e \in \mathbb{N} \quad \forall \ e \in E$

En este problema, $e \perp u$ denota que la arista *e* incide con el vértice *u*. Si en lugar de trabajar el *PM* como un problema de programación entera lo planteamos como un problema de programación lineal (conocido como problema de apareamientos perfectos fraccional *PMF*), se puede solucionar en tiempo polinomial. Una forma de hacerlo es vía el *politopo de apareamientos perfectos*, P(G), que es la cerradura convexa de los vectores de incidencia [4]. Es decir,

 $P(G) = conv\{\mathbf{x}_M : M \text{ es un apareamiento perfecto de } G\},\$

donde se identifica a cada apareamiento M con el vector de incidencia $\mathbf{x}_M \subseteq \mathbb{R}^{|E|}$ definido por:

$$[\mathbf{x}_M]_e = \begin{cases} 1 \text{ si } e \in M\\ 0 \text{ de lo contrario} \end{cases}$$

Si nos concentramos en las gráficas bipartitas, entonces esta transformación del problema entero al problema lineal cobra sentido puesto que sabemos que en la familia de gráficas bipartitas, el PMF obtiene soluciones para PM.

En todo el manuscrito G es una gráfica con un número par de vértices y con al menos un apareamiento perfecto. Para cada ciclo σ de G denotaremos también con σ a su conjunto de aristas.

^{*}Con apoyo de Conacyt.

[†]Departamento de Matemáticas, ITAM, ana.figueroa@itam.mx

[‡]Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas, UAM-C, jfresan@correo.cua.uam.mx

[§]Departamento de Matemáticas, UAM-I, erc@xanum.uam.mx

La gráfica de apareamientos de G es la gráfica M(G) que tiene un vértice por cada apareamiento perfecto de G y en la que dos apareamientos L y N son adyacentes si su diferencia simétrica $L\Delta N$ es un ciclo σ .

La gráfica M(G) es isomorfa a la gráfica esqueleto del politopo de apareamientos perfectos P(G): dos apareamientos M y N son adyacentes en M(G) si y sólo si los vectores correspondientes \mathbf{x}_M y \mathbf{x}_N son adyacentes en P(G).

Es conocido (y fácil de ver) que M(G) siempre es conexa pues si L y N son apareamientos perfectos de G, entonces $L\Delta N$ es unión de cierto número k(L, N) de ciclos ajenos cuyas aristas alternan entre L y N y por lo tanto L y N están conectados en M(G) por una trayectoria de longitud a lo mas k(L, N).

Se sabe que la gráfica de apareamientos perfectos es hamiltoniana [5]. Diversos autores han estudiado variaciones del problema para gráficas bipartitas planas [6-14] y para gráficas geométricas [1,2].

Sea C una familia de ciclos pares de G. La gráfica de apareamientos de G restringida a C es la subgráfica generadora M(G, C) de M(G) en la que dos apareamientos L y N son adyacentes si L y N son adyacentes en M(G) y el ciclo $\sigma = L\Delta N$ pertenece a la familia C. En este trabajo damos condiciones necesarias y condiciones suficientes para que la gráfica M(G, C) sea conexa.

Una arista e de una gráfica G es *esencial* si e es arista de algún apareamiento perfecto de G. Una gráfica G es *elemental* si la subgráfica de G inducida por sus aristas esenciales es conexa.

2 Condición necesaria

Un ciclo par σ de una gráfica G es *ciclo extensible* si existe un apareamiento perfecto L de G tal que σ es L alternante. Alternativamente σ es extensible si existen dos apareamientos perfectos L y N de G tales que $L\Delta N = \sigma$.

Teorema 1 Si M(G, C) es conexa, entonces para todo ciclo extensible σ de G, existen ciclos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in C$ tales que $\sigma = \alpha_1 \Delta \alpha_2 \Delta \ldots \Delta \alpha_k$.

Demostración. Sean σ un ciclo extensible de G y L y N apareamientos perfectos de G tales que $L\Delta N = \sigma$.

Como M(G, C) es conexa, existen apareamientos perfectos $L = L_0, L_1, \ldots, L_k = N$ tales que L_i y L_{i+1} son adyacentes en M(G, C) para $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Para $i = 0, 1, \ldots, k-1$ sea $\alpha_i \in C$ tal que $L_i \Delta L_{i+1} = \alpha_i$. Entonces

$$\alpha_1 \Delta \alpha_2 \Delta \dots \Delta \alpha_{k-1} = (L_0 \Delta L_1) \Delta (L_1 \Delta L_2) \Delta \dots \Delta (L_{k-1} \Delta (L_k)) = L_0 \Delta L_k = \sigma$$

	-
	_

3 Condición suficiente

La siguiente propiedad está inspirada en [3], en donde se estudian condiciones suficientes para que cierta subgráfica de la gráfica de árboles T(G) sea conexa.

Sea C es una familia de ciclos extensibles de G. Un ciclo extensible σ de G no en C tiene la propiedad Δ_M^* con respecto a C si para todo par L, M de apareamientos perfectos de G con $\sigma = L\Delta N$, existe un apareamiento perfecto M de G tal que $L\Delta M, M\Delta N \in C$.

Lema 2 Sea C una familia de ciclos extensibles de una gráfica G y sea σ un ciclo de G con la propiedad Δ_M^* con respecto a C. La gráfica M(G,C) es conexa si y sólo si la gráfica $M(G,C \cup \{\sigma\})$ es conexa.

Demostración. Ya que $C \subset C \cup \{\sigma\}$, la gráfica M(G, C) es subgráfica de $M(G, C \cup \{\sigma\})$. Por lo tanto si M(G, C) es conexa, entonces $M(G, C \cup \{\sigma\})$ también es conexa.

Sean L y N apareamientos adyacentes en $M(G, C \cup \{\sigma\})$ y sea $\tau = L\Delta N$. Si $\tau \in C$, entonces L y N son adyacentes en M(G, C).

Supongamos ahora $\tau = \sigma$. Como σ tiene la propiedad Δ_M^* con respecto a C, existe un apareamiento perfecto M de G tal que $L\Delta M, M\Delta N \in C$. Claramente las parejas de apareamientos L, M y M, N son adyacentes en M(G, C) y por lo tanto L y N están conectados en M(G, C).

Para una familia de ciclos C de una gráfica G definimos la cerradura $cl_G(C)$ de C en G de la siguiente forma: consideremos una sucesión de familias de ciclos $C = C_0, C_1, \ldots$ en donde C_{i+1} se obtiene de C_i añadiendo un ciclo $\sigma_i \notin C_i$ que tengan la propiedad Δ_M^* con respecto a C_i . Como G tiene un número finito de ciclos, necesariamente se llega a una familia C_k que sea cerrada con respecto a la propiedad Δ_M^* .

Sean $C' ext{ y } C''$ familias de ciclos cerradas con respecto a la propiedad Δ_M^* , cada una obtenida a partir de C añadiendo, uno a uno, ciclos de G con la propiedad Δ_M^* .

Supongamos $C' \neq C''$ y sean $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ y $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$ las successones de ciclos de G añadidas a C para obtener C' y C'', respectivamente. Sin perder generalidad suponemos $C' \not\subset C''$ y sea l el menor subíndice i tal que $\sigma_i \notin C''$.

Sea $C'_{l-1} = C \cup \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{l-1}\}$. Como σ_l tiene la propiedad Δ_M^* con respecto a $C'_{l-1} \neq C'_{l-1} \subset C''$, entonces σ_l tiene la propiedad Δ_M^* con respecto a C'' lo cual es una contradicción pues $\sigma_i \notin C''$.

Por lo anterior, para cada familia C de ciclos de G existe una única familia $cl_G(C)$ de ciclos de G, cerrada con respecto a la propiedad Δ_M^* y que se obtiene de C partir de C añadiendo, uno a uno, ciclos de G con la propiedad Δ_M^* .

Teorema 3 M(G,C) es conexa si y sólo si $M(G, cl_G(C))$ es conexa.

Demostración. Sea C_0, C_1, \ldots, C_k una sucesión de conjuntos de ciclos tal que $C = C_0, C_k = Cl_M(C)$ y para $i = 0, 1, \ldots, k - 1, C_{i+1}$ se obtiene de C_i añadiendo un ciclo $\sigma \notin C_i$ que tengan la propiedad Δ_M^* con respecto a C_i .

Por el Lema 2, $M(G, C_i)$ es conexa si y sólo si $M(G, C_{i+1})$ es conexa. Aplicando el lema sucesivamente obtenemos que $M(G, C) = M(G, C_0)$ es conexa si y sólo si $M(G, C_k) = M(G, cl_G(C))$ es conexa.

Una familia C de ciclos extensibles de G es Δ_M^* -densa si $cl_G(C)$ contiene a todos los ciclos extensibles de G.

Corolario 4 Si C es Δ_M^* -densa, entonces M(G, C) es conexa.

Demostración. Si C es Δ_M^* -densa, entonces $M(G, Cl_M(C)) = M(G)$ que siempre es conexa. Por el Teorema 3, M(G, C) también es conexa.

4 Familias de ciclos Δ_M -densas

En esta sección damos ejemplos de familias de ciclos Δ_M^* -densas. Esto lo hacemos por medio de dos teoremas presentados aquí sin demostraciones.

Teorema 5 Si G es una gráfica bipartita elemental plana, entonces la familia de ciclos C de G correspondientes a las caras interiores de G es Δ_M -densa.

Como corolario tenemos el siguiente resultado de Zhang et al [13].

Corolario 6 Sea G una gráfica bipartita elemental plana. Si C es la familia de ciclos correspondientes a las caras interiores de G, entonces M(G, C) es conexa.

Demostración. Por el Teorema 5, C es es Δ_M -densa y por el Corolario 4, M(G, C) es conexa.

Teorema 7 Sea G una gráfica bipartita elemental y sea e una arista de G. Si C_e es la familia de ciclos que contienen a la arista e, entonces C_e es Δ_M -densa.

Corolario 8 Sean G una gráfica bipartita elemental y sea e una arista de G. Si C_e es la familia de ciclos de G que contienen a la arista e, entonces $M(G, C_e)$ es conexa.

Demostración. Por el Teorema 7, C_e es es Δ_M -densa y por el Corolario 4, $M(G, C_e)$ es conexa.

Referencias

- Hernando, C., Hurtado, F., Noy, M.: Graphs of non-crossing perfect matchings, Graphs Combin. 18 (2002), 517 – 532.
- [2] Houle, M.E, Hurtado, F., Noy, M., Rivera-Campo, E.: Graphs of of triangulations and perfect matchings, Graphs Combin. 21 (2005), 325 – 331.
- [3] Li, X., Neumann-Lara, V., Rivera-Campo, E.: On a tree graph defined by a set of cycles, Discrete Math. 271 (2003), 303 – 310.
- [4] Lovász, L., Plummer, M.D.: Matching Theory, Annals of Discrete Mathematics 29 1986.
- [5] Naddef, D., Pulleyblank, W.R.: Hamiltonicity and Combinatorical Polyhedra, J. Combin. Theory 31 1981, 297 – 312.
- [6] Sachs, H.: Perfect matchings in hexagonal systems, Combinatorica 4 (1) (1980), 89 99.
- [7] Zhang, F., Guo, X., Chen, R.: Z-transformation graphs of perfect matchings of hexagonal systems, Discrete Math. 72 (1988), 405 – 415.
- [8] Zhang, F., Guo, X., Chen, R.: The connectivity of Z-transformation graphs of perfect matchings of hexagonal systems, Acta Math. Appl. Sinica 4 (2) (1988), 131 – 135.
- [9] Zhang, F., Li, X.: Hexagonal systems with forcing edges, Discrete Math. 140 (1995), 253 263.
- [10] Zhang, F., Zhang, H.: A note on the number of perfect matchings of bipartite graphs, Discrete Applied Math. 73 (1997), 275 – 282.
- [11] Zhang, H.: The connectivity of Z-transformation graphs of perfect matching polyominoes, Discrete. Math. 158 (1996), 257 – 272.
- [12] Zhang, H., Zhang, F.: The rotation graphs of perfect matching of plane bipartite graphs, Discrete Applied Math. 73 (1997), 5 – 12.
- [13] Zhang, H., Zhang, F., Yao, H.: Z-transformation graphs of perfect matchings of plane bipartite graphs, Discrete Math. 276 (2004), 393 – 404.
- [14] Zheng, M.: Perfect matchings in hexagonal systems, Ph.D. Thesis Rutgers University 1992.

Mapas Regulares en el Monstruo del Lago Ness*

Alexander Arredondo[†]

Camilo Ramírez Maluendas[‡]

Ferrán Valdez[§]

Resumen

Una mapa es una tripleta M(G, S, i) donde G es una gráfica, S es una superficie e i es un encaje de G en S. El encaje define una triangulación o "descomposición en banderas" en S y una acción del grupo de automorfismo del mapa en el conjunto banderas. El mapa es regular si la acción es transitiva. En esta plática veremos que en la única superficie no compacta, orientable y con género mayor a cero, en la cual pueden existir mapas regulares es el monstruo del lago Ness.

Palabras Clave. Monstruo del Lago Ness. Mapa regular. Bandera.

1 Introducción.

Un mapa en una superficie es la idea que tenemos de mapa en la Tierra. La superficie es descompuesta en paises "caras" los cuales son delimitados por sus fronteras "aristas". El punto donde tres o más paises se reunen es un vértice del mapa.

Mapas en superficies no compactas conocemos las teselaciones por triángulos equiláteros, cuadrados o hexágonos regulares en el plano euclideano o bien, las teselaciones regulares del plano hiperbólico. Sin embargo, en 2012 se construyeron ejemplos de mapas regulares en superficies no compactas orientables y con género infinito [3]; dichas superficies son el monstruo del lago Ness [1]. Acaso, ¿serán estas las únicas superficies no compactas y orientables en las cuales hay mapas regulares? o tal vez, ¿puedan realizarse mapas regulares en otras superficies no compactas? Para responder a estos interrogantes, nosotros hemos obtenido el siguiente resultado:

Teorema (Arredondo, Ramírez, y Valdez). Si M(G, S, i) es un mapa regular en una superficie no compacta, orientable y con género mayor que cero, entonces S es el monstruo del lago Ness.

No se probará el teorema. No obstante, abordaremos definiciones y ejemplos sencillos relacionados con las palabras clave usadas en el enunciado del teorema.

2 Monstruo del lago Ness.

Para demostrar el teorema de *clasificación* [2] de superficies no compactas se usa el concepto de fin y el género de un fin. Los *fines* son todos los caminos posibles de ir al infinito o todas las maneras posibles de escapar de cualquier compacto (véase Figura 1). Un fin tiene *género infinito* si a medida que caminamos a infinito siempre encontramos género o un "hoyo".

Definición 1 La superficie de género infinito y con un solo fin es el monstruo del lago Ness [4].

^{*}Trabajo realizado con apoyo de Conacyt.

[†]UNAM-Campus Morelia, alexander@matmor.unam.mx

[‡]UNAM-Campus Morelia, camilomaluendas@gmail.com

[§]UNAM-Campus Morelia, ferran@matmor.unam.mx



Figura 2: Monstruo del Lago Ness.

3 Mapas Regulares

Un mapa es una tripleta M(G, S, i) donde G es una gráfica, S es una superficie e i es un encaje de Gen S con las siguientes tres propiedades (véase Figura 3): el subconjunto $i(V(G)) \subset S$ es discreto, cada componente conexa (o *cara*) de $S \setminus i(G)$ es homeomorfa a un disco, y la frontera de cada cara es la unión de una cantidad finita de curvas cerradas simples sin autointersecciones.



Figura 3: Mapa en el toro.

Ejemplo 3.1 El mapa $M(Cay(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, H), \mathbb{E}, i)$ donde $Cay(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, H)$ es la gráfica de Cayley del grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con conjunto generador $H = \{(1, 0), (0, 1)\}, \mathbb{E}$ es el plano euclideano donde $i : Cay(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, H) \to \mathbb{E}$ es el encaje natural (véase Figura 4).



Figura 4: Mapa $M(Cay(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, H), \mathbb{E}, i)$.

Un automorfismo del mapa M(G, S, i) es un homeomorfismo $f : S \to S$ tal que $i^{-1} \circ f \circ i \in Aut(G)$. El grupo de automorfismo del mapa M(G, S, i) se denota por Aut(M(G, S, i)).



Dado que φ : $Aut(M(G, S, i)) \rightarrow Aut(G)$, donde $f \rightarrow i^{-1} \circ f \circ i$ es un morfismo sobreyectivo, entonces los grupos $Aut(M(G, S, i))/\ker \varphi$ y Aut(G) son isomorfos. Abusando de la notación, al grupo cociente $Aut(M(G, S, i))/\ker \varphi$ lo denotamos por Aut(M(G, S, i)).

Una bandera Φ del mapa M(G, S, i) es un "triángulo" en S cuyos tres vértices $v_1, v_2 \neq v_3$ satisfacen lo siguiente: v_1 está $i(V(G)), v_2$ es el "punto medio" de la curva i(e) donde e es una arista de G incidente en $i^{-1}(v_1) \neq v_3$ está en el interior de una cara $f \subset S \setminus i(G)$ cuya frontera contiene la curva i(e). De ese modo podemos descomponer la superficie en banderas (véase Figura 5). Cualquier bandera Φ está



Figura 5: Banderas.

determinada por la tripleta $\Phi := (v, e, f)$ donde v es un vértice de G, e es una arista de G incidente en $v \neq f$ es un ciclo que contiene a e. El conjunto de banderas del mapa se denota por \mathcal{F} .

Definición 2 Dada la acción α : $Aut(G, S, i) \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ donde $([\varphi], (v, e, f)) \to (\varphi(v), \varphi(e), \varphi(f))$, entonces el mapa M(G, S, i) es regular si la acción α es transitiva.

Ejemplo 3.2 Los sólidos platónicos son mapas regulares (véase Figura 6).



Figura 6: Sólidos platónicos.

En un mapa regular todos los vértices tienen el mismo grado y los ciclos tienen el mismo número de aristas, entonces al mapa se le asocia el par $\{p, q\}$ característica de Schläfli, el cual indica que cada ciclo está formado por p aristas y cada vértice es de grado q.

Ejemplo 3.3 Las teselaciones regulares del plano euclideano $\{3, 6\}, \{4, 4\} \in \{6, 3\}$ son mapas regulares.



Figura 7: Teselaciones regulares del plano euclideano.

Ejemplo 3.4 Las teselaciones regulares $\{p, q\}$ del plano hiperbólico tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$, son mapas regulares; véase la Figura 8. Su grupo de automorfismos se llama *grupo de Coxeter* y su representación es

$$[p,q] = \langle \rho_0, \rho_1, \rho_2 : \rho_0^2 = \rho_1^2 = \rho_2^2 = (\rho_0 \rho_2)^2 = (\rho_0 \rho_1)^p = (\rho_1 \rho_2)^q = e \rangle.$$
(1)



Figura 8: Arriba: teselaciones $\{6, 4\}$ y $\{4, 6\}$. Abajo: teselaciones $\{7, 3\}$ y $\{3, 7\}$.

Corolario 1 Existen mapas regulares en el monstruo del lago Ness [1], [3].

¿Hay mapas regulares en alguna otra superficie no compacta y orientable diferentes al plano Euclideano y al monstruo del lago Ness?

Teorema 2 Si M(G, S, i) es un mapa regular tal que S es una superficie no compacta, orientable y de género mayor a cero, entonces S es el monstruo del lago Ness.

Referencias

- [1] Coulbois, T., Pellicer, D., Raggi, M., Ramírez, C. and Valdez, F.: The topology of the minimal regular cover of the Archimedian tessellations, Por aparecer en Adv. in Geo.
- [2] Kerékjártó, B.: Vorlesungen über Topologie I, Springer, Berlín, 1923.
- [3] Pellicer, D. and Williams, G.: *Minimal Covers of the Archimedean Tilings, Part I*, To appear in Electron. J. Combin., 2012.
- [4] Phillips, A. and Sullivan, D.: Geometry of leaves, Topology, 20, 1981, 2, 209–218.

Conexidad por trayectorias monocromáticas*

Diego González-Moreno[†] M

Mucuy-kak Guevara[‡]

Juan José Montellano-Ballesteros[§]

Resumen

Sea D una digráfica fuertemente conexa. Decimos que una coloración c de las flechas de D es una coloración por trayectorias monocromáticas si todo par de vértices de D están conectados por una trayectoria monocromática. En este trabajo se estudia cuál es el máximo número de colores que puede tener una coloración monocromática por trayectorias en una digráfica dada. Se presentan cotas inferiores y superiores en términos de algunos parámetros de la digráfica.

Palabras Clave. Digráfica. Coloración. Trayectoria monocromática. Conexidad.

1 Introducción

Sea D = (V, A) una digráfica fuertemente conexa. Consideremos una coloración $c : A \longrightarrow \{1, 2, ..., k\}$, $k \in \mathbb{N}$, de las flechas de D (flechas adyacentes pueden recibir el mismo color). Dados dos vértices $u \neq v$ en D, decimos que una (u, v)-trayectoria P en D es una trayectoria monocromática si todas las flechas de P tienen el mismo color. Diremos que una digráfica D es conexa por trayectorias monocromáticas (con respecto a la coloración c) si D contiene una (u, v)-trayectoria monocromática entre todo par de vértices $u \neq v$ en D. Diremos que la coloración c es una coloración conexa-monocromática y nos referimos a ella como una SMC-coloración.

Si D es una digráfica fuertemente conexa podemos dar una coloración trivial en la cual todas las flechas reciben el mismo color. Es fácil ver que esta coloración trivial es una SMC-coloración de D. Una pregunta que surge de forma natural es averiguar que tan colorida puede ser una SMC-coloración. Es decir, ¿cuál es el máximo número de colores que puede tener una SMC-coloración de una digráfica D?

El problema de conexidad por trayectorias monocromáticas fue propuesto originalmente por Caro y Yuster [1] en la familia de las gráficas como la versión monocromática al problema de conexidad por trayectorias arcoíris [2, 3].

En el caso de las gráficas, decimos que una coloración c de las aristas de una gráfica G es una colo-ración conexa por trayectorias monocromáticas (para abreviar una MC-coloración) si hay una trayectoria monocromática entre cualquier par de vértices en G. Se puede encontrar una cota inferior para el máximo número de colores que tiene una MC-coloración si coloreamos todas las aristas de un árbol generador con un mismo color y a las aristas restantes con colores diferentes. Entonces, si mc(G) denota el máximo número de colores que puede tener una MC-coloración de una gráfica G con n vértices y m aristas, tenemos

$$mc(G) \ge m - n + 2. \tag{1}$$

Existen gráficas que pueden colorearse con más colores que lo establecido en la cota anterior, de hecho en el caso más extremo tenemos que $mc(K_n) = n(n-1)/2$, y claramente la gráfica completa es la única que alcanza esta cota. Sin embargo, hay una enorme cantidad de gráficas que alcanzan la cota (1).

Teorema 1 (Caro, Yuster, [1]) Sea G una gráfica conexa con n vértices y m aristas. Entonces

mc(G) = m - n + 2,

si se cumple alguna de las siguientes propiedades:

^{*}Trabajo realizado con apoyo del Proyecto 222104 de CONACyT

[†]UAM-Cuajimalpa, dgonzalez@correo.cua.uam.mx

[‡]Facultad de Ciencias, UNAM, mucuy-kak.guevara@ciencias.unam.mx

[§]Instituto de Matemáticas, UNAM, juancho@matem.unam.mx

- a) El complemento de G es 4-conexo.
- b) La gráfica G no contiene triángulos.
- c) El grado máximo $\Delta(G)$ de G cumple

$$\Delta(G) < n - \frac{2m - 3(n-1)}{n-3}.$$

- d) El diámetro de G es al menos tres.
- e) La gráfica G no contiene vértices de corte.

El presente trabajo está enfocado en el estudio de la conexidad por trayectorias monocromáticas en digráficas. En particular se estudia cuál es el máximo número de colores que puede tener una SMC-coloración de una digráfica dada. Se dan cotas para el máximo número de colores que puede tener una SMC-coloración de una digráfica D. Estas cotas se dan en términos de ciertos parámetros de la digráfica, tales como el grado mínimo, el diámetro, el número de vértices y el número de flechas.



Figura 1: Ejemplo de una SMC-coloración con ocho colores.

2 Notación y definiciones básicas

Todas las digráficas consideradas en el presente trabajo son simples, finitas y sin flechas simétricas. Sea D una digráfica. El *orden* de D es el número de vértices de D y el *tamaño* el número de flechas de D. A partir de este momento utilizaremos a n para denotar el orden de la digráfica y m para del tamaño de D.

Decimos que una digráfica D es fuertemente conexa si para todo par de vértices $u ext{ y } v$ en D existe una (u, v)-trayectoria y una (v, u)-trayectoria. Una digráfica D es unilateralmente conexa si para todo par de vértices $u ext{ y } v$ en D existe una (u, v)-trayectoria o una (v, u)-trayectoria (o ambas). Diremos que D es conexa si la gráfica subyacente es conexa. El diámetro de una digráfica D se denota como diam(D) y es la máxima de las distancias entre cualquier par de vértices en D. Una digráfica D es Hamiltoniana si contiene un ciclo (dirigido) que utiliza a todos los vértices de D. Obsérvese que si una digráfica D tiene diámetro finito se sigue que D es fuertemente conexa.

Dada una digráfica D denotamos por smc(D) al máximo número de colores que puede tener una SMC-coloración de D.

Dada una coloración c de las flechas de D, decimos que una clase cromática i de c es no trivial si la subdigráfica inducida por el color i, a la cual denotaremos por D_i tiene al menos dos flechas, es decir $|A(D_i)| \ge 2$.

3 Resultados

El trabajo que se presenta forma parte de una investigación que se encuentra en proceso. Por este motivo los resultados que aquí se muestran son parciales. En esta sección presentamos algunas cotas obtenidas para el máximo número de colores que puede tener una SMC-coloración de una digráfica fuertemente conexa D.

Sea D una digráfica fuertemente conexa y sea H una subdigráfica generadora y fuertemente conexa de D. Si c es una coloración de las flechas de D que asigna a todas las flechas de H un mismo color y al resto de las flechas de D colores distintos obtenemos una SMC-coloración de D y por lo tanto se sigue que

$$smc(D) \ge m - |A(H)| + 1.$$

Observación 1 Si D es una digráfica Hamiltoniana con n vértices y m flechas, tenemos que $smc(D) \ge m - n + 1$.

Creemos que la cota de la Observación 1 es en realidad una igualdad y por este motivo proponemos la siguiente conjetura.

Conjetura 1 Sea *D* una digráfica fuertemente conexa. Entonces *D* es Hamiltoniana si y sólo si smc(D) = m - n + 1.

El siguiente lema se puede demostrar de forma directa y nos da una idea de la estructura que tiene la unión de las digráficas no triviales.

Lema 2 Sea D una digráfica fuertemente conexa y sea c una SMC-coloración de D. Sean D_1, D_2, \ldots, D_k las subdigráficas inducidas por las clases cromáticas no triviales de c. Entonces la subdigráfica D^* inducida por $\bigcup_{i=1}^{k} D_i$ es una subdigráfica generadora unilateralmente conexa. Más aún, si $u \neq v$ son dos vértices no adyacentes en D se sigue que D^* contiene una (u, v)-trayectoria y una (v, u)-trayectoria.

Como una aplicación del lema podemos obtener una cota para smc(D) en términos del orden, el tamaño y el diámetro de una digráfica D.

Proposición 3 Sea D una digráfica con diámetro d. Entonces

$$smc(D) \le \frac{3}{2}m - n - \frac{d-2}{2}.$$

En el siguiente teorema se establece una cota superior para smc(D) en términos del grado mínimo de una digráfica D.

Teorema 4 Sea D una digráfica fuertemente conexa. Entonces

$$smc(D) \le m - n + \delta + 1.$$

donde $\delta = \min\{\delta^+(D), \delta^-(D)\}.$

Como consecuencia del teorema anterior obtenemos el siguiente corolario, el cual se obtiene al acotar superiormente el grado mínimo de una digráfica.

Corolario 5 Si D es una digráfica fuertemente conexa, entonces

$$smc(D) \le m - \frac{3n+1}{2}.$$

También podemos encontrar cotas superiores en términos de la conexidad por flechas de una digráfica.

Proposición 6 Si D es una digráfica fuertemente conexa con conexidad por flechas t, entonces

$$smc(D) \ge t+1.$$

Referencias

- Caro, Y., Yuster, R.: Colorful monochromatic connectivity, Discrete Math. 311 (2011), 1786 1792.
- [2] Caro, Y., Lev, A, Tuza, Z. Yuster, R.: On Rainbow connection, Electronic J. Combinatorics 15 (2008), # R57.
- [3] Chartrand, G., Johns, G.L., McKeon, K.A., Zhang, P.: Rainbow connection in graphs, Mathematica Bohemica 133 (2008), 85–98.
Coloraciones y Algorítmos Concurrentes

Armando Castañeda Rojano^{*}

Resumen

En esta nota presentamos dos problemas que son equivalentes, uno puramente topológico y otro puramente computacional. El problema topológico trata de encontrar subdivisiones de simplejos para los que existen coloraciones con ciertas restricciones, mientras que el problema computacional trata de desarrollar algoritmos concurrentes para que los procesos en el sistema definan una partición. Esta equivalencia ejemplifica la ya conocida conexión entre la topología y el cómputo concurrente.

1. Subdivisiones y Coloraciones

Sea \triangle^m un simplejo de dimensión m. En este trabajo estamos interesados en coloraciones de subdivisiones del *n*-esqueleto de \triangle^m : el subcomplejo $\mathsf{sk}^n(\triangle^m)$ de \triangle^m que contiene caras de dimensión a lo más n. Particularmente, buscamos subdivisiones cromáticas, definidas de la siguiente forma. Decimos que una subdivision $\mathsf{Div}\,\mathsf{sk}^n(\triangle^m)$ de $\mathsf{sk}^n(\triangle^m)$ es cromática si existe un mapeo simplicial f: $\mathsf{Div}\,\mathsf{sk}^n(\triangle^m) \to$ $\mathsf{sk}^n(\triangle^m)$ tal que para todo $\sigma \in \mathsf{Div}\,\mathsf{sk}^n(\triangle^m)$, $f(\sigma)$ es el soporte de σ , a saber, el simplejo de $\mathsf{sk}^n(\triangle^m)$ de dimensión más pequeña que contiene a σ ; decimos que dicho mapeo f es cromático. La Figura 1 (a) muestra una subdivision cromática de un 2-simplejo cuyos vértices son $\{0, 1, 2\}$, mientras que la Figura 1 (b) muestra una subdivisión cromática del 1-esqueleto de un 3-simplejo cuyos vértices son $\{0, 1, 2, 3\}$.

Dada una subdivision cromática Div $\mathsf{sk}^n(\triangle^m)$ y un entero $0 \le c \le n$, una *c-coloración* de Div $\mathsf{sk}^n(\triangle^m)$ es un mapeo simplicial g: Div $\mathsf{sk}^n(\triangle^m) \to \triangle^c$. La coloración es *buena* si para todo simplejo σ de Div $\mathsf{sk}^n(\triangle^m)$ de dimensión $n, g(\sigma) = \triangle^c$.



Figura 1: Subdivisiones cromáticas

Definición 1 (Tríadas buenas) Decimos que una tríada (m, n, c) es buena si $1 \le c \le n \le m$ y existe una subdivisión cromatica Div skⁿ (Δ^m) tal que existe una c-coloración buena de esta.

Observe que dados enteros m y n tales que $0 \le n \le m$, la tríada (m, n, 0) es buena: podemos definir Div $\mathsf{sk}^n(\Delta^m) = \mathsf{sk}^n(\Delta^m)$ y claramente existe una c-coloración buena de $\mathsf{sk}^n(\Delta^m)$, dado que c = 0. De forma opuesta, si c > n simplemente no puede existir una c-coloración buena de alguna subdivisión cromática Div $\mathsf{sk}^n(\Delta^m)$, entonces la tríada (m, n, c) no es buena.

Definición 2 (El problema de la coloración buena) Dados enteros $m \ge n$ tales que $0 \le n \le m$, encontrar el entero más grande $0 \le c \le n$ tal que la tríada (m, n, c) es buena.

^{*}Instituto de Matemáticas, UNAM. armando.castaneda@im.unam.mx.

Tomemos como ejemplo el caso m = 2 y n = 1. Como acabamos de ver, la tríada (m, n, 0) es buena. Ahora veremos que la tríada (m, n, 1) = (2, 1, 1) no es buena, y por lo tanto para este caso particular, m = 2 y n = 1, la solución al problema de la coloración buena es c = 0.

Primero observemos que \triangle^m es un triángulo y skⁿ(\triangle^m) es el borde de ese triángulo. No es muy difícil ver que en cualquier subdivisión cromática de skⁿ(\triangle^m), cada lado del borde del tiángulo está subdividido en un número impar de segmentos más pequeños, lo que quiere decir que a final de cuentas la subdivisión no es más que un ciclo de longitud impar. Ahora bien, no puede existir una 1-coloración (estamos analizando el caso c = 1) de esa subdivisión porque simplemente es imposible colorear un ciclo de longitud impar con dos colores y que toda arista tenga colores distintos en sus vértices.

Aún se sabe poco del problema de la coloración buena. La demostración de los siguientes resultados [2, 3, 5] ha requerido el uso de construcciones topológicas complicadas, algoritmos distribuidos y resultados que conectan la topología con el cómputo distribuido (más sobre esto en la sección siguiente).

Teorema 3 Sean m y n enteros tales que n es una potencia de un número primo y $m \ge 2n$. La solución al problema de la coloración buena es c = 0.

Teorema 4 Sean m y n enteros tales que n no es potencia de un número primo y $m \ge 2n$. La solución c al problema de la coloración buena es mayor or igual a 1 y menor estrictamente que n - 1.

2. Interpretación Computacional

Resulta que el problema de la coloración buena es equivalente al problema computacional de particionar el conjunto con los agentes de cómputo en un sistema concurrente, problema que explicamos a continuación.

En un sistema concurrente tenemos agentes de cómputo que se comunican entre sí haciendo uso de un medio de comunicación. Podemos pensar que cada agente, típicamente llamado *proceso*, es una computadora que ejecuta un programa que se comunica con los demás procesos a través de un medio que funciona como una especie de pizarrón que esta divido en celdas, una por cada proceso. Cada proceso puede escribir información en su celda y puede leer las demás celdas, todas de un solo golpe. Esta es la forma en que los procesos se comunican, escribiendo y leyendo el pizarrón. Algo importante es que los procesos son *asíncronos*: cada uno ejecuta las instrucciones de su programa local a su propia velocidad, es decir, no hay estimación alguna del momento en que un proceso va a ejecutar su siguiente instrucción, este periodo puede tener una duración de unos cuantos nanosegundos hasta varios minutos.

Vamos a considerar un sistema con m+1 procesos de los cuales a los más $n+1 \le m+1$ se pondrán a funcionar. La idea intuitiva de esta situación es que podríamos tener en una bodega m+1 robots, cada uno de ellos programado para poder solucionar un problema específico con cualesquiera otros n robots. Entonces podemos tomar arbitrariamente n+1 de esos m+1 robots y ponerlos a funcionar.

El problema que queremos estudiar aquí es de que los n + 1 procesos (o robots) se particionen en c + 1 conjuntos. Cada proceso debe eligir uno de los c + 1 conjuntos posibles, es decir, cada proceso sabe a qué conjunto pertenece pero no sabe a que conjuntos pertenecen los demás procesos. La idea de particionar los procesos es que los procesos en cada conjunto cooperen para solucionar un tarea específica que está relacionada al conjunto que los procesos eligieron. Todas las c+1 tareas serán atendidas porque los procesos definen una partición.

Definición 5 (Tríadas computacionalmente buenas) Una tríada (m, n, c) es computacionalmente buena si $0 \le c \le n \le m$ y existe un algoritmo concurrente tal que cualesquiera n + 1 procesos de un universo de m + 1 procesos, producen una partición con c + 1 conjuntos del conjunto con los n + 1procesos.

No es muy difícil ver que una tríada (m, n, 0) siempre es computacionalmente buena: cada proceso elige el único conjunto que puede elegirse. De forma contraria, si c > n, la tríada (m, n, c) no puede ser computacionalmente buena puesto que hay más conjuntos que procesos. **Definición 6 (El problema de la partición.)** Dados dos enteros $m \ge n$ tales que $0 \le n \le m$, determinar el entero más grande $0 \le c \le n$ tal que la tríada (m, n, c) es computacionalmente buena.

Resulta que el problema de la coloración buena y el problema de la partición son equivalentes:

Teorema 7 (Equivalencia entre coloraciones y particiones) Dados $0 \le n \le m$, c es la solución al problema de la coloración buena si y sólo si c es la solución al problema de la partición.

A continuación explicamos brevemente la prueba de esta equivalencia.



Figura 2: Estados finales para dos procesos $p \ge q$.

Algoritmos \implies Subdivisiones Existe una fuerte relación entre el cómputo cuncurrente y distribuido y la topología [1, 4, 6]. Una primera observación es que por medio de un simplejo podemos representar el estado del sistema en un momento en particular; cada vértice del simplejo se corresponde con el estado local de un proceso. Entonces, usando complejos simpliciales podemos representar todos los posibles estados que puede alcanzar el sistema, donde cada simplejo representa un estado posible.

Por ejemplo, consideremos los posibles estados que pueden alcanzar dos procesos, p y q, en un algoritmos en que cada uno de ellos escribe su identificador en el pizarrón y después lee. Esencialmente hay tres poibles casos (ver Figura 2): (a) p lee antes que q escriba (entonces p ve que la casilla de q en el pizarrón está vacía) (b) q lee antes que p escriba (q ve que la casilla de p en el pizarrón está vacía) y (c) p y qleen después de que ambos escriban (ambos ven lo que el otro ha escrito en su casilla correspondiente). Estos tres posibles estados se pueden representar con un complejo simplicial de dimensión 1 con tres aristas. Aún más, haciendo uso de una arista podemos modelar el estado del sistema en el que p y q no han ejecutado ninguna operación aún, es decir, el estado inicial. El complejo resultante no es más que una subdivisión del simplejo inicial de p y q.

Siguiendo esta idea, modelamos el estado inicial de los m+1 procesos con un simplejo \triangle^m de dimensión m, y para cada cara σ de \triangle^m de dimensión a lo más n (que representa el estado inicial de los procesos en sus vértices), construimos un complejo que contiene todos los posibles estados finales que alcanza el algoritmo cuando los procesos en σ ejecutan el programa. Se ha demostrado en [1, 4, 6] que un subcomplejo de este complejo no es una subdivisión cromática de σ . Entonces, todo algoritmo induce una subdivisión cromática Div skⁿ(\triangle^m) de skⁿ(\triangle^m). Ahora bien, en esta subdivisión cada vértice representa el estado local de un proceso que ejecutó el algoritmo hasta producir una salida, y por lo tanto cada vértice de Div skⁿ(\triangle^m) tiene un color que representa la salida que produjo el proceso correspondiente a ese vértice. Las propiedades de esa coloración de Div skⁿ(\triangle^m) dependen del problema que solucione el algoritmo en cuestión.

Ahora consideremos una tríada (m, n, c) que es computacionalmente buena. Entonces existe un algoritmo que soluciona el problema de la partición para los valores m+1, n+1 y c+1. Como ya vimos, este algoritmo induce una subdivisión cromática Div skⁿ(Δ^m). Aún más, puesto que el algoritmo soluciona el problema de la partición, induce una *c*-coloración Div skⁿ(Δ^m) $\rightarrow \Delta^c$. Finalmente, esta *c*-coloración debe ser buena porque no puede ser que una cara σ de Div skⁿ(Δ^m) de dimensión *n* tenga menos de c+1 colores distintos en sus vértices, ya que el algoritmo soluciona el problema de la partición. Entonces tenemos que:

Lema 8 Si (m, n, c) es una tríada computacionalmente buena entonces (m, n, c) es una tríada buena.

Subdivisiones \implies Algoritmos La demostración de la otra dirección es más complicada y llevaría más del espacio disponible aquí para explicarla. A grandes rasgos, la idea principal es la siguiente.

Si (m, n, c) es una tríada buena, entonces tenemos una subdivisión cromática $\operatorname{Div} \operatorname{sk}^n(\Delta^m)$ y una *c*coloración buena de esta subdivisión. Como ya explicamos antes, el estado inicial de nuestro sistema concurrente lo podemos modelar con el simplejo Δ^m . De los resultado en [1, 4] podemos obtener un algoritmo \mathcal{A} que dada cualquier subdivisión $\operatorname{Div}'\operatorname{sk}^n(\Delta^m)$, para toda cara σ de $\operatorname{sk}^n(\Delta^m)$, cada vez que los procesos en σ corren \mathcal{A} , al final de la ejecución convergen en un simplejo de $\operatorname{Div}' \sigma$ de dimensión $\dim(\sigma)$ y además procesos distintos eligen vértices distintos del simplejo. En otras palabras, los procesos eligen distintos vértices en $\operatorname{Div}' \sigma$ que corresponden a un simplejo en la subdivisión.

Usando \mathcal{A} y la subdivisión $\mathsf{Div} \mathsf{sk}^n(\Delta^m)$ podemos solucionar el problema de la partición para los valores $m, n \neq c$: los procesos que aparecen en una cara σ de $\mathsf{sk}^n(\Delta^m)$ corren \mathcal{A} para converger en una cara de $\mathsf{Div} \sigma$, cada proceso eligiendo un vértice diferente; finalmente un proceso que decide un vértice v, elige el conjunto g(v) de la partición, donde g es una c-coloración buena de $\mathsf{Div} \mathsf{sk}^n(\Delta^m)$ cuya existencia está garantizada dado nuestra hipótesis de que (m, n, c) es una tríada buena (todos los procesos conocen la misma g antes de iniciar la ejecución). El algoritmo descrito soluciona el problema de la partición para los valores $m, n \neq c$ porque g es una c-coloración buena. Podemos concluir:

Lema 9 Si (m, n, c) es una tríada buena entonces (m, n, c) es una tríada computacionalmente buena.

3. Conclusiones

En esta nota hemos presentado dos problemas que a primera vista parecen no tener relación alguna, uno puramente topológico, el problema de la coloración buena, y el otro completamente computacional, el problema de la partición buena. Brevemente explicamos que los problemas son equivalente. Esto resulta interesante porque es un ejemplo más de la fuerte conexión que existe entre la topología y el cómputo concurrente. Cabe destacar que el problema de la partición buena no es un problema sintético que sirva únicamente para ejemplificar la mencionada conexión, este problema es una abstración del problema de romper simetrías, noción que aparece frecuentemente al diseñar e implementar sistemas distribuidos y concurrentes en la industria. La formulación del problema dada aquí modela una subclase de la clase general de problemas estudiados en [5].

Como fue mencionado, existen pocos resultados de estos problemas, sin embargo, los pocos resultados que se conocen son interesantes. El trabajo futuro es muy claro, seguir estudiando y trabajando para obtener más resultados, ya sea desde la perspectiva computacional o la topológica.

- E. Borowsky and E. Gafni, Generalized FLP Impossibility Result for t-Resilient Asynchronous Computations. En: Proceedings of the 25th. Annual ACM Symposium on Theory of Computing, pp. 91-100, 1993.
- [2] A. Castañeda A. and S. Rajsbaum, New Combinatorial Topology Upper and Lower Bounds for Renaming: The Lower Bound. Distributed Computing 22(5-6):287-301, 2010.
- [3] A. Castañeda and S. Rajsbaum, New Combinatorial Topology Upper and Lower Bounds for Renaming: The Upper Bound. Journal of the ACM 59(1): 3, 2012.
- M. Herlihy and N. Shavit, The Topological Structure of Asynchronous Computability. Journal of the ACM 46(6), pp. 858-923, 1999.
- [5] D. Imbs, S. Rajsbaum, and M. Raynal, The Universe of Symmetry Breaking Tasks. Proc. 18th International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity (SIROCCO'11), pp. 66-77, 2011.
- M. Saks and F. Zaharoglou, Wait-Free k-Set Agreement is Impossible: the Topology of Public Knowledge. SIAM Journal on Computing 29(5): pp. 1449-1483, 2000.

Regularidad estocástica de caminatas aleatorias en digráficas

Ricardo Gómez Aíza*

Resumen

La regularidad estocástica ocurre cuando coinciden dos formas distintas de caminar aleatoriamente una digráfica. Por ejemplo, una digráfica es Perron-regular si ocurre un sistema de entropía máxima cuando al caminarla escogemos con probabilidad uniforme una arista dentro del conjunto de aristas que salen de un vértice dado. Daremos un panorama del desarrollo de la regularidad estocástica en digráficas.

Palabras Clave. Caminata aleatoria. Regularidad estocástica. Producto tensorial.

1 Introducción

Existen muchos enfoques diferentes para construir la matriz de probabilidades de transición de una cadena de Markov, la cual está asociada tanto con una digráfica G = (V, E), cuyos vértices son el espacio de estados y cuyas aristas son las posibles transiciones del proceso, como con una función de probabilidades de transición $\mathbb{P}: E \to (0, \infty)$, es decir \mathbb{P} satisface que para cada estado $v \in V$, la restricción de \mathbb{P} al conjunto E_v de aristas con estado inicial v es una función de probabilidad (ver e.g. [4] como referencia a cadenas de Markov). Dada una función de pesos $\omega: E \to (0, \infty)$, una forma estocástica es un proceso de normalización f que transforma a ω en una función de probabilidades de transición $f(\omega) = \mathbb{P}_{\omega}$. Escribiremos también $f(G, \omega) = (G, f(\omega))$ para recalcar la matriz asociada G. Diremos que (G, ω) es regular con respecto a dos formas estocásticas f y g si $f(G, \omega) = g(G, \omega)$. Si la función de pesos se omite, es decir, si únicamente consideramos la digráfica G, asumiremos que la función de pesos es $\omega_0: E \to \{1\}$ y escribiremos $f(G) = f(G, \omega_0)$. El propósito de esta comunicación es presentar en breve los resultados que a la fecha se conocen acerca de la regularidad estocástica y la compilación que hacemos se basa principalmente en [3].

1.1 Digráficas pesadas y matrices

 (G, ω) se puede describir con una matriz cuadrada con entradas reales no negativas, a saber $A = A(G, \omega) \in M_{|V| \times |V|}([0, \infty))$ definida por

$$A_{v,u} = \begin{cases} \omega(v,u) & \text{si } (v,u) \in E\\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para todo $v, u \in V$. Inversamente, dada una matrix cuadrada con entradas reales no negativas $A \in M_{n \times n}([0, \infty))$, podemos asociarle una digráfica G = G(A) junto con una función de pesos $\omega = \omega(A)$, a saber la digráfica G = (V, E) con V = [n] y cuya matriz de transición es $A^{\#}$, donde $A_{i,j}^{\#} = A_{i,j}^{0}$ (bajo la convención $0^{0} = 0$), junto con la función de pesos $\omega(i, j) = A_{i,j}$ para toda arista $(i, j) \in E$. De esta forma tenemos una dicotomía

$$(G,\omega) \leftrightarrow (A^{\#},A)$$

entre digráficas pesadas y matrices cuadradas con entradas no negativas (como referencia ver, por ejemplo, [1]). Así, a lo largo de esta comunicación, podremos intercambiar sistemáticamente conceptos y símbolos que sean dicotómicos sin lugar a ambigüedades o imprecisiones dentro del contexto.

^{*}Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México, rgomez@math.unam.mx

2 Formas estocásticas

Entonces una forma estocástica es una función f que transforma una matriz cuadrada con entradas reales no negativas A en una nueva matriz f(A) que satisface $f(A)^{\#} = A^{\#}$ y que tiene la propiedad de ser estocástica, ya sea por renglones (la suma de las entradas de cada renglón es igual a 1) o por columnas (la suma de las entradas de cada columna es igual a 1). f es doblemente estocástica si es una forma estocástica tanto por renglones como por columnas (en cuyo caso podemos caminar tanto "hacia adelante" como "hacia atrás", con cierta distribución de probabilidad en cada caso).

2.1 Formas diagonales

Definición 1 Una forma estocástica f es una forma diagonal si actúa en una matriz $A \in M_{n \times n}([0, \infty))$ bajo la regla

$$A \stackrel{f}{\mapsto} \alpha D^{(r)} A D^{(c)}$$

donde $D^{(r)}$ y $D^{(c)}$ son dos matrices diagonales con diagonales estrictamente positivas y $\alpha > 0$ es un número real (en general todos dependen de A). En este caso escribiremos $f \leftarrow (\alpha; D^{(r)}, D^{(c)})$.

2.2 Estándar

Definición 2 Definimos la vecindad por renglones de $v \in V$ como $N_G^r(v) = \{u \in V : (v, u) \in E\}$. Definimos también el grado pesado por renglones de v como

$$\delta^r_\omega(v) = \sum_{u \in N^r_G(v)} \omega(v, u)$$

y simplemente el grado por renglones de v como $\delta^r(v) = \delta^r_{\omega_0}(v)$. (G, ω) es peso regular por renglones si $\delta^r_{\omega}(v) = \delta^r_{\omega}(u)$ para todo $v, u \in V$. G es regular por renglones si (G, ω_0) es peso regular por renglones.

Definición 3 La forma estocástica estándar por renglones de (G, ω) es la forma diagonal

$$\mathcal{S}^r \leftarrow \left(1; S^{(r)}, I_{|V|}\right)$$

donde $S^{(r)}$ es la matriz inversa de grados pesados por renglones, es decir, la matriz diagonal cuya diagonal es $(1/\delta_{\omega}^{r}(v))_{v \in V}$, e I_{n} es la matriz identidad de tamaño n.

OBSERVACIÓN. Todas las definiciones y resultados para renglones se pueden formular en forma simétrica para columnas y se dejan, por razones de brevedad, al lector. Sin embargo se dan por establecidos y asumiremos la misma notación simplemente sustituyento $r \mapsto c$.

2.3 Sinkhorn-Knopp

Definición 4 La forma doblemente estocástica de Sinkhorn-Knopp S resulta cuando converge el límite de la iteración de las formas estocásticas estándar por renglones y columnas, es decir,

$$\mathcal{S} = \lim_{k \to \infty} \left(\mathcal{S}^c \circ \mathcal{S}^r \right)^k.$$

Bajo ciertas condiciones (ver [7]), \mathcal{S} está bien definida (i.e. converge) y es una forma diagonal.

2.4 Brualdi-Parter-Schneider

Definición 5 La forma estocástica de Brualdi-Parter-Schneider por renglones \mathcal{B}^r es toda aquella forma diagonal por renglones de la forma

$$\mathcal{B}^r \leftarrow (1; D, D).$$

Está definida para digráficas que satisfacen ciertas condiciones técnicas estructurales (ver [2]).

2.5 Perron

Definición 6 Supongamos que G es fuertemente conexa y sea $(\lambda_A > 0, \mathbf{p}_A)$ un sistema característico Perron por renglones de A. La forma estocástica de Perron por renglones de (G, ω) es la forma diagonal

$$\mathcal{P}^r \leftarrow \left(\frac{1}{\lambda_A}; P_A^{-1}, P_A\right)$$

donde P_A es la matriz diagonal cuya diagonal es \mathbf{p}_A .

Esta forma estocástica es importante porque si A es la matriz de adyacencia (es decir $\omega = \omega_0$), entonces la medida de probabilidad inducida en el espacio shift subyacente es precisamente la medida de entropía máxima (ver [6] así como [5] para una introducción a espacios shift).

3 Regularidad estocástica

3.1 Estándar y Sinkhorn-Knopp

Teorema 1 Si $\mathcal{S}^r(G,\omega)$ es doblemente estocástica, entonces $\mathcal{S}^r(G,\omega) = \mathcal{S}(G,\omega) = \mathcal{S}^c(G,\omega)$. En este caso, $\delta^r_{\omega}(v) = \delta^c_{\omega}(u)$ para toda $(v, u) \in E$.

3.2 Estándar y Brualdi-Parter-Schneider

Teorema 2 Supongamos que $\mathcal{B}^r(G, \omega)$ está definida. Entonces $\mathcal{S}^r(G, \omega) = \mathcal{B}^r(G, \omega)$ si y sólo si (G, ω) es peso regular por renglones.

3.3 Estándar y Perron

Definición 7 Un vector $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ es localmente constante por renglones con respecto a G si para todo $v \in V$, $x_i = x_j$ para todo $i, j \in N_G^r(v)$.

Teorema 3 Supongamos que G es fuertemente conexa. Entonces $S^r(G, \omega) = \mathcal{P}^r(G, \omega)$ si y sólo si \mathbf{p}_A es localmente constante por renglones con respecto a G.

Definición 8 Si se satisfacen las condiciones del Teorema 3, entonces decimos que (G, ω) es Perronregular por renglones. En particular, G es Perron-regular por renglones si (G, ω_0) es Perron-regular por renglones.

Teorema 4 Si (G, ω) y (H, ρ) son dos digráficas pesadas Perron-regulares por renglones, entonces $(G, \omega) \otimes (H, \rho)$ es Perron-regular por renglones.

Proposición 5 Supongamos que (G, ω) y (H, ρ) son dos digráficas pesadas, $\mathcal{P}^r(G; \omega) = \mathcal{P}^r(H, \rho)$ y que (G, ω) es Perron regular por renglones. Sean $A = A(G, \omega)$ y $B = A(H, \rho)$. Entonces (H, ρ) es Perron-regular por renglones si y sólo si

$$\mathbf{p}_A/\mathbf{p}_B = (p_1^{(A)}/p_1^{(B)}, \dots, p_n^{(A)}/p_n^{(B)})^T$$

es localmente constante por renglones con respecto a G.

Teorema 6 Si G es una gráfica (i.e. una digráfica simétrica), entonces G es Perron-regular (por renglones o por columnas) si y sólo si es regular o bipartita biregular.

Problema. Identificar todas las digráficas Perron-regulares.

3.4 Sinkhorn-Knopp y Brualdi-Parter-Schneider

Teorema 7 Supongamos que $\mathcal{B}^r(G, \omega)$ existe. Entonces $\mathcal{B}^r(G, \omega)$ es doblemente estocástica si y sólo si existe una única solución positiva $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ al sistema lineal homogéneo $\mathbf{x}(A - A^T) = \mathbf{0}$ (en particular det $(A - A^T) = 0$) que además satisface

$$x_j \sum_{i=1}^n x_i A_{i,j} = x_j \sum_{i=1}^n x_i A_{j,i} = 1 \quad para \ toda \ j \in [n].$$
(1)

En este caso, $A = A(G, \omega)$ tiene soporte total (ver [7]) y $\mathcal{B}^r(G, \omega) = \mathcal{S}(G, \omega) = \mathcal{B}^c(G, \omega)$.

Corolario 8

$$\lim_{k \to \infty} (\mathcal{B}^c \circ \mathcal{B}^r)^k (G, \omega)$$

converge si y sólo si $\mathcal{B}^r(G,\omega)$ es doblemente estocástica. En este caso, $\mathcal{B}^r(G,\omega) = \mathcal{S}(G,\omega) = \mathcal{B}^c(G,\omega)$.

3.5 Sinkhorn-Knopp y Perron

Teorema 9 Supongamos que G es fuertemente conexa y $A = A(G, \omega)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- 1. $\mathcal{P}^r(G,\omega)$ es doblemente estocástica.
- 2. $\mathcal{P}^{c}(G, \omega)$ es doblemente estocástica.
- 3. $\mathcal{P}^r(G,\omega) = \mathcal{P}^c(G,\omega).$
- 4. $(\mathbf{p}_A^{-1})^T$ es vector Perron izquierdo de A.
- 5. $(\mathbf{q}_A^{-1})^T$ es vector Perron derecho de A (\mathbf{q}_A es el vector Perron izquierdo de A).
- 6. $\mathcal{P}^r(G,\omega) = \mathcal{S}(G,\omega).$
- 7. $\mathcal{Q}^c(G,\omega) = \mathcal{S}(G,\omega).$

Corolario 10

$$\lim_{k \to \infty} (\mathcal{P}^c \circ \mathcal{P}^r)^k (G, \omega)$$

converge si y sólo si $\mathcal{P}^r(G,\omega)$ es doblemente estocástica. En este caso, $\mathcal{P}^r(G,\omega) = \mathcal{S}(G,\omega) = \mathcal{P}^c(G,\omega)$.

3.6 Brualdi-Parter-Schneider y Perron

Teorema 11 Supongamos que G es fuertemente conexa y $\mathcal{B}^r(G, \omega)$ está bien definida. Sea D la matriz diagonal en la forma estocástica de Brualdi-Parter-Schneider, es decir $\mathcal{B}^r(A) = DAD$. Entonces $\mathcal{B}^r(G, \omega) = \mathcal{P}^r(G, \omega)$ si y sólo si

$$\lambda_A D_{i,i} D_{j,j} = \frac{p_j^{(A)}}{p_i^{(A)}} \text{ para todos } i, j \in [n] \text{ tales que } A_{i,j} \neq 0$$
(2)

 $(\operatorname{con} \mathbf{p}_A = (p_1^{(A)}, \ldots, p_n^{(A)})^T)$. Si este es el caso y además A posee una diagonal positiva (ver [2]) (en particular, si A es simétrica), entonces A es un múltiplo escalar positivo de una matriz doblemente estocástica.

- [1] Bapat, R.B. Graphs and Matrices. Springer Verlag 2010
- [2] Brualdi, R.A., Parter, S.V., Schneider, H. The diagonal equivalence of a nonnegative matrix to a stochastic matrix. J. Math. Anal. Appl. 16 (1966) 31 – 50
- [3] Gómez, R. Stochastic forms of non-negative matrices and Perron-regularity. Electronic Journal of Linear Algebra. Por aparecer.
- [4] Grimmett. G., Stirzaker, D. Probability and Random Processes. Cambridge University Press. 2001
- [5] Lind, D., Marcus., B. Introduction to Symbolic Dynamics and Coding. Cambridge University Press 1995
- [6] Parry, W. Intrinsic Markov chains. Trans. Amer. Math. Soc. 112 (1964) 55 66
- Sinkhorn, R., Knopp.: Concerning nonnegative matrices and doubly stochastic matrices. Pacific J. of Math. Vol. 21, No. 2 (1967) 343 – 348

Topología en el estudio de gráficas de clanes^{*}

Rafael Villarroel Flores[†]

Paco Larrión[‡]

Miguel Pizaña[§]

Resumen

En el presente trabajo consideramos el problema de determinar condiciones en una gráfica simple G que garanticen que es homotópica a su gráfica de clanes K(G), o bien, homotópica a todas las iteradas de clanes. En particular nos interesan los resultados donde la topología contribuye a la combinatoria. Junto con resultados conocidos expondremos varios problemas abiertos.

Palabras Clave. Gráfica de clanes. Tipo de homotopía.

1 Introducción

Todas nuestras gráficas son simples y finitas. Una *completa* de una gráfica G es un conjunto q de vértices donde cualquier par de vértices de q son adyacentes. Un *clan* es una completa maximal (por inclusión). La gráfica de clanes K(G) es la gráfica de intersección de los clanes de G. Recursivamente se definen las gráficas iteradas de clanes como: $K^0(G) = G$, $K^n(G) = K(K^{n-1}(G))$ si $n \ge 1$.

Nos interesa asociar conceptos topológicos a las gráficas por medio del complejo simplicial $\Delta(G)$, el cual tiene como vértices los mismos vértices de G y como simplejos a las completas de G. De tal modo, diremos que las gráficas G_1 y G_2 son homotópicas (denotado por $G_1 \simeq G_2$) cuando los complejos asociados $\Delta(G_1)$, $\Delta(G_2)$ lo son.

El problema de considerar condiciones en G para tener $K(G) \simeq G$ fue considerado por primera vez en [9], y después en [3] y [4], entre muchos otros. La idea del presente trabajo es presentar los resultados principales y plantear problemas abiertos.

2 Gráficas buenas y muy buenas

Definición 1 Diremos que una gráfica es buena si $K(G) \simeq G$, y que es muy buena si $K^n(G) \simeq G$ para $n \ge 1$.

Es inmediato que toda gráfica muy buena es buena. Un ejemplo sencillo de una gráfica muy buena es cualquier gráfica completa K_m . Como ejemplo de una gráfica buena que no es muy buena, consideremos la gráfica de la figura 1. Se puede demostrar que tanto G como K(G) son homotópicas a la esfera S^2 , sin embargo $K^2(G)$ es homotópica a S^3 (ver [7]).

Como un ejemplo de una gráfica que no es buena, podemos definir el octaedro O_m como el complemento de *m* aristas disjuntas, esto es $O_m = \overline{mK_2}$. Tenemos que O_m es homeomorfa a la esfera S^{m-1} . Combinando esto con el resultado de Neumann-Lara [2]:

$$K(O_m) = O_{2^{m-1}}, (1)$$

se obtiene que $O_3 \simeq S^2$, pero $K(O_3) = O_4 \simeq S^3$.

^{*}Trabajo realizado con apoyo de SEP-CONACyT, proyecto 183210

 $^{^{\}dagger}\mathrm{UAEH}$, rafaelv@uaeh.edu.mx

[‡]IMATE, UNAM, paco@matem.unam.mx

[§]UAM, map@xamanek.izt.uam.mx



Figura 1: Suspensión de C_5

3 Gráficas Helly

Definición 2 Decimos que una colección C de subconjuntos de un conjunto X tiene la propiedad de Helly si toda subcolección de subconjuntos mutuamente intersecantes de C tiene intersección no vacía. Diremos que la gráfica G es Helly si la colección de clanes de G tiene la propiedad de Helly.

Por ejemplo, gráficas bipartitas, o en general, gráficas sin triángulos son Helly. La gráfica más pequeña que no es Helly se muestra en la Figura 2.



Figura 2: Una gráfica no Helly

Combinando los siguientes teoremas obtenemos que de hecho todas las gráficas Helly son muy buenas:

Teorema 1 ([2]) Si G es Helly, entonces K(G) es Helly.

Teorema 2 ([9]) Si G es Helly, entonces G es buena.

El converso del teorema 1 no es cierto, por ejemplo la gráfica no Helly de la figura 2 tiene gráfica de clanes que es Helly. Sin embargo, tenemos evidencia para proponer la siguiente conjetura:

Conjectura 1 Si K(G) es Helly, entonces G es buena.

4 Clan comportamiento

Decimos que la gráfica G es *convergente* si la sucesión de órdenes de las gráficas iteradas de clanes es acotada. Esto es equivalente a que la sucesión de iteradas contiene una cantidad finita de gráficas, salvo isomorfismo. En el caso particular de que una iterada de clanes es la gráfica de un vértice, decimos que G es *nula*. Si una gráfica no es convergente, decimos que es *divergente*.

Por ejemplo, en el artículo de Escalante antes citado, se demuestra que las gráficas Helly son convergentes. Y el citado teorema de Neumann-Lara demuestra que O_m es divergente si $m \ge 3$.

Con este concepto, podemos enunciar una conjetura más fuerte que la anterior:

Conjectura 2 Si G es convergente, entonces G es muy buena.

El converso de la conjetura 2 es falso. En [5] se muestran dos familias infinitas de gráficas divergentes y muy buenas.

5 Gráficas desmantelables

Si x es un vértice de la gráfica G, decimos que x es dominado si existe $y \sim x$ tal que todo vecino de x es vecino de y. Decimos que G es desmantelable si G tiene un solo vértice, o bien existe un vértice dominado x en G tal que G-x es desmantelable. Por ejemplo, en [1] se muestra que las gráficas cordales son desmantelables.

Combinando los dos teoremas siguientes, obtenemos que todas las gráficas desmantelables son muy buenas.

Teorema 3 ([1]) Si G es desmantelable, entonces K(G) es desmantelable.

Teorema 4 ([9]) Si G es desmantelable, entonces G es contraíble.

Por otro lado, se tiene:

Teorema 5 ([9]) Si G es desmantelable, entonces G es nula.

El converso del teorema 5 es falso. Considérese por ejemplo la gráfica que se muestra en la Figura 3.



Figura 3: Una gráfica nula no desmantelable

Sin embargo, el siguiente caso particular de la conjetura 2 es interesante:

Conjectura 3 Si G es nula entonces G es contraíble.

Respecto a la conjetura 3, en el artículo [6], los presentes autores demuestran que ciertas gráficas tales que $K^3(G)$ es un vértice (a saber, aquellas tales que K(G) es un cono) son contraíbles. Por otro lado, en [1] se demuestra que dentro de las gráficas Helly es equivalente ser nula y desmantelable, pero aún para tales gráficas queda abierta la conjetura 3.

6 Generalizaciones al teorema de Prisner

Existe una generalización al teorema 2 dada por Larrión, Neumann-Lara y Pizaña. Para enunciarla, necesitamos definir que una *corbata* es $Q = \{q_1, \ldots, q_n\} \in K^2(G)$ tal que $\cap Q = \emptyset$. Si X es una completa de K(G) con $\cap X = \emptyset$, decimos que $q_0 \in K(G)$ es un *centro* de X si $Y \subseteq X$ y $\cap Y \neq \emptyset$ implican $\cap(Y \cup \{q_0\}) \neq \emptyset$.

Teorema 6 Sea G una gráfica tal que toda completa X de K(G) con $\cap X = \emptyset$ tiene un centro contenido en toda corbata que contenga a X. Entonces G es buena. Observemos que el teorema 6 generaliza al teorema 2, pues en las gráficas Helly todas las completas X de K(G) satisfacen $\cap X \neq \emptyset$. Además, el teorema 6 fue aplicado por sus autores para mostrar una familia grande de gráficas buenas, a saber: todas las triangulaciones de Whitney de cualquier superficie, con la única excepción del octaedro.

Para terminar la sección, mencionamos que en [4] se obtiene una generalización del teorema 6. Dada una colección $X = \{q_1, \ldots, q_n\}$ de subconjuntos de algún conjunto, denotamos con $\Delta(X)$ el complejo simplicial de los subconjuntos de algún q_i . Si X es una completa de K(G), denotemos con h(X) a la intersección de todos los clanes de K(G) que contienen a X. Entonces tenemos:

Teorema 7 Sea G una gráfica tal que para toda completa X de K(G) se tiene que $\Delta(h(X))$ es contraíble. Entonces G es buena.

7 El producto ⊠

Dadas gráficas $G_1 ext{ y } G_2$ se define el producto $G_1 ext{ isometry } G_2$ como la gráfica en el producto cartesiano de los conjuntos respectivos de vértices, declarando (g_1, g_2) vecino de (g'_1, g'_2) si g_i es adyacente o igual a g'_i para i = 1, 2. Neumann-Lara demostró en [8] que:

$$K(G_1 \boxtimes G_2) \cong K(G_1) \boxtimes K(G_2).$$
⁽²⁾

Por otro lado, los presentes autores demostraron en [7] que $G_1 \boxtimes G_2$ es homotópica al producto topológico de los espacios asociados a G_1 , G_2 . Esto permite demostrar por ejemplo, que si G_1 , G_2 son buenas o muy buenas, entonces la gráfica $G_1 \boxtimes G_2$ tiene la misma propiedad. Además usando una gráfica divergente y contraíble, cuya existencia fue probada en [6], podemos demostrar:

Teorema 8 Para toda gráfica G, existe una gráfica divergente H tal que $G \simeq H$.

Por supuesto, esto sugiere la pregunta de si lo mismo puede afirmarse de las gráficas convergentes. Conjeturamos que la respuesta es no, y de hecho proponemos:

Conjectura 4 Si $G \simeq S^2$, entonces es divergente.

8 Conclusiones

Se han presentado diversos resultados que muestran que la topología puede en ciertos casos determinar la combinatoria de las gráficas iteradas de clanes. Por ejemplo, de ser cierta la conjetura 2 sería una ayuda potente para determinar la divergencia de muchas gráficas que se sospecha son divergentes, pero las técnicas actuales han resultado insuficientes para demostrar tal conducta.

- H-J. Bandelt and E. Prisner. Clique graphs and Helly graphs. J. Combin. Theory Ser. B, 51(1):34–45, 1991.
- [2] F. Escalante. Uber iterierte Clique-Graphen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 39:59–68, 1973.
- [3] F. Larrión, V. Neumann-Lara, and M. A. Pizaña. On the homotopy type of the clique graph. J. of the Brazilian Comp. Soc., 7:69–73, 2002.
- [4] F. Larrión, M. A. Pizaña, and R. Villarroel-Flores. Posets, clique graphs and their homotopy type. European J. Combin., 29(1):334–342, 2008.
- [5] F. Larrión, M. A. Pizaña, and R. Villarroel-Flores. Equivariant collapses and the homotopy type of iterated clique graphs. *Discrete Math.*, 308(15):3199–3207, 2008.

- [6] F. Larrión, M. A. Pizaña, and R. Villarroel-Flores. Contractibility and the clique graph operator. Discrete Math., 308(16):3461–3469, 2008.
- [7] F. Larrión, M. A. Pizaña, and R. Villarroel-Flores. Discrete Morse theory and the homotopy type of clique graphs. Ann. Comb., 17(4):743–754, 2013.
- [8] V. Neumann-Lara. On clique-divergent graphs. In Problèmes combinatories et Théorie de Graphes, number 260, pages 313–315, Orsay, France, 1978. Colloques Internationaux C.N.R.S.
- [9] E. Prisner. Convergence of iterated clique graphs. Discrete Math., 103(2):199–207, 1992.

Algoritmo de factor 3 para el problema del reparador sobre una recta con ventanas de tiempo unitarias

Luis E. Urbán Rivero *

Cynthía A. Rodríguez Villalobos[†] Francisco Javier Zaragoza Martínez[§] Rafael López Bracho[‡]

Resumen

El problema del reparador (TRP por sus siglas en inglés) es un problema de calendarización en donde el reparador debe visitar a sus clientes en algún lugar par realizar alguna tarea. Cada cliente tiene una ventana de tiempo durante la cual el reparador puede realizar dicha tarea. El objetivo de este problema es maximizar el número de lugares visitados. En este trabajo se mostrará un caso especial en el que todas los lugares a visitar están sobre una recta, el tiempo de procesamiento de cada tarea es cero y el tamaño de las ventanas de tiempo es unitario. Se presentara un algoritmo cuadrático con factor de aproximación 3 basado en algoritmo de factor 8 propuesto en 2005 por R. Bar-Yehuda, G. Even y S. Shahar.

Palabras Clave. TRP. Algoritmo de aproximación. Ventanas de tiempo unitarias.

1 Introducción

El problema del agente viajero (TSP por sus siglas en inglés) es considerado un problema clásico de la optimización combinatoria donde dado un conjunto de ciudades y distancias entre cada par de ellas, un agente de ventas necesita encontrar el recorrido más corto que visite todas las ciudades y que regrese a la ciudad donde inició el recorrido. Existen distintas situaciones en las que el modelo del TSP necesita de consideraciones adicionales para poder ser un modelo más realista. En general, un agente de ventas o de cualquier otro tipo podría no tener tiempo de visitar todos sus destinos. Además se debe considerar que los clientes no están disponibles en cualquier momento así como también el tiempo que invierte el agente en el servicio. Estas restricciones adicionales dan lugar al problema conocido como problema del reparador (TRP por sus siglas en inglés).

En 1992 J. Tsitsiklis [4] demostró que el problema de decidir si el reparador puede realizar k tareas dadas sus respectivas ventanas de tiempo es NP-Completo aun cuando las tareas tomen tiempo cero.

En 2005, Bar-Yehuda, *et al.* [1] estudiaron una caso especial donde los lugares a visitar están sobre una recta, el tiempo de procesamiento para las tareas es cero y las ventanas de tiempo son unitarias. La complejidad de este caso especial es desconocida. Ellos propusieron dos algoritmos de aproximación para dicho problema. El primero divide el plano posición versus tiempo y traza un camino sobre las líneas de partición tal que maximice el número de tareas realizadas. Dicho algoritmo tiene un factor de aproximación 8 y su tiempo de ejecución es de $O(n^2)$. La segunda propuesta usa la misma estrategia de dividir el plano pero considera la dominancia para evitar el doble conteo; dicha propuesta tiene un factor de aproximación de $4 + \epsilon$ y un tiempo de ejecución de $O(n^{8/\epsilon})$.

En 2012, G. Frederickson y B. Wittman [2] mostraron que el TRP con ventanas de tiempo unitarias sobre un árbol es NP-Duro. También en 2012 presentaron un nuevo algoritmo con factor de aproximación 3 y tiempo de ejecución $O(n^4)$ [2]. Este resultado mejora el factor del algoritmo de Bar-Yehuda *et al.* de 2005 pero su costo computacional es alto.

^{*}Posgrado en Optimización UAM Azcapotzalco, lurbanrivero@gmail.com

[†]Departament of Combinatorics and Optimization University of Waterloo, ca7rodriguezvillalobos@uwaterloo.ca

[‡]Departamento de Sistemas UAM Azcapotzalco, rlb@correo.azc.uam.mx

[§]Departamento de Sistemas UAM Azcapotzalco, franz@correo.azc.uam.mx

Basándonos en el trabajo de Bar-Yehuda *et al.* presentaremos un algoritmo con un factor de aproximación de 3 para el problema con ventanas de tiempo unitarias pero con un tiempo de ejecución de $O(n^2)$. Tal algoritmo es más rápido y simple que el propuesto por G. Frederickson y B. Wittman.

En la siguiente sección, se describirá el TRP y el algoritmo de factor 8. La sección 3 presentaremos nuestro algoritmo, además en la sección 3 mostraremos el análisis que nos permite asegurar un factor de 3.

2 Preliminares

El TRP sobre una línea con ventanas de tiempo unitarias se define como sigue.

Definición 1 Se tiene un conjunto de n localizaciones $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, con $x_i \in \mathbb{R}$, tiempos de procesamiento $p_i = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ una longitud de la ventana de tiempo unitaria ℓ y una métrica d tal que para un inicio de disponibilidad de una tarea r_i se tiene que su ventana de tiempo es $[r_i, r_i + \ell]$. Dados x_0 la posición inicial del reparador, $d(x_i, x_j)$ el tiempo necesario para moverse desde x_i a x_j para $x_i, x_j \in X, i \neq j$ y t_i el momento de llegada a (si es posible) $x_i \in X$ para $1 \le i \le n$.

El objetivo es encontrar una trayectoria que maximice el número de locaciones tal que

$$t_0 = 0, \ r_i \le t_i \le r_i + \ell \ y \ t_i + d(x_i, x_j) \le t_j \ \text{para } i, j = 1, 2 \dots k \ y \ i \ne j$$

En primer lugar debemos graficar todas las tareas con su respectiva localización y ventana de tiempo en el plano posición contra tiempo. En esta representación las localizaciones se pueden visualizar como segmentos de recta verticales de longitud unitaria con un intervalo $[r_i, r_i + \ell]$. Bajo estas consideraciones, el problema original se convierte en encontrar una trayectoria que maximice el número de segmentos intersectados.

Después el plano se rota 45 grados en sentido de las manecillas del reloj. Lo cual implica que las trayectorias factibles ahora serán trayectorias monótonas con ángulo en [0,90]. Esta transformación del problema convierte el problema de buscar la máxima trayectoria en el plano original en buscar la máxima trayectoria monótona en el plano con rotación.

Posteriormente, dibujaremos sobre los segmentos ya inclinados una rejilla con cada cuadro de ancho y alto $\ell/\sqrt{2}$ con una ligera perturbación para asegurar que los extremos de los segmentos no intersectan a la rejilla y por tanto cada uno de ellos intersecta a dicha rejilla exactamente en una recta horizontal y en una vertical. Ahora esta rejilla será una gráfica G = (V, A) donde V esta formado por las intersecciones de la rejilla y el conjunto de arcos A está formado por los segmentos de la rejilla entre cada par de vértices orientados de izquierda a derecha los horizontales y de abajo hacia arriba los verticales.

Para concluir la construcción de la gráfica dirigida y acíclica G, asignamos a cada arco $a \in A$ un peso w(a) que corresponde al número de segmentos que lo intersectan. La figura 1 parte izquierda se muestra un ejemplo de la gráfica dirigida y acíclica G para algunas localizaciones dadas, también en la figura 1 parte izquierda los números mostrados representan los pesos diferentes de 0 asignados a los correspondientes arcos.

Por último se aplica el algoritmo para encontrar caminos más largos sobre G para encontrar una trayectoria p sobre la rejilla que intersecte la máxima cantidad de segmentos inclinados. La trayectoria p es la que el reparador va a seguir. Este último paso puede ser procesado en tiempo $O(n^2)$ usando programación dinámica [3, pp. 661-666]. La figura 1 en la derecha se muestra una solución al ejemplo de la figura 1 parte izquierda.

Lema 1 La rejilla por si sola tiene un factor de aproximación de 4

La demostración del lema 1 se puede encontrar en [1] y utilizaremos algo similar en la sección 4. La figura 1 en la derecha muestra un ejemplo de este problema. Se puede notar que la trayectoria punteada cuenta dos veces dos de los segmentos inclinados lo que nos da una trayectoria de 5 en lugar de 3.



Figura 1: El plano con una rotación de 45 grados y la correspondiente gráfica dirigida acíclica G = (V, A)(izq). Una trayectoria monótona de tamaño máximo después aplicando el algoritmo de rutas más largas sobre G(der).

2.1 Algoritmo de factor 4 para Line-TRP con ventanas de tiempo unitario

- 1. Se crea la gráfica dirigida acíclica G' = (V', A') [5].
- 2. Se asigna el peso correspondiente a cada arco de A'.
- 3. Se calcula la trayectoria de peso máximo sobre G'

En 2014 en [5] se elimina el problema de doble conteo con la ayuda de la gráfica auxiliar G' que también se describe en dicha referencia.

3 Algoritmo de factor 3

Por último como se comentó anteriormente se realiza un mejor análisis para mejorar el factor de aproximación, esta vez de la rejilla. Debido al lema 1 la rejilla tiene un factor de aproximación de 4. A continuación se mostrará una demostración alternativa del lema 1 para mostrar su relación con el factor 3.

Demostración. [lema 1] Supongamos que se tiene una ruta óptima p con costo OPT dicha ruta se puede descomponer en bloques horizontales y verticales sobre la rejilla como se ve en la figura 2. Posteriormente se decide ya sea tomar los bloques horizontales o verticales. Si se toman los horizontales se obtienen las rutas de la figura 2 en la parte izquierda. Por otro lado, si se toman los bloques verticales se obtienen las rutas de la figura 2 en la parte centro. Cabe destacar que las cuatro rutas cubren en su totalidad a la ruta óptima. Denotemos con r_1 , r_2 , r_3 y r_4 a cada una de estas rutas, y A la solución del algoritmo 2.1 entonces se cumplen las siguientes desigualdades.

$$\frac{OPT}{4} \le \frac{r_1 + r_2 + r_3 + r_4}{4} \le \max(r_1, r_2, r_3, r_4) \le A \le OPT$$

 \square

Una situación similar se presenta en el caso del factor 3 pero con una propuesta de 3 rutas que cubran en su totalidad a la ruta óptima como se muestra en la figura 2 parte derecha.

Lema 2 El algoritmo 3.1 tiene un factor de aproximación de 3.

Demostración. Sea OPT el costo de la solución óptima, A el costo obtenido por el algoritmo de factor 4 y r_1 , r_2 y r_3 los costos de las tres rutas que cubren la óptima. Sabemos que

$$\max(r_1, r_2, r_3) \le A \le OPT.$$

Además como las 3 rutas cubren a la óptima podemos decir que

$$\max(r_1, r_2, r_3) \ge \frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3)$$
 y $r_1 + r_2 + r_3 \ge OPT.$

Por lo tanto

$$\frac{1}{3}(OPT) \le A \le OPT$$



Figura 2: Descomposición en bloques de la ruta óptima y todas las posibles rutas.

- [1] Bar-Yehuda, R., Even, G., Shahar, M.: On approximating a geometric prize-collecting traveling salesman problem with time windows, Journal of Algorithms 55 (2005), 76–92.
- [2] Frederickson, G. N., Wittman, B.: Approximation algorithms for the traveling repairman and speeding deliveryman problems, Algorithmica 62 (2012), 1198–1221.
- [3] Sedgewick, R., Wayne, K.: Algorithms, Pearson Education, Boca Raton 2011. 661–666.
- [4] Tsitsiklis, J. N.: Special cases of traveling salesman and repairman problems with time windows Networks, 32, (1992), 263–282.
- [5] Pérez Pérez, S. L., Urbán Rivero L. E., López Bracho R., Zaragoza Martínez F. J.: A Fast 4-Approximation Algorithm for the Traveling Repairman Problem on a Line Proceedings of CCE, (2014), 268–271.

Tropicalizando gráficas

Johana Luviano*

Resumen

Una gráfica G^c con una coloración de vértices c se dice que es tropicalmente conexa (o t-conexa) si para cada par de vértices distintos u, v de G^c , existe una trayectoria P(u, v) de u a v que contiene los c-colores. Analizaremos las propiedades que necesita tener una gráfica para garantizar que es t-conexa. Una cubierta tropical (o t-cubierta) de G^c es una cubierta por vertices de G^c que además contiene los c-colores. Presentamos algunas cuotas para t-cubiertas de gráficas r-regulares.

Palabras Clave. coloración de vértices, gráfica r-regular, gráfica k-conexa, cubierta por vertices.

1 Introducción

En este trabajo estudiamos las subestructuras tropicales en gráficas vértices coloreables, primero introducidas en [1]. Las gráficas vértices coloreables son útiles en varias situaciones. Por ejemplo, la gráfica Web puede ser considerada como una gráfica vértice coloreable donde el color de un vértice representa el contenido de la página correspondiente (rojo para matemáticas, amarillo para la física, etc.) [2].

Sea G = (V, E) una gráfica simple no dirigida. Dado un conjunto de colores $\mathcal{C} = \{1, ..., c\}, G^c = (V, E)$ denota una gráfica con una vértice coloración (no necesariamente propia) cuyos vértices reciben un color de los colores en \mathcal{C} . Para cualquier subgráfica H de G^c , denotamos por c(H) el conjunto de colores de los vértices de H. Una gráfica G^c se dice que es propiamente coloreable cuando no hay vértices adyacentes que reciban el mismo color. El número cromático de una gráfica G no vértice coloreable, denotado $\chi(G)$, es el menor número de colores de c tal que existe una gráfica G^c que es propiamente coloreable. Una subgráfica conexa H de G^c se dice que es tropical si $c(H) = \mathcal{C}$. El número de la subgráfica tropical conexa $\operatorname{tc}(G^c)$ es el orden de la subgráfica tropical conexa más pequeña de G^c . Una subgráfica arco-iris conexa de G^c es una subgráfica conexa en la que cada color está presente a lo más de una vez. Una subgráfica conexa coloreable de G^c es una subgráfica arco-iris que es tropical. La vecindad N(u) es el conjunto que contiene todos los vértices adyacentes al vértice u en G^c . La vecindad cerrada N[u] se define por $N[u] = N(u) \cup \{u\}$. Llamamos bloques de una gráfica a sus subgráficas 2–conexas máximas.

Proposición 1 Sea G una gráfica. Entonces:

- cualesquiera dos bloques de G tienen a lo más un vértice en común,
- los bloques de G forman una descomposición de G,
- cada ciclo de G está contenido en un bloque de G.

2 Gráfias *t*-conexas

La clase de gráficas 2-conexas tiene una caracterización que expresa la construcción de cada una de tales gráficas de un ciclo y trayectorias.

Definición 1 Una oreja (ear) de una gráfica G es una trayectoria máxima cuyos vértices internos tienen grado 2 en G. Una descomposición en orejas (ear decomposition) de G es una descomposición $P_0 \cdots P_k$ tal que P_0 es un ciclo y P_i para $i \ge 1$ es una oreja de $P_0 \cup \cdots \cup P_i$.

^{*}Departamento de Matemáticas-Cinvestav, johana.luviano@gmail.com

Teorema 2 (Whitney [3]) Una gráfica es 2–conexa si y sólo si tiene una descomposición en orejas. Además, cada ciclo en una gráfica 2–conexa es el ciclo inicial en alguna descomposición en orejas.

Dada una gráfica G^c , se dice que la gráfica es tropicalmente conexa (o t-conexa) si para cada par de vértices distintos u, v de G^c , existe una trayectoria P(u, v) de u a v tal que c(P(u, v)) = C.

Acontinuación mostramos los resultados que se tienen para que una gráfica se
a $t-{\rm conexa}.$

Teorema 3 Si G^c es una gráfica coloreable k-conexa con c-colores y $c \leq k$, entonces G^c es t-conexa.

Teorema 4 Si G^c es una gráfica coloreable conexa pero no 2-conexa y c = 2, entonces G^c es t-conexa si y sólo si cada bloque de G^c es 2-coloreable.

Si la coloración \mathcal{C} es propia, entonces se tiene el siguiente resultado.

Teorema 5 Si G^c es una gráfica coloreable 2–conexa pero no 3–conexa y c = 3, entonces G^c es t–conexa si y sólo no existen u, v vértices del mismo color que separan colores.

Para el caso de que la coloración no necesariamente es propia se conjeturó lo siguiente.

Conjectura 1 Si G^c es una gráfica coloreable 2-conexa pero no 3-conexa y c = 3, entonces G^c es t-conexa si y sólo existe un ciclo C y una oreja P, tal que $C \cup P$ es t-conexa.

3 Cubiertas tropicales

Un subconjunto $B \subseteq V(G)$ es una cubierta de vértices mínima de G si: (1) cada arista de G es incidente con al menos un vértice en C; y (2) no existe un subconjunto propio de B con la primer propiedad. Si C satisface solamente la condición (1), entonces C se llama cubierta por vértices de G. Notemos que B es una cubierta por vértices mínima si y sólo si $V(G) \setminus B$ es un conjunto independiente máximo. Por lo tanto, $\alpha(G) + \beta(G) = n(G)$, donde $\alpha(G)$ es el tamaño máximo de los conjuntos independientes de G, $\beta(G)$ es el tamaño mínimo de las cubiertas de vértices de G y n(G) es el tamaño de G.

Teorema 6 (Caro, Wei) Para una gráfica G,

$$\alpha(G) \ge \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{d(v) + 1},$$

con la igualdad si y sólo si cada componente de G es una gráfica completa.

Sea G^c una gráfica, una *cubierta tropical* (o *t-cubierta*) de G^c , es un subconjunto $B \subseteq V(G)$ que es una cubierta por vértices y cumple que c(B) = C. Denotamos por $\beta^t(G^c)$ el tamaño mínimo de las *t*-cubiertas de vértices de G^c .

Para el caso de t-cubiertas de G^c se tiene lo siguiente:

Teorema 7 Sea G^c una gráfica r-regular, entonces

$$\beta^t(G^c) \le \frac{rn+c-1}{r+1}.$$

- J.-A. Anglès d'Auriac, H. El Mafthoui, M. Karpinski, Y. Manoussakis, L. Montero, N. Narayanan, L. Rosaz, and J. Avis, Tropical dominating sets in vertex-colored graphs, Preprint.
- [2] S. Bruckner, F. Hüffner, C. Komusiewicz, and R. Niedermeier, Evaluation of ILP-based approaches for partitioning into colorful components, Software Engineering and Applications (2013), 176–187.

- [3] H. Whitney, Congruent graphs and the connectivity of graphs. Amer. J. Math. (1932) 150–168.
- [4] J.A. Bondy and U.S.R. Murty, *Graph Theory with Applications*, First edition. North-Holland. New York, Amsterdam, Oxford. 1976.
- [5] D.B. West, Introduction to Graph Theory, Second edition. University of Illinois at Urbana-Champaign, 2002.

Un acercamiento a las ASR-gráficas

Gabriela Juan García *

Joaquín Tey Carrera[†]

Resumen

Sea *e* una arista de una gráfica simple y conexa *G*. Las gráficas que se obtienen al borrar y subdividir a *e* en *G* se denotan como G - e y G_e , respectivamente. Como es usual, $\gamma(G)$ denota al número de dominación de *G*. Decimos que *G* es una *ASR*-gráfica (del inglés anti-sub-removable) si $\gamma(G_e) \neq \gamma(G-e)$ para toda arista *e* de *G*. Sobre las *ASR*-gráficas; mostraremos algunas propiedades, una caracterización y cotas para el tamaño mínimo.

Palabras Clave. Número de sujeción. ASR-gráfica.

1 Introducción y definiciones básicas

Sea G una gráfica conexa simple. Denotamos por V(G) y E(G) al conjunto de vértices y al conjunto de aristas de G, respectivamente. La vecindad abierta N(v) de $v \in V(G)$ consta del conjunto de vértices adyacentes a v, es decir, $N(v) = \{w \in V(G); vw \in E(G)\}$. La vecindad cerrada N[v] de $v \in V(G)$ consta del vértice v junto con su vecindad abierta, $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. La vecindad privada exterior EPN(v, S) (del inglés exterior private neighbor) de un vértice $v \in S$ con respecto a $S \subseteq V(G)$ se define como $EPN(v, S) := N(v) - N[S - \{v\}]$.

Dada una gráfica G y una arista $e \in E(G)$, denotamos por G - e a la gráfica obtenida al remover la arista e de G y por G_e a la gráfica que resulta de subdividir la arista e de G. Recordemos que la subdivisión de una arista consiste en remover la arista e de G y añadir un nuevo vértice adyacente a los vértices finales de e.

Un conjunto $D \subseteq V(G)$ se denomina *conjunto dominante* si cada vértice $v \in V(G)$ es o un elemento de D o adyacente a un elemento de D. Diremos que D domina a G y escribiremos $D \succ G$. El *número de dominación* $\gamma(G)$ de una gráfica G se define como la mínima cardinalidad de un conjunto dominante. Un conjunto dominante de cardinalidad mínima se denomina γ -conjunto. Denotaremos por $\Gamma(G)$ al conjunto de todos los γ -conjuntos de G.

El número de sujeción b(G) de una gráfica G es la cardinalidad del conjunto mas pequeño de aristas E(G) para el cual $\gamma(G-E) > \gamma(G)$. En la Figura 1 se muestra una gráfica G con $\gamma(G) = 2$. Observemos que al remover cualesquiera una o dos de sus aristas, el número de dominación no cambia, pero el número de dominación de la gráfica que resulta tras remover tres aristas aumenta a tres, por lo tanto G tiene b(G) = 3.



Figura 1: Una gráfica G con b(G) = 3.

 $[*] Universidad \ Autónoma \ Metropolitana-Iztapalapa, \ \verb"gaby-juga@hotmail.com" aby-juga@hotmail.com" aby-juga@hotmail.com" aby-juga@hotmail.com \ aby-juga@ho$

 $^{^{\}dagger}$ Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, jtey@xanum.uam.mx

2 Gráficas γ-insensibles

Una gráfica cuyo número de sujeción es mayor que uno se denomina γ -insensible, es decir, para toda $e \in E(G)$ se cumple que $\gamma(G) = \gamma(G - e)$.



Figura 2: K_3 es una gráfica γ -insensible.

Definimos

 $E(n,\gamma) :=$ Tamaño mínimo de una gráfica conexa γ -insensible de orden n y número de dominación γ .

En 1984, Brigham y Dutton (ver [2]) determinaron el tamaño mínimo de este tipo de gráficas. Sus resultados se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 1 (Brigham & Dutton, 1984)

$$E(n,\gamma) = \begin{cases} 3n-6 & \text{si } \gamma = 1 \text{ y } n \ge 3, \\ n-1 & \text{si } \gamma \ge 2 \text{ y } n \le 3\gamma - 2, \\ n & \text{si } \gamma \ge 2 \text{ y } n = 3\gamma - 1, \\ 2n-3\gamma & \text{si } \gamma \ge 2 \text{ y } n \ge 3\gamma. \end{cases}$$

Por ejemplo, en la Figura 3 se muestra una gráfica γ -insensible de tamaño mínimo de orden nueve y número de dominación dos.



Figura 3:

3 ASR-gráficas

Una gráfica G se denomina ASR-gráfica (del inglés anti-sub-removable) si para toda arista $e \in E(G)$ se cumple que $\gamma(G - e) \neq \gamma(G_e)$. Un ejemplo de este tipo de gráficas son las gráficas completas, las cuales tienen número de dominación igual a uno. Observemos que al remover cualquier arista de la gráfica el número de dominación no cambia, pero el número de dominación de la gráfica que se obtiene al subdividir cualquiera de sus aristas es dos (ver Fig. 4).

3.1 Propiedades

Algunas propiedades de las ASR-gráficas son las siguientes, de las cuales las tres primeras las podemos encontrar en [4] y las dos últimas, son nuevas propiedades. Mas adelante veremos la importancia de cada una de ellas.



Figura 4: K_4 es una ASR-gráfica.

- 1. Una ASR-gráfica no tiene hojas.
- 2. Toda ASR-gráfica es γ -insensible.
- 3. Si G es una ASR-gráfica, entonces para todo γ -conjunto $D = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ se tiene que $(N[v_1], N[v_2], \ldots, N[v_k])$ es una partición de V(G).
- 4. Una ASR-gráfica tiene al menos tres γ -conjuntos distintos.
- 5. Si una ASR-gráfica tiene orden n y número de dominación γ , entonces $n \ge 3\gamma$.

3.2 Caracterización

Sea $D \in \Gamma(G)$ y $e \in E(G)$. Si $|e \cap D| = 1$, entonces $\overline{e \cap D}$ denota al extremo de e que no está contenido en D.

Teorema 2 *G* es una *ASR*-gráfica si y sólo si para toda $e \in E(G)$ existe $D \in \Gamma(G)$ tal que $e \cap D = \emptyset$ y para todo $D \in \Gamma(G)$ se cumple alguna de las siguientes condiciones: 1. $e \cap D = \emptyset$. 2. $|e \cap D| = 1$ y $\overline{e \cap D} \in EPN(e \cap D, D)$ y $EPN(e \cap D, D) \neq \{\overline{e \cap D}\}$.

Observemos que esta caracterización no nos proporciona información de cómo son explícitamente las ASR-gráficas, sin embargo fue de gran utilidad para mostrar el siguiente resultado, el cual nos proporciona condiciones suficientes para que una gráfica sea una ASR-gráfica.

Lema 3 Sea G una gráfica tal que 1. G tiene al menos tres γ -conjuntos disjuntos. 2. Para todo $D \in \Gamma(G)$ y $v_i, v_j \in D$, $i \neq j$, se cumple que $N[v_i] \cap N[v_j] = \emptyset$. Entonces G es una ASR-gráfica.

Observemos que ambas condiciones se deben satisfacer simultáneamente. Por ejemplo, en la Figura 5 se muestra una gráfica donde $(N[v_1], N[v_2])$ es una partición de V(G) pero para la arista $e \in E(G)$ tenemos que $\gamma(G - e) = \gamma(G_e)$, por lo tanto G no es una ASR-gráfica. De igual manera, en la Figura 6 se muestra una gráfica G con tres γ -conjuntos disjuntos pero para la arista $e \in E(G)$ se tiene que $\gamma(G - e) = \gamma(G_e) = 2$, por lo tanto, G no es una ASR-gráfica.



Figura 5:



3.3 Tamaño mínimo

Definimos

 $\phi(n,\gamma)$:= Tamaño mínimo de una ASR-gráfica conexa de orden n y número de dominación γ .



Lema 4 Si $n \ge 3\gamma$, entonces $\phi(n, \gamma) \ge 2n - 3\gamma$.

Proposición 5 Si $n \ge 3\gamma$, entonces $\phi(n, \gamma) \le 3n - 6\gamma$.

La segunda propiedad de las ASR-gráficas y el Teorema 1 prueban la cota del Lema 4, mientras que la cota de la Proposición 5 se basa en la siguiente familia de gráficas, cuyos elementos son ASR-gráficas por el Lema 3.



Los valores exactos para el tamaño mínimo se muestran en el siguiente resultado.

Teorema 6

$$\phi(n,\gamma) = \begin{cases} 0 & si \ n < 3\gamma, \\ n & si \ n = 3\gamma, \\ 3n - 6\gamma & si \ (\gamma = 1 \ y \ n > 3\gamma) \ o \ (\gamma = 2 \ y \ n = 6, 7, 8). \end{cases}$$

4 Conclusiones

Al estudiar las ASR-gráficas, se encontraron nuevas propiedades, se mostró una caracterización y se determinaron cotas para el tamaño mínimo. Conjeturamos que si $n \ge 3\gamma$, entonces $\phi(n, \gamma) = 3n - 6\gamma$. Como trabajo futuro se pretende probar o encontrar un contraejemplo a esta conjetura. Cabe aclarar que este trabajo forma parte de la tesis de maestría en la UAM-I de la primera autora bajo la dirección del segundo.

- D. Bauer, F. Harary, J. Nieminen and C.L. Suffel. Domination alteration sets in graphs., Discrete Math 47 (1983), 153-161.
- [2] R. D. Dutton and R. C. Brigham. An extremal problem for edge domination insensitive graphs, Discrete Applied Mathematics 20 (1998), 113-125.
- [3] J. F. Fink, M. S. Jacobson, L. F. Kinch and J. Roberts. The bondage number of a graph, Discrete Mathematics 86 (1990), 47-57.
- [4] M. Lemańska, J. Tey and R. Zuazua. Relations between edge removing and edge subdivision concerning domination number of a graph. 2014 (Enviado).

Primeros resultados sobre la existencia de ciclos hamiltonianos en la suma generalizada de digráficas^{*}

Narda Cordero-Michel[†] Hortensia Galeana-Sánchez[‡] Ilán A. Goldfeder[§]

Resumen

La existencia de ciclos hamiltonianos es un tema clásico de estudio. En esta charla, presentaremos algunos resultados obtenidos del estudio de ciclos hamiltonianos y, en general, factores de ciclos en la suma generalizada de digráficas, que es una operación recientemente introducida.

Palabras Clave. Digráfica. Ciclo hamiltoniano. Factor de ciclos. Generalización de torneos.

1 Introducción

En [4], H. Galeana-Sánchez introdujo una operación a la que llamó suma generalizada de digráficas, que es una generalización de la composición de digráficas sobre torneos, como aparece definida en [1]. Esta última es una operación de digráficas bien estudiada de la que se conocen elementos para asegurar la existencia de ciclos hamiltonianos. Es por esto que nosotros nos interesamos por el comportamiento de los factores de ciclos en las sumas generalizadas de digráficas, para determinar condiciones que garanticen la existencia de ciclos hamiltonianos.

En esta charla expondremos algunos de los resultados que obtuvimos en [3].

2 Definiciones

En este texto, D = (V(D), A(D)) denotará una digráfica sin lazos y con a lo más una flecha de u a v para cualquier pareja de vértices u y v.

Si (u, v) es una flecha en A(D), la denotaremos por $u \to v$ o por uv. Dados dos conjuntos ajenos de vértices de D, $A \neq B$, denotaremos por (A, B) al conjunto de todas las flechas $a \to b$ tales que $a \in A \neq b \in B$.

Cuando hablemos de trayectorias y ciclos, estos serán siempre dirigidos. A una colección de ciclos mutuamente ajenos \mathcal{F} en una digráfica D le llamaremos factor de ciclos, si es una subdigráfica generadora de D.

3 Preliminares

Definición 1 Sean D_1 y D_2 dos digráficas ajenas en vértices. Si una digráfica D es tal que: (i) $V(D) = V(D_1) \cup V(D_2)$, (ii) $D[V(D_1)] = D_1$ y $D[V(D_2)] = D_2$ y (iii) entre cualesquiera dos vértices, uno en $V(D_1)$ y otro en $V(D_2)$, existe exactamente una flecha en D, entonces diremos que D es una suma generalizada de D_1 y D_2 .

Dada una flecha f en A(D) diremos que es una flecha interior de D si f pertenece al conjunto $F(D_1) \cup F(D_2)$ y que es una flecha exterior si pertenece a $F(D) \setminus F(D_1) \cup F(D_2)$.

Definición 2 Al conjunto de todas la digráficas que son una suma generalizada de D_1 y D_2 lo llamaremos la suma generalizada de D_1 y D_2 y lo denotaremos por $D_1 \oplus D_2$.

Observemos que dadas dos digráficas puede haber más de una suma generalizada.

^{*}Trabajo realizado con el apoyo UNAM-DGAPA-PAPIIT IN106613.

[†]Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, **narda@ciencias.unam.mx**

[‡]Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, hgaleana@matem.unam.mx

[§]Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, ilan.godlfeder@gmail.com



Figura 1: El símbolo \uparrow expresa que además están todas las flechas en $\{(u, v) - u \in V(D_2) \ y \ v \in V(D_1)\} \setminus \{(y_0^1, x_0)\}.$

Más aún, dadas *n* digráficas mutuamente ajenas, D_1, D_2, \ldots, D_n , y *D* en $D_1 \oplus D_2 \oplus \cdots \oplus D_n$ se tiene que para cualquier subconjunto $\{D_{i_1}, D_{i_2}, \ldots, D_{i_k}\}$ de $\{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ la subdigráfica de $D[V(D_{i_1}) \cup V(D_{i_2}) \cup \cdots \cup V(D_{i_k})]$ pertenece a la suma $D_{i_1} \oplus D_{i_2} \oplus \cdots \oplus D_{i_k}$.

4 Resultados

A continuación presentaremos algunas propiedades que tienen las sumas generalizadas de digráficas.

Teorema 1 Sean D_1, D_2, \ldots, D_n digráficas hamiltonianas mutuamente ajenas. Si $D \in D_1 \oplus D_2 \oplus \cdots \oplus D_n$ y D es fuertemente conexa entonces D es hamiltoniana.

Teorema 2 Sean D_1 una trayectoria dirigida y D_2 una digráfica hamiltoniana. Si $D \in D_1 \oplus D_2$ y D es fuertemente conexa entonces D es hamiltoniana.

Notemos que si D es fuertemente conexa y está en $D_1 \oplus D_2$, donde:

- D_1 es hamiltoniana y D_2 tiene un factor de dos ciclos o
- D_1 es hamiltoniana y D_2 posee una trayectoria hamiltoniana,

entonces D no necesariamente es hamiltoniana (véase la figura 1). Como trabajar con digráficas que son trayectorias cierra mucho el campo de investigación, lo anterior nos lleva a preguntarnos si tenemos un factor de ciclos en D_1 y otro en D_2 en cuánto podemos reducirlo en la suma, como se verá en el siguiente teorema.

Teorema 3 Sean D_1 y D_2 dos digráficas mutuamente ajenas, cada una con un factor de ciclos de cardinalidad mínima, de k_1 y k_2 ciclos, respectivamente. Si $D \in D_1 \oplus D_2$ y D es fuertemente conexa entonces D posee un factor de ciclos de cardinalidad menor o igual que $k_1 + k_2 - 1$.

La cota propuesta en el teorema 3 es la mejor que se puede encontrar como se muestra en la figura 2. En general, si la suma generalizada de dos digráficas es fuertemente conexa y tiene un factor de dos ciclos, dicha suma no necesariamente es hamiltoniana (véase la figura 3), por eso nos preguntamos si pidiendo características especiales a los ciclos podemos asegurar la hamiltonicidad, de ahí el siguiente resultado.

Teorema 4 Sean D_1 y D_2 dos digráficas ajenas en vértices. Si una suma generalizada D de D_1 y D_2 es fuertemente conexa y tiene un factor de dos ciclos C_1 y C_2 tales que sus conjuntos de flechas, $F(C_1)$ y $F(C_2)$, consisten de flechas exteriores de D y cumplen alguna de las siguientes propiedades:

- tanto (C_1, C_2) como (C_2, C_1) tienen flechas exteriores de D o
- todas las flechas exteriores de D están en (C_1, C_2) y los conjuntos $(C_2, C_1) \cap A(D_1)$ y $(C_2, C_1) \cap A(D_2)$ son no vacíos



Figura 2: El símbolo \uparrow significa que además están todas las flechas en $\{(u, v) - u \in V(D_2) \ y \ v \in V(D_1)\} \setminus \{(y_0^1, x_1^1)\}.$



Figura 3: El símbolo \Rightarrow denota que todas las flechas exteriores de la suma van de $\{x_0, x_1, y_0, y_1\}$ a $\{x_2, x_3, y_2, y_3\}$.



Figura 4: El símbolo \uparrow significa que además están todas las flechas en $\{(u, v) - u \in V(D_2) \ y \ v \in V(D_1)\} \setminus \{(y_0, x_0), (y_0, x_5), (y_1, x_2)\}.$

entonces D es hamiltoniana.

La figura 3 muestra que alguna de las condiciones en la proposición 4 debe cumplirse para encontrar un ciclo hamiltoniano.

Observemos que cuando las flechas de los ciclos del factor no están totalmente contenidas en las flechas exteriores de la suma, aún si los sumandos son fuertemente conexos, puede que la suma no sea hamiltoniana, como se muestra en la figura 4.

Referencias

 Bang-Jensen, J., Gutin, G.: Digraphs: Theory, Algorithms and Applications, 2nd edition, Springer, London 2009.

- [2] Bang-Jensen, J., Gutin, G.: Generalizations of tournaments: a survey, J. Graph Theory 28 (1998), 171 – 202.
- [3] Cordero-Michel, N., Galeana-Sánchez, H., Goldfeder, I.A.: First results on the existence of Hamiltonian cycles in the generalized sum of digraphs, (2014) (Enviado).
- [4] Galeana-Sánchez, H.: A new characterization of perfect graphs, Discrete Math. 312 (2012), 2751 2755.

Buscando jaulas cúbicas a partir de gráficas de Cayley

Citlalli Zamora Mejía *

Rafael Villar
roel Flores †

Resumen

La idea central del trabajo es construir gráficas bipartitas cúbicas de cuello al menos ocho con el fin de reducir la cota superior dada hasta el momento para las jaulas cúbicas de cuello par. Durante la investigación se producen varios resultados interesantes que son de importancia para que el algoritmo de construcción implementado sea eficiente; aquí se expondrán dichos resultados.

Palabras Clave. Jaula cúbica. Cuello. Gráfica de Cayley. Gráfica localmente $3K_2$. Gráfica bipartita clánica.

1 Introducción

En las diversas ramas de matemáticas, los problemas de minimización son muy comunes. En la charla se abordará uno de los problemas de minimización más activos en teoría de gráficas, específicamente en teoría de jaulas. El cual consiste en determinar el menor número de vértices que las (k, g)-gráficas tienen y clasificarlas salvo isomorfismo. El lector puede consultar estudios panorámicos de estos problemas en los artículos [1] y [2] de la bibliografía.

La charla se centra en gráficas 3-regulares, llamadas generalmente gráficas cúbicas. Como se menciona en la cita [3], los rasgos fundamentales de los problemas de las jaulas siguen presentes en este caso particular.

2 Definiciones básicas

Para comenzar hay que sentar las bases definiendo algunos conceptos básicos que a muchos les podrían sonar más que familiares pero que no está de más mencionarlos.

Definición 1 Una gráfica Γ es un par ordenado de conjuntos finitos, $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$, donde $V(\Gamma)$ es llamado conjunto de vértices de Γ y $E(\Gamma)$ conjunto de aristas de Γ , tales que:

$$E(\Gamma) \subseteq V(\Gamma)^{(2)} := \{ e \subseteq V(\Gamma) \mid |e| = 2 \}$$

En este caso las gráficas que nos interesan no tienen aristas dirigidas, lazos o aristas múltiples.

También es necesario que tengan ciclos, es decir que exista una sucesión de vértices $v_1, ..., v_n$, con $n \ge 3$, todos distintos entre sí, tales que v_i sea adyacente a v_{i+1} y v_n sea adyacente a v_1 .

Definición 2 Sea G una gráfica con ciclos. Se define el cuello de G como:

 $g(G) := \min\{ \text{longitud de } c \mid c \text{ es un ciclo en } G \}.$

Una gráfica se dice k-regular si cada vértice se encuentra en exactamente k aristas.

Definición 3 Una (k, g)-gráfica es una gráfica k-regular de cuello g.

No es difícil deducir que si G es una (k, g)-gráfica con dos componentes disjuntas, cada componente también es una (k, g)-gráfica por sí misma, pero cada una con menos vértices que G. Por ello una pregunta natural que surge es: ¿Cuál es la menor cantidad de vértices que una (k, g)-gráfica tiene?

^{*}UAEH, cizame@gmail.com

[†]UAEH, rvf0068@gmail.com

Definición 4 Una (k, g)-jaula es una gráfica k-regular de cuello g, con la menor cantidad de vértices posible.

Entonces la pregunta es: ¿Cuántos vértices tiene una (k, g)-jaula? Para ciertos valores de $k \ge g$ la respuesta es muy sencilla: si k = 2, las (2, g)-jaulas son precisamente los ciclos de longitud g. Cuando g = 3, las (k, 3)-jaulas tienen exactamente k + 1 vértices, y son las gráficas completas K_{k+1} . Pero en general la respuesta no es conocida.

Con k = 3 y g = 3, 4, ..., 12 las jaulas ya son conocidas, sin embargo, para $g \ge 13$ lo único que hasta el momento se ha podido obtener son (3, g)-gráficas relativamente pequeñas, cuyos órdenes sirven como cotas superiores para la cantidad de vértices de la respectiva jaula.

En la dirección http://staffhome.ecm.uwa.edu.au/ 00013890/remote/cages/ se encuentra una lista de las cotas que hasta el momento se tienen para jaulas cúbicas.

3 Método de construcción

Existe una conjetura que menciona que las jaulas de cuello par son bipartitas, es decir, que su conjunto de vértices se puede expresar como unión de dos conjuntos disjuntos no vacíos, X y Y tales que si $\{x, y\}$ es una arista de la gráfica entonces $x \in X$ y $y \in Y$ o viceversa.

Pensando en esta conjetura como punto de referencia, y también por ser una forma de restringir el problema, el método que se propone construye gráficas cúbicas de cuello par mayor o igual a ocho usando gráficas de Cayley localmente $3K_2$.

Definición 5 Sean G un grupo y T un subconjunto de G tal que:

- 1. La identidad del grupo no está en T.
- 2. Si $t \in T$ entonces $t^{-1} \in T$.

Se define la Gráfica de Cayley, $\operatorname{Cay}(G,T)$, como la gráfica con $V(\operatorname{Cay}(G,T)) = G$, donde g_1 es adyacente a g_2 si y solo si $g_2^{-1}g_1 \in T$.

Definición 6 Una gráfica G es conocida como localmente $3K_2$ si es de vecindad constante y además la subgráfica de G inducida por los vecinos de x es isomorfa a la unión disjunta de tres copias de la gráfica completa K_2 , para todo $x \in V(G)$, es decir:

$$N_G(x) \cong 3K_2.$$

La figura 1 es la forma en que se ve una gráfica localmente $3K_2$, alrededor de cada vértice.



Figura 1: Vecindad cerrada de cada vértice en una gráfica localmente $3K_2$.

Un clan de una gráfica G es una subgráfica completa maximal.

Definición 7 Sea $Cl_G := \{H \mid H \text{ es un clan de una gráfica } G\}$. Se define la gráfica bipartita clánica BK(G) de una gráfica G, como la gráfica con conjunto de vértices:

$$V(BK(G)) := V(G) \dot{\cup} Cl_G,$$

donde $x, y \in V(BK(G))$ son adyacentes si y solo si $x \in V(G)$ y y es un clan de G, tales que $x \in y$ o viceversa.
Es decir, la gráfica bipartita clánica es aquella cuyos vértices están asociados a los elementos de V(G)y a los clanes de G, de manera disjunta, donde las aristas que existen se dan solo entre un elemento asociado a un vértice y otro asociado a un clan.

El procedimiento que se sugiere para construir gráficas cúbicas de cuello grande comienza por generar gráficas de Cayley localmente $3K_2$. Tales gráficas son vértice-transitivas, es decir, basta con hacer un análisis alrededor del vértice correspondiente a la identidad del grupo para saber cómo se comportan en el resto de sus vértices. Después, se le asocia a cada una de estas gráficas su gráfica bipartita clánica. Las gráficas que resultan al final del proceso son cúbicas y tienen cuello al menos 8.

4 Principales aportaciones

Como ya se mencionó, las gráficas de Cayley proporcionan cierta facilidad a la hora de estudiarlas pues el análisis que se haga localmente se puede extender a toda la gráfica.

A continuación menciono las contribuciones más importantes de este análisis:

Teorema 1 Una gráfica B cúbica de cuello mayor o igual a 8 es bipartita si y solo si B es isomorfa a la gráfica bipartita clánica de una gráfica G localmente $3K_2$.

Permite asociar a cualquier gráfica bipartita 3-regular con cuello mayor o igual a 8 con una gráfica localmente $3K_2$ y viceversa.

Teorema 2 Sean G un grupo y T un subconjunto. La gráfica de Cayley, Cay(G,T), es localmente $3K_2$ si y solo si T es tal que $e \notin T$, |T| = 6 y además el subconjunto T cumple con las condiciones 1 o 2.

1. T es de la forma $T = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}, c, c^{-1}\}$ 2. T es de la forma $T = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}, a^{-1}b, b^{-1}a\}$ donde: donde: (a) $x^3 \neq I$ para todo $x \in T$ (a) $x^3 = I$ para todo $x \in T$ (b) $ab \neq c^{-1}$ (b) $b \neq a^3$ (c) $a^2 \neq b^{-1}$ (c) $ab \neq c$ (d) $ab^{-1} \neq c^{-1}$ (d) $b^2 \neq a^{-1}$ (e) $ab^{-1} \neq c$ (e) $ab \neq b^{-1}a$ (f) $a^2 \neq b^2$ (f) $ac \neq b$ (g) $ac \neq b^{-1}$ (g) $ab \neq ba$ (h) $ac^{-1} \neq b$ (h) $a^{-1}b \neq ab^{-1}a$ (i) $ac^{-1} \neq b^{-1}$ (i) $ab \neq ba^{-1}$

Teorema 3 En una gráfica de Cayley los vértices $x y x^{-1}$ se encuentran a la misma distancia de la identidad.

Teorema 4 Sean G un grupo y T un subconjunto tal que Cay(G,T) es bipartita. Si X es el conjunto de todos los vértices de Cay(G,T) que están a distancia par de la identidad, entonces X es un subgrupo del grupo G.

Teorema 5 Sea *B* una gráfica de Cayley bipartita 3-regular con cuello mayor o igual a 8 y además conexa. Entonces *B* es isomorfa a la gráfica bipartita clánica de una gráfica de Cayley localmente $3K_2$ del tipo 2.

5 Algoritmo y conclusiones

Para construir gráficas cúbicas por este método se realizó un programa en GAP, que a partir de una librería de grupos, para cada grupo construye una lista completa salvo isomorfismo de las gráficas de Cayley localmente $3K_2$, y después de analizar los ciclos a los que la identidad pertenece reporta en cuello de sus gráficas bipartitas clánicas.

En la tabla 1 se muestra la relación entre las cotas superiores dadas para la cantidad de vértices de una jaula cúbica y la cantidad de vértices que tienen las gráficas construidas a partir de gráficas de Cayley localmente $3K_2$, de ambos tipos.

En la segunda columna se encuentra la cota superior actual para las jaulas en la primer columna.

La tercer columna muestra la cantidad de vértices que tiene la gráfica cúbica más chica hasta ahora construida a partir de una gráfica de Cayley localmente $3K_2$ del tipo 2, con el mismo cuello que la jaula en la primer columna.

La cuarta columna muestra la cantidad de vértices que tiene la gráfica cúbica más chica hasta ahora construida a partir de una gráfica de Cayley localmente $3K_2$ del tipo 1, con el mismo cuello que la jaula en la primer columna.

La jaula	Cota superior	Orden de la gráfica tipo 2	Orden de la gráfica tipo 1
(3,8)-jaula	30	40	42
(3, 10)-jaula	70	80	114
(3, 12)-jaula	126	162	162
(3, 14)-jaula	384	406	612
(3, 16)-jaula	960	1008	1008
(3, 18)-jaula	2640	2640	?
(3, 20)-jaula	6048	?	?
(3,22)-jaula	16206	?	?

Table 1:

La revisión fue exhaustiva para determinar las gráficas más pequeñas construidas por este método de cuello hasta 16. La gráfica de cuello 18 iguala la cota que hasta el momento está dada, pero aun existe la posibilidad que este método construya (3, 18)-gráficas con menos vértices.

- Exoo, G. and Jajcay, R.: Dynamic Cage Survey, http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/DS16/0
- [2] Wong, P. K.: Cages—a survey, J. Graph Theory 6 (1982), 1–22.
- [3] Biggs, N. L.: Cubic graphs with large girth, New York Acad. Sci., New York, (1989) 56–62.
- [4] Conder, M. and Exoo, G. and Jajcay, R.: On the limitations of the use of solvable groups in Cayley graph cage constructions, European J. Combin., 31, (2010) 1819–1828.
- [5] Balaban, A. T.: Trivalent graphs of girth nine and eleven, and relationships among cages, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 18, 1033–1043. Editorial, 1973.

Índice Aritmético-Geométrico de una Gráfica*

Juan Carlos Hernández Gómez[†]

José M. Rodríguez[‡]

José M. Sigarreta[§]

Resumen

En este trabajo obtenemos nuevas relaciones entre el Índice Aritmético-Geométrico $(GA_1(G))$ y otros importantes índices topológicos de una gráfica.

Palabras Clave. Gráficas. Desigualdades. Índices Topológicos. Índice Aritmético-Geométrico.

1 Introducción

Los índices topológicos en gráficas están basados fundamentalmente en las relaciones entre las aristas y grados de una gráfica, y han sido usados y estudiados desde 1975. Problablemente, el más conocido de todos sea el Índice de Conectividad de M. Randić (R(G)) [9]. En la literatura científica existen alrededor de 500 trabajos dedicados a dicho descriptor ([6], [8], [10] y sus referencias). Durante las útimas décadas, matemáticos, químicos y físicos han tratado de encontar nuevos índices que permitan mejorar el poder de predicción del índice de Randić. Tal situación ha dado lugar a la introducción de un amplio número de índices, que en su gran mayoría pueden ser estudiados mediante la Teoría de Gráficas.

Uno de los sucesores naturales del Índice de Randić, es el Primer Índice Aritmético-Geométrico (GA_1) , que fue definido en [13] de la siguiente manera: $GA_1(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{\sqrt{d_u d_v}}{\frac{1}{2}(d_u + d_v)}$ donde uv denota la arista de la gráfica G conectando los vértices $u \neq v$, $y \neq d_u$ es el grado de un vértice u. Aunque GA_1 fue introducido en el 2009, ha demostrado su importancia teórico-práctica. Resulta atinado plantear que existen otros índices con la misma estructura que el GA_1 , por ejemplo $Z_{p,q}$ ($Z_{0,1} = GA_1$); en [3] se muestra experimentalmente que el GA_1 permite obtener la misma información que la dada por los índices $Z_{p,q}$.

En este trabajo, G = (V(G), E(G)) denota una gráfica conexa, simple y finita con $E(G) \neq \emptyset$. Note que la conectividad de G no es una restricción importante para el alcance de los resultados, porque si G tiene r componentes conexas G_1, \ldots, G_r , entonces $GA_1(G) = GA_1(G_1) + \cdots + GA_1(G_r)$; además, desde el punto de vista práctico toda gráfica molecular es conexa.

2 GA₁ y otros índices topológicos en gráficas

Proposición 1 Sea G una gráfica. Entonces:

- G es una gráfica regular si y sólo si $GA_1(G) = m$.
- Si G es un gráfica birregular- (Δ, δ) , entonces $GA_1(G) = \frac{2m\sqrt{\Delta\delta}}{\Delta+\delta}$.
- Si S_{n_1,n_2} es una gráfica Doble Estrella, entonces $GA_1(S_{n_1,n_2}) = \frac{2n_1\sqrt{n_1+1}}{n_1+2} + \frac{2n_2\sqrt{n_2+1}}{n_2+2} + \frac{2\sqrt{(n_1+1)(n_2+1)}}{n_1+n_2+2}$.
- Si K_{n_1,\dots,n_k} es la gráfica Multipartita Completa con $n = n_1 + \dots + n_k$ vértices, entonces $GA_1(K_{n_1,\dots,n_k}) = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \frac{2n_i n_j \sqrt{(n-n_i)(n-n_j)}}{2n-n_i-n_j}$.

Vamos a necesitar el siguiente resultado (ver [11]).

^{*}Trabajo realizado con apoyo de la UAGro

[†]Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, jcarloshg@gmail.com

[‡]Departamento de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid, jomaro@math.uc3m.es

[§]Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, jsmathguerrero@gmail.com

Corolario 2 Sea g la función dada por $g(x, y) = \frac{2\sqrt{xy}}{x+y}$ con $0 < a \le x, y \le b$. Entonces $\frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \le g(x, y) \le 1$. La igualdad de la cota inferior se alcanza si y sólo si x = a y y = b, o x = b y y = a y la superior se alcanza si y sólo si x = y. Además, g(x, y) = g(x', y') si y sólo si x/y es igual a x'/y' o y'/x'.

En [3] y [13] aparecen las siguientes desigual dades: $GA_1(G) \geq \frac{2(n-1)^{3/2}}{n}$ y $GA_1(G) \geq \frac{2m}{n}$. Nuestro próximo resultado muestra una cota inferior de $GA_1(G)$ dependiendo solamente de n y m; mejorando las desigual dades anteriores.

Teorema 3 Para toda gráfica G, $GA_1(G) \geq \frac{2m\sqrt{n-1}}{n}$. La igualdad se alcanza si y sólo si G es una gráfica Estrella.

Demostración. Recordemos que $1 \le d_u \le n-1$ para todo $u \in V(G)$. Por el Cororario 2, tomando a = 1 y b = n-1, tenemos

$$GA_1(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{2\sqrt{d_u d_v}}{d_u + d_v} \ge \sum_{uv \in E(G)} \frac{2\sqrt{(n-1)\cdot 1}}{n-1+1} = \frac{2m\sqrt{n-1}}{n}$$

Por el Cororario 2, la igualdad se alcanza para G si y sólo si cada arista une un vértice de grado 1 con un vértice de grado n - 1, y esto ocurre si y sólo si G es una gráfica Estrella.

La hiperbolicidad en gráficas es un tema de creciente interés, en lo fundamental, por sus múltiples aplicaciones intra y extramatemática (ver [1], [2], [12] y sus referencias). El siguiente resultado muestra una relación entre el $GA_1(G)$ y la Constante de Hiperbolicidad $\delta(G)$.

Teorema 4 Para toda gráfica G (diferente de un árbol), $GA_1(G) \geq \frac{2(4\delta(G)-1)^{3/2}}{4\delta(G)}$.

Demostración. Es bien conocido que si G no es un árbol, entonces $\delta(G) > 0$. Como G es una gráfica simple, tenemos que $\delta(G)$ es siempre un número múltiplo de $\frac{1}{4}$ [1] y que $\delta(G) \notin \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\}$ [12]. Por lo tanto, $\delta(G) \geq \frac{3}{4}$.

La función $f(x) = \frac{2(x-1)^{3/2}}{x}$ es creciente en $[1,\infty)$, ya que $f'(x) = \frac{(x-1)^{1/2}}{x^2}(x+2) > 0$ para cada $x \in (1,\infty)$. Además, $GA_1(G) \ge \frac{2(n-1)^{3/2}}{n}$. Como $\delta(G) \le \frac{n}{4}$, se tiene $n \ge 4\delta(G) \ge 3$ y $GA_1(G) \ge \frac{2(n-1)^{3/2}}{n} \ge \frac{2(4\delta(G)-1)^{3/2}}{4\delta(G)}$.

En función de obtener nuevas relaciones entre GA_1 y otros conocidos índices topológicos, vamos a necesitar el siguiente resultado clásico (ver [7]).

Lema 5 Si $0 < n_1 \le a_j \le N_1$ and $0 < n_2 \le b_j \le N_2$ for $1 \le j \le k$, entonces

$$\left(\sum_{j=1}^{k} a_j^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{k} b_j^2\right)^{1/2} \le \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{N_1 N_2}{n_1 n_2}} + \sqrt{\frac{n_1 n_2}{N_1 N_2}}\right) \left(\sum_{j=1}^{k} a_j b_j\right).$$

El muy conocido Segundo Índice de Zagreb $M_2(G)$, es definido como: $M_2(G) = \sum_{uv \in E(G)} d_u d_v$. Otro recurso a utilizar, es el siguiente caso particular de la Desigualdad de Jensen.

Lema 6 Si f es una función convexa en
$$\mathbb{R}_+$$
 y $x_1, \ldots, x_m > 0$, $f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_m}{m}\right) \leq \frac{1}{m} \left(f(x_1) + \cdots + f(x_m)\right)$.

En [4] y [3] podemos encontrar el siguiente resultado: $GA_1(G) \leq \frac{\sqrt{mM_2(G)}}{\delta}$. Nótese que, como $n\delta \leq 2m$, la cota superior del próximo teorema mejora la conocida cota anterior.

Teorema 7 Para toda gráfica G, $\frac{2}{\Delta+\delta}\sqrt{\frac{\delta m M_2(G)}{\Delta}} \leq GA_1(G) \leq \sqrt{\frac{n M_2(G)}{2\delta}}$, y la igualdad, en cada desigualdad, se alcanza si y sólo G es una gráfica regular.

Demostración. En función de probar la cota superior, tomemos una función h. Note que en la suma $\sum_{uv \in E(G)} (h(d_u) + h(d_v))$ cada término $h(d_u)$ aparece exactamente d_u veces, como u es un extremo de precisamente de d_u aristas. Así,

$$\sum_{uv \in E(G)} \left(h(d_u) + h(d_v) \right) = \sum_{u \in V(G)} d_u h(d_u), \qquad \sum_{uv \in E(G)} \left(\frac{1}{d_u} + \frac{1}{d_v} \right) = \sum_{u \in V(G)} d_u \frac{1}{d_u} = n.$$

Por el Lema 6 con $f(x) = x^{-1}$, se tiene $\sum_{uv \in E(G)} \frac{2}{d_u + d_v} \leq \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d_u} + \frac{1}{d_v} \right) = \frac{n}{2}$. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene

$$GA_1(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{2\sqrt{d_u d_v}}{d_u + d_v} \le \Big(\sum_{uv \in E(G)} d_u d_v\Big)^{1/2} \Big(\sum_{uv \in E(G)} \frac{4}{(d_u + d_v)^2}\Big)^{1/2} \\ \le \Big(M_2(G)\Big)^{1/2} \Big(\frac{1}{\delta} \sum_{uv \in E(G)} \frac{2}{d_u + d_v}\Big)^{1/2} \le \sqrt{\frac{nM_2(G)}{2\delta}} .$$

La cota superior se prueba utilizando la Desigualdad de Cauchy-Schwarz. Si la gráfica es regular, ambas cotas son las mismas, y son iguales a $GA_1(G)$. Si la igualdad se alcanza para la cota inferior, entonces $4(d_u + d_v)^{-2} = \Delta^{-2}$ para cada $uv \in E(G)$; por lo tanto, $d_u = \Delta$ para todo $u \in V(G)$ y la gráfica es regular. Si la igualdad se alcanza para la cota inferior, entonces $\frac{1}{2}(d_u + d_v) = \delta$ para cada $uv \in E(G)$ y se concluye que $d_u = \delta$ para todo $u \in V(G)$.

El Índice de Randić, es definido en [9] como: $R(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{d_u d_v}}$.

Teorema 8 Para cada gráfica G, $\frac{m^2}{\Delta R(G)} \leq GA_1(G) \leq \Delta R(G)$, y la igualdad se alcanza si y sólo si G es una gráfica regular.

Demostración. Ya que f(x) = 1/x es una función convexa en \mathbb{R}_+ , por el Lemma 6 se tiene

$$\frac{m}{\sum_{uv \in E(G)} \frac{\sqrt{d_u d_v}}{\frac{1}{2}(d_u + d_v)}} \leq \frac{1}{m} \sum_{uv \in E(G)} \frac{\frac{1}{2}(d_u + d_v)}{\sqrt{d_u d_v}} \leq \frac{\Delta}{m} \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{d_u d_v}},$$
$$\frac{m}{GA_1(G)} \leq \frac{\Delta R(G)}{m}.$$

En función de probar la cota superior, nótese que:

$$GA_1(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{\sqrt{d_u d_v}}{\frac{1}{2}(d_u + d_v)} \le \sum_{uv \in E(G)} \frac{\frac{1}{2}(d_u + d_v)}{\sqrt{d_u d_v}} \le \Delta \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{d_u d_v}} = \Delta R(G).$$

Si la igualdad se alcanza, entonces $\frac{1}{2}(d_u + d_v) = \Delta$ para toda $uv \in E(G)$ y se concluye que $d_u = \Delta$ para todo $u \in V(G)$.

De manera recíproca, si G es regular, entonces $R(G) = \frac{m}{\Delta}$. Por lo tanto, las cotas superior e inferior son idénticas, y ambas son iguales a $m = GA_1(G)$.

Vamos a concluir con dos muy conocidos índices, llamados Armónico y Suma-Conectividad, definidos, respectivamente, como: $H(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{2}{d_u + d_v}$, $S(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{d_u + d_v}}$. Para más información (ver [5]). La próxima desigualdad muestra una relación entre GA_1 y H(G) ([11]).

Proposición 9 Para toda gráfica G, $\delta H(G) \leq GA_1(G) \leq \Delta H(G)$.

Teorema 10 Para toda gráfica G, $\frac{2\delta S(G)^2}{m} \leq GA_1(G) \leq \sqrt{2\Delta} S(G)$. La igualdad en cada desigualdad se alcanza si y sólo si G es una gráfica regular.

Demostración. Como $f(x) = x^2$ es una función convexa en \mathbb{R}_+ , por el Lema 6 se tiene

$$\frac{2\delta S(G)^2}{m^2} = \left(\frac{\sqrt{2\delta}}{m} \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{d_u + d_v}}\right)^2 \le \left(\frac{1}{m} \sum_{uv \in E(G)} \left(\frac{2\sqrt{d_u d_v}}{d_u + d_v}\right)^{1/2}\right)^2 \le \frac{1}{m} \sum_{uv \in E(G)} \frac{2\sqrt{d_u d_v}}{d_u + d_v} = \frac{1}{m} GA_1(G).$$

Para demostar la desigualdad superior, nótese que:

$$\frac{2\sqrt{d_u d_v}}{\sqrt{d_u + d_v}} \le \frac{d_u + d_v}{\sqrt{d_u + d_v}} = \sqrt{d_u + d_v} \le \sqrt{2\Delta} ,$$

$$GA_1(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{2\sqrt{d_u d_v}}{d_u + d_v} = \sum_{uv \in E(G)} \frac{2\sqrt{d_u d_v}}{\sqrt{d_u + d_v}} \frac{1}{\sqrt{d_u + d_v}}$$

$$\le \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{2\Delta} \frac{1}{\sqrt{d_u + d_v}} = \sqrt{2\Delta} S(G).$$

- S. Bermudo, J. M. Rodríguez, J. M. Sigarreta, Computing the hyperbolicity constant, Comput. Math. Appl. 62 (2011) 4592-4595.
- [2] S. Bermudo, J. M. Rodríguez, J. M. Sigarreta, J.-M. Vilaire, Gromov hyperbolic graphs, *Discr. Math.* **313** (2013) 1575-1585.
- [3] K. C. Das, I. Gutman, B. Furtula, Survey on Geometric-Arithmetic Indices of Graphs, MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 65 (2011) 595-644.
- [4] K. C. Das, I. Gutman, B. Furtula, On first geometric-arithmetic index of graphs, Discrete Appl. Math. 159 (2011) 2030-2037.
- [5] Z. Du, B. Zhou, N. Trinajstić, Minimum sum-connectivity indices of trees and unicyclic graphs of a given matching number, J. Math. Chem. 47 (2010) 842-855.
- [6] I. Gutman, B. Furtula (Eds.), Recent Results in the Theory of Randić Index, Univ. Kragujevac, Kragujevac, 2008.
- [7] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya, Inequalities. Cambridge University Press, 1952.
- [8] X. Li, Y. Shi, A survey on the Randić index, MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 59 (2008) 127-156.
- [9] M. Randić, On characterization of molecular branching, J. Am. Chem. Soc. 97 (1975) 6609-6615.
- [10] J. A. Rodríguez, J. M. Sigarreta, On the Randić index and condicional parameters of a graph, MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 54 (2005) 403-416.
- [11] J. A. Rodríguez, J. M. Sigarreta, On the Geometric-Arithmetic Index, MATCH Commun. Math. Comput. Chem. (2015). In press.
- [12] J. M. Sigarreta, Hyperbolicity in median graphs, Proceedings Mathematical Sciences 123(4) (2013), 455-467.
- [13] D. Vukičević, B. Furtula, Topological index based on the ratios of geometrical and arithmetical means of end-vertex degrees of edges, J. Math. Chem. 46 (2009) 1369-1376. 1996.

Propiedades Matemáticas del diferencial de una gráfica*

Sergio Bermudo[†]

Juan C. Hernández-Gómez ‡

José M. Sigarreta. [§]

Resumen

En este trabajo se muestran relaciones, desigualdades y fórmulas cerradas para el diferencial en operaciones básicas entre gráficas.

Palabras Clave. Diferencial. Gráficas. Operaciones Básicas en Gráficas.

1 Introducción

En [6] se inició el estudio de las propiedades matemáticas del diferencial en gráficas, junto con otros tipos de diferenciales asociados a un determinado conjunto. En particular, en dicho trabajo se demuestran algunas desigualdades para el diferencial de una gráfica. El diferencial mínimo de un conjunto independiente fue considerado en [10]. El caso del *B*-diferencial de una gráfica fue estudiado en [9]. Además, este parámetro ha sido estudiado, en [1, 2, 3, 7, 8].

Para este trabajo comenzaremos estableciendo la notación y terminología a utilizar. G = (V, E)denotará una gráfica simple de orden n := |V| y tamaño m := |E|. Denotaremos dos vértices adyacentes $u \neq v$ por $u \sim v$. Para un vértice $v \in V$ denotamos $N(v) = \{u \in V : u \sim v\} \neq N[v] = N(v) \cup \{u\}$. El grado de un vértice $v \in V$ será denotado por $\delta(v) = |N(v)|$. Denotamos por $\delta \neq \Delta$ el mínimo y máximo grado de la gráfica, respectivamente. Para un subconjunto no vacío $S \subseteq V$, y un vértice $v \in V$, denotamos por $N_S(v)$ al conjunto de vecinos de v en $S: N_S(v) := \{u \in S : u \sim v\} \neq \delta_S(v) = |N_S(v)|$. Dada una gráfica $G = (V, E) \neq S \subseteq V$ denotamos $N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v), N[S] = N(S) \cup S \neq B(S)$

como el conjunto de vértices en $V \setminus S$ los cuales tienen un vecino en el conjunto de vértices S, esto es $B(S) = N[S] \setminus S = N(S) \setminus S$, y $C(S) = V \setminus (S \cup B(S))$.

El diferencial de un subconjunto $D \subseteq V$ se define como $\partial(D) = |B(D)| - |D|$ y el diferencial de una gráfica G se define como $\partial(G) = \max\{\partial(D)\}$. Diremos que $D \subseteq V$ es un conjunto diferencial o ∂ -set si $\partial(D) = \partial(G)$, D es un ∂ -set mínimo si $|D| = \min\{|X| : X \subseteq V, \partial(X) = \partial(G)\}$, y M es un ∂ -set máximo si $|M| = \max\{|X| : X \subseteq V, \partial(X) = \partial(G)\}$. Para toda gráfica G con componentes conexos $G_1, G_2, \ldots, G_k, \ \partial(G) = \partial(G_1) + \partial(G_2) + \ldots + \partial(G_k)$. De esta manera, sólo consideraremos gráficas conexas. Un conjunto $S \subseteq V$ es un conjunto dominante si todo vértice que no esté en S es adyacente a un vértice en S. El número de dominación de G, denotado por $\gamma(G)$, es la cardinalidad mínima de un conjunto dominante.

2 Diferencial de una Gráfica

Proposición 1 Se cumplen los siguientes enunciados:

- Si Γ' es un subgráfica inducida de Γ , se cumple $\partial(\Gamma') \leq \partial(\Gamma)$.
- Si K_n es una gráfica completa y W_n es una gráfica rueda, se cumple $\partial(K_n) = \partial(W_n) = n 2$.
- Si $K_{r,t}$ es una gráfica bipartita completa, se cumple $\partial(K_{r,t}) = \max\{r-1, t-1, r+t-4\}$.
- Si P_n es una gráfica camino y C_n es una gráfica ciclo, se cumple $\partial(P_n) = \partial(C_n) = \left|\frac{n}{3}\right|$.

^{*}Trabajo realizado con apoyo de la Universidad Autónoma de Guerrero

[†]The College of The Bahamas and University Pablo de Olavide, sbernav@upo.es

[‡]Universidad Autónoma de Guerrero, jcarloshg@gmail.com

 $^{^{\}S}$ Universidad Autónoma de Guerrero, josemaria
sigarretaalmira@hotmail.com

Lema 2 Las únicas gráficas con diferencial igual a uno son C_3, C_4, C_5, P_3, P_4 o P_5 .

Lema 3 Sea Γ una gráfica con grado máximo Δ . $\partial(\Gamma) = 2$ si y sólo si ocurre alguno de los siguientes casos:

- (a) Γ es isomorfa a C_6, C_7, C_8, P_6, P_7 o P_8 .
- (b) $\Delta = 3$, para todo vértice $v \in V$ tal que $\delta(v) = 3$, la subgráfica inducida por $V \setminus N[v]$ no contiene ninguna subgráfica isomorfa a un camino P_3 , y Γ no contiene tres subgráficas disjuntas isomorfas a P_3 .

Proposición 4 Sea Γ una gráfica de orden n. Si $n \ge 11$, entonces $\partial(\Gamma) \ge 3$.

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo que $\partial(\Gamma) \leq 2$. Entonces, por los lemas anteriores, falta estudiar el caso $\partial(\Gamma) = 2 \operatorname{con} \Delta = 3$. Tomamos un vértice u tal que $N(u) = \{u_1, u_2, u_3\}$. El número mayor de vértices adyacentes a N[v] podría ser 6, en cuyo caso, $\delta(u_1) = \delta(u_2) = \delta(u_3) = 3$. Pero, tomando $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ obtenemos $\partial(S) = 4$. Si el número de vértices adyacentes a N[v] es 5, es decir, $\delta(u_1) = 2$ y $\delta(u_2) = \delta(u_3) = 3$, tomando $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ obtenemos $\partial(S) = 3$. En consecuencia, el número de vértices adyacentes a N[v] es 4, por ejemplo, $\delta(u_1) = \delta(u_2) = 2$ y $\delta(u_3) = 3$. Denotemos $N(u_1) = \{u, v_1\}, N(u_2) = \{u, v_2\}$ y $N(u_3) = \{u, v_3, v_4\}$. Denotamos $A = \{u, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Si existe un vértice $z \notin A$ adyacente a u_1 o u_2 , se obtendría un camino P_3 en la subgráfica inducida por $V \setminus N(u_3)$, lo cual es una contradicción con el Lema 3. Si v_3 tiene dos vértices adyacentes fuera del conjunto A, tomando $S = \{u, v_3\}$, obtendríamos $\partial(S) = 4$. Lo mismo ocurre con v_4 . Por tanto, el número máximo de vértices adyacentes a v_3 o v_4 fuera de A es uno. Es claro que añadir otro vértice cualquiera produciría una contradicción con el Lema 2. En consecuencia, el número máximo de vértices adyacentes a v_3 o v_4 fuera de A es uno.

3 Producto Cartesiano de Gráficas

El producto cartesiano de dos gráficas $G ext{ y } H$, el cual se denota como $G \times H$, es una gráfica en donde dos vértices $(a, c) ext{ y } (b, d)$ son adyacentes en $G \times H$ si y solo si:

- a = b y c es adyacente con d en G, o
- c = d y a es adyacente con b en H.

Si tomamos una estrella $G = S_5$ y un camino $H = P_3$ tenemos que el ∂ -set mínimo en $G \times H$ es $v \times H$, donde v es el vértice de grado 4 en G, $\partial(G \times H) = 9 = n_2 \partial(G)$. Pero, si tomamos el ciclo $G = C_3$, el ∂ -set mínimo en $G \times H$ no se obtiene de ninguna de las formas anteriores, $\partial(G \times H) = 4 > n_2 \partial(G) = n_1 \partial(G)$.

Teorema 5 Sean G y H gráficas de orden n_1 y n_2 , y grado máximo $\Delta_1 \Delta_2$, respectivamente. Entonces

$$n_1\gamma(H) + n_2\gamma(G) - 3\gamma(G)\gamma(H) \le \partial(G \times H) \le \min\{\gamma(G)n_2, \gamma(H)n_1\}(\Delta_1 + \Delta_2 - 1).$$

Demostración. Sea A un conjunto dominante mínimo en $G \times H$. Si |A| < |D|, tenemos

$$\partial(A) = n - 2|A| > n - |D| - |D| \ge |B(D)| - |D| = \partial(\Gamma).$$

Por tanto, $|D| \leq \gamma(\Gamma) \neq \partial(\Gamma) \leq \gamma(\Gamma)(\Delta - 1)$.

La cota superior se obtiene usando la desigualdad de Vizing $\gamma(G \times H) \leq \min\{\gamma(G)n_2, \gamma(H)n_1\}$.

Para la demostración de la cota inferior note que para cuales quiera dos conjuntos $S_1 \subseteq V_1$ y $S_2 \subseteq V_2$ se verifica

$$\begin{array}{lll} \partial(S_1 \times S_2) &=& |B(S_1 \times S_2)| - |S_1 \times S_2| = |S_2||B(S_1)| + |S_1||B(S_2)| - |S_1||S_2| \\ &=& |S_2|(|B(S_1)| - |S_1|) + |S_1||B(S_2)| \\ &=& |S_2|(|B(S_1)| - |S_1|) + |S_1|(|B(S_2)| - |S_2|) + |S_1||S_2|. \end{array}$$

Tomando S_1 y S_2 como el mínimo conjunto dominante en G y H, respectivamente, se obtiene

$$\begin{aligned} \partial(G \times H) &\geq & \partial(S_1 \times S_2) = |S_2|(|B(S_1)| - |S_1|) + |S_1|(|B(S_2)| - |S_2|) + |S_1||S_2| \\ &= & \gamma(H)(n_1 - 2\gamma(G)) + \gamma(G)(n_2 - 2\gamma(H)) - 2\gamma(G)\gamma(H) \\ &= & n_1\gamma(H) + n_2\gamma(G) - 3\gamma(G)\gamma(H). \end{aligned}$$

4 Diferencial de producto corona de gráficas

El producto corona fue introducido en [5] como una nueva e importante operación entre gráficas. Sea G y H dos gráficas de orden n_1 y n_2 , respectivamente, el producto corona $G \odot H$ se define como la gráfica que se obtiene de G y H tomando una copia de G y n_1 copias de H y uniendo mediante una arista cada vértice de la i-ésima copia de H con el i-ésimo vértice de G. Denotaremos por $V = \{v_1, v_2, \ldots, V_{n_1}\}$ el conjunto de vértices de G y por $H_i = (V_i, E_i), V_i = \{v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, \ldots, v_{n_2}^{(i)}\}$, la copia de H tal que $v_k^{(i)} \sim v_i$ para todo $i \leq k \leq n_2$. Algunas aplicaciones del producto corona en gráficas pueden verse en [4].

Teorema 6 Sean $G ext{ y } H$ dos gráficas de orden $n_1 ext{ y } n_2$, respectivamente.

- a) Si $n_2 \ge 2$, entonces $\partial(G \odot H) = n_1(n_2 1)$.
- b) Si $n_2 = 1$, entonces $\partial(G \odot H) = n_1 \gamma(G)$.

Demostración. Primeramente, observemos que, si D es un ∂ – set de $G \odot H$, podemos suponer que $D \subseteq V$. Supondremos que $\{v_{j_1}^{(i)}, v_{j_2}^{(i)}, \ldots, v_{j_k}^{(i)}\} = D \cap H_i$, con $1 \leq k \leq n_2$. Si $v_i \in D$, entonces $\partial(D \setminus \{v_{j_1}^{(i)}\}), v_{j_2}^{(i)}, \ldots, v_{j_k}^{(i)}\}) = \partial(D) + 2k > \partial(D)$ la cual es una contradicción. Si $v_i \notin D$, entonces $\partial((D \setminus \{v_{j_1}^{(i)}\}), v_{j_2}^{(i)}, \ldots, v_{j_k}^{(i)}\}) \cup \{v_i\}) \geq \partial(D) + 2k - 2 \geq \partial(D)$, por lo que podemos tomar $D' = (D \setminus \{v_{j_1}^{(i)}\}), v_{j_2}^{(i)}, \ldots, v_{j_k}^{(i)}\}) \cup \{v_i\}$ en lugar de D.

a) Si $n_2 \ge 2$ y $v_i \notin D$, entonces $\partial(D \cup \{v_i\}) = |B(d \cup \{v_i\})| - |D \cup \{v_i\}| \ge |B(D)| \ge \partial(D)$, en consecuencia, podemos tomar D = V y, por lo tanto,

$$\partial(G \odot H) = \partial(V) = n_1 n_2 - n_1 = n_1 (n_2 - 1).$$

b) Para todo $D \subseteq V$ tenemos que $\partial(D) = \partial_G(D) + |D| = |B_G(D)|$. Así, de $\max_{D \subseteq V} \{|B_G(D)|\} = n_1 - \gamma(G)$ (ver [9]), de esta forma

$$\partial(G \odot H) = \max_{D \subseteq V} \{|B_G(D)|\} = n_1 - \gamma(G).$$

5 Diferencial de la unión de gráficas

La unión de dos gráficas $G ext{ y } H$, denotada como H + G, se define como la gráfica obtenida de unir las gráficas $G ext{ y } H$ tomando una copia de $G ext{ y }$ una copia de $H ext{ y }$ uniendo mediante una arista cada vértice de G con cada vértice de H. En esta sección daremos fórmulas explícitas para el diferencial de la unión de gráficas. El siguiente resultado fue probado en [6], el cual relaciona el número de dominación y el diferencial de una gráfica.

Teorema 7 Para cualquier gráfica conexa G de orden $n, n - 2\gamma(G) \le \partial(G) \le n - \gamma(G) - 1$.

Además, se puede verificar el siguiente resultado.

Proposición 8 Para toda gráfica G + H, $1 \le \gamma(G + H) \le 2$. 71 (a) $\gamma(G+H) = 1$ si, y sólo si $\gamma(G) = 1$ o $\gamma(H) = 1$.

(b) $\gamma(G+H) = 2$ si, y sólo si $\gamma(G) \ge 2$ y $\gamma(H) \ge 2$.

De las proposiciones 7 y 8 se obtiene la siguiente resultado.

Proposición 9 Dadas dos gráficas $G \ge H$ de orden $n_1 \ge n_2$, respectivamente, $n_1 + n_2 - 4 \le \partial(G + H) \le n_1 + n_2 - 2$.

La siguiente proposición fue probada en [3].

Proposición 10 Sea G una gráfica de orden n y grado máximo Δ ,

a) $\partial(G) = n - 2$ si, y sólo si $\Delta = n - 1$.

b) $\partial(G) = n - 3$ si, y sólo si $\Delta = n - 2$.

Para la demostración del Teorema 11 nótese que para dos gráficas $G ext{ y } H$ de orden $n_1 ext{ y } n_2 ext{ y grados}$ máximos $\Delta_1 ext{ y } \Delta_2$, respectivamente, el grado máximo de la unión de $G ext{ y } H$ es $\Delta(G + H) = \max{\{\Delta_1 + n_2, \Delta_2 + n_1\}}$, y como consecuencia directa de la proposición anterior, tenemos el valor exacto para el diferencial de la unión de dos gráficas en función del grado máximo de las gráficas. Así el resultado sigue.

Teorema 11 Sean G y H dos gráficas de orden n_1 y n_2 y grados máximos Δ_1 y Δ_2 , respectivamente. Entonces

a) $\partial(G+H) = n_1 + n_2 - 2$ si, y sólo si $\Delta_1 = n_1 - 1$ o $\Delta_2 = n_2 - 1$.

b) $\partial(G+H) = n_1 + n_2 - 3$ si, y sólo si $\Delta_1 = n_1 - 2$ y $\Delta_2 \le n_2 - 2$ o $\Delta_1 = n_1 - 2$ y $\Delta_2 = n_2 - 2$.

c) $\partial(G+H) = n_1 + n_2 - 4$ si, y sólo si $\Delta_1 \le n_1 - 3$ y $\Delta_2 = n_2 - 3$.

- L. A. Basilio, S. Bermudo and J. M. Sigarreta.: Bounds on the differential of a graph, Utilitas Mathematica. Por aparecer (2015).
- [2] S. Bermudo and H. Fernau.: Lower bound on the differential of a graph, Discrete Math. 312 (2012), 3236-3250.
- [3] S. Bermudo J. M. Rodríguez and J. M. Sigarreta.: On the differential in graphs, Utilitas Mathematica. En prensa (2014).
- [4] R. M. Casablanca, A. Diánez, P. García-Vázquez.: Toughness of the corona of two graphs, Int. J. Comput. Math. 88 (2011), 2697-2706.
- [5] R. Frucht and F. Harary.: On the corona of two graphs, Aequationes Math. 4 (1970), 322-325.
- [6] J.L. Mashburn, T.W. Haynes, S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi and P.J.Slater.: Differentials in graphs, Utilitas Mathematica. 69 (2006), 43-54.
- [7] P. Roushini Leely Pushpam and D. Yokesh.: Differential in certain classes of graphs, Tamkang Journal of Mathematics. 41 (2) (2010), 129-138.
- [8] J. M. Sigarreta.: Differential in Cartesian Product Graphs, Ars Combinatoria. En Prensa (2013).
- [9] P. J. Slater.: Enclaveless sets and MK-systems, J. Res. Nat. Bur. Standards. 82 (3) (1997), 197-202.
- [10] C. Q. Zhang.: Finding critical independent sets and critical vertex subsets are polynomial problems, SIAM J. Discrete Math. 3(3) (1990), 431-438.

Primeros resultados sobre la existencia de ciclos hamiltonianos en la \mathcal{P} -composición de digráficas*

Ma. del Pilar Cano[†] Hortensia Galeana-Sánchez[‡] Ilán A. Goldfeder[§]

Resumen

En esta charla presentamos una familia de digráficas obtenidas por medio de generalización de la operación de composición de digráficas (como lo utilizan J. Bang-Jensen y G. Gutin en [2]), en la que se satisface la misma caracterización para la existencia de ciclos hamiltonianos que los torneos bipartitos.

Palabras Clave. Digráfica. Ciclo hamiltoniano. Factor de ciclos. Generalización de torneos. \mathcal{P} -composición de digráficas.

1 Introducción

La composición de digráficas (como lo utilizan Bang-Jensen y Gutin en [2], aunque también se le conoce como suma de Zykov o producto cartesiano de digráficas) es una conocida usada operación de digráficas (véase la definición 1).

Dados el *n*-ciclo C_n y D_1, \ldots, D_n digráficas semicompletas y ajenas en vértices, la composición $C_n[D_1, \ldots, D_n]$ resulta ser una digráfica localmente semicompleta [1, § 2.10].

En [1], Bang-Jensen probó que las digráficas localmente semicompletas son hamiltonianas si y sólo si son fuertemente conexas. Esta caracterización resulta ser la misma que para las digráficas semicompletas.

En [4, 5], Galeana-Sánchez y Goldfeder introducimos una generalización de la composición que permite obtener digráficas k-partitas a partir de una familia de digráficas k-partitas, la \mathcal{P} -composición.

En la clase de las digráficas bipartitas semicompletas, Gutin, Häggkvist y Manoussakis caracterizaron la hamiltonicidad, a saber, una digráfica bipartita semicompleta es hamiltoniana si y sólo si es fuertemente conexa y posee un factor de ciclos.

Dados el *n*-ciclo C_n y D_1, \ldots, D_n digráficas bipartitas semicompletas fuertemente conexas y ajenas en vértices, la \mathcal{P} -composición $C_n[D_1, \ldots, D_n]^{\mathcal{P}}$ es una construcción análoga pero bipartita a las composiciones de tipo $C_n[H_1, \ldots, H_n]$, donde cada H_i es una digráfica semicompleta. Resultaba plausible y, de hecho, probamos que satisfacen la misma caracterización de hamiltonicidad que las digráficas bipartitas semicompletas.

2 Definiciones

Para los conceptos generales y aquellos no definidos aquí, se puede consultar [2]. En esta charla, D = (V(D), A(D)) es una digráfica sin lazos y con a lo más una flecha de u a v para cualquier pareja de vértices u y v.

Si (u, v) es una flecha en A(D), la denotaremos por $u \to o$ por uv. Dados dos conjuntos ajenos de vértices de D, $A \neq B$, denotaremos por (A, B) al conjunto de todas las flechas $a \to b$ tales que $a \in A \neq b \in B$.

Todas nuestras trayectorias y ciclos serán dirigidos. Una trayectoria hamiltoniana es aquella que recorre todos los vértices de la digráfica. Una digráfica es fuertemente conexa (o, por simplicidad,

^{*}Trabajo realizado con el apoyo UNAM-DGAPA-PAPIIT IN106613.

[†]Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, pilukis_kno@ciencias.unam.mx

[‡]Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, hgaleana@matem.unam.mx

[§]Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, ilan.goldfeder@gmail.com

fuerte) si entre cualquier par de vértices $u \neq v$ de D, existe tanto una trayectoria de u a v como una de v a u. A una colección de ciclos mutuamente ajenos \mathcal{F} en una digráfica D le llamaremos factor de ciclos, si es una subdigráfica generadora de D.

Definición 1 Consideremos una digráfica D con vértices $V(D) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y digráficas ajenas en vértices D_1, \ldots, D_n . La composición $D[D_1, \ldots, D_n]$, es la digráfica H con vértices $V(H) = \bigcup_{i=1}^n V(D_i)$ y, para w y z en V(H), la flecha $w \to z$ está en A(H) si y sólo si

- $i = j \ y \ w \to z \ \text{está en } D_i \ o$
- $w \in V_i, z \in V_j \text{ con } i \neq j \text{ y } s_i \rightarrow s_j \text{ está en } D.$

Véase la figura 1.



Figura 1: $C_3[C_4, C_4, C_4]$

En [4, 5] nos interesaba generalizar la operación anterior pero de forma tal que preservara el ser multipartita. Una digráfica D es *bipartita* si existe una partición de sus vértices en dos conjuntos tales que ningún par de vértices en la misma parte es adyacente. Como queríamos "combinar" una familia de digráficas, primero debemos fijar un orden en las particiones de forma tal que sepamos qué partes se corresponden entre las digráficas.

Definición 2 Dada una digráfica D, diremos que D tiene una bipartición-ordenada $\mathcal{P}(D) = (V_1, V_2)$, donde V_i es un subconjunto de V(D) para i en $\{1, 2\}$, si satisface que

- 1. $V_i \cap V_j = \emptyset$, si $i \neq j$,
- 2. $\cup_{i=1}^{k} V_i = V(D) y$
- 3. V_i es un conjunto independiente, para i en $\{1, 2\}$.

Y así, tenemos la generalización.

Definición 3 Consideremos una digráfica D con vértices $V(D) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y digráficas bipartitas ajenas en vértices D_1, \ldots, D_n con particiones-ordenadas $\mathcal{P}(D_i) = (V_1^i, V_2^i)$, la \mathcal{P} -composición de acuerdo a la bipartición-ordenada $\mathcal{P} = ((\bigcup_{i=1}^n V_1^i) = V_1, (\bigcup_{i=1}^n V_2^i) = V_2)$, denotada por $D[D_1, \ldots, D_n]^{\mathcal{P}}$, es la digráfica H con vértices $V(H) = V_1 \cup V_2$ y, para w y z en V(H), la flecha $w \to z$ está en A(H) si y sólo si

- $i = j \ y \ w \to z \ está \ en \ D_i \ o$
- $w \in V_k^i, z \in V_q^j \text{ con } k \neq l, i \neq j \text{ y } s_i \rightarrow s_j \text{ está en } D.$

Cada D_i es un sumando de D, para todo i en $\{1, \ldots, n\}$. Véase la figura 2.



Figura 2: $C_3[C_4, C_4, C_4]^{\mathcal{P}}$

Obsérvese que toda \mathcal{P} -composición $D[D_1, \ldots, D_n]^{\mathcal{P}}$ es una subdigráfica propia de la composición usual, $D[D_1, \ldots, D_n]$. Es importante hacer notar que la \mathcal{P} -composición depende del orden que se les dé a las particiones.

Finalmente, falta un último concepto.

Definición 4 Una digráfica es bipartita completa si es bipartita y entre cualesquiera dos vértices en partes distintas hay al menos una flecha.

3 Resultado principal

Teorema 1 (Gutin [6, 7], Häggkvist y Manoussakis [8]) Una digráfica bipartita semicompleta posee un ciclo hamiltoniano si y sólo si es fuertemente conexa y posee un factor de ciclos.

El resultado que nosotros logramos, es el siguiente.

Teorema 2 (Cano, Galeana-Sánchez y Goldfeder [3]) Consideremos D_1, \ldots, D_n digráficas fuertemente conexas y ajenas en vértices. $C_n[D_1, \ldots, D_n]^{\mathcal{P}}$ posee un ciclo hamiltoniano si y sólo si $C_n[D_1, \ldots, D_n]^{\mathcal{P}}$ posee un factor de ciclos.

En este caso, la \mathcal{P} -composición $C_n[D_1, \ldots, D_n]^{\mathcal{P}}$ será fuertemente conexa por construcción. 75

- Bang-Jensen, J.: Locally semicomplete digraphs: a generalization of tournaments, J. Graph Theory, 14(3), (1990) 371–390.
- [2] Bang-Jensen, J., Gutin, G.: Digraphs: Theory, Algorithms and Applications, 2nd edition, Springer, London 2009.
- [3] Cano, M. del P., Galeana-Sánchez, H., Goldfeder, I.A.: First results on the existence of Hamiltonian cycles in the *P*-composition, (2014) (Enviado).
- [4] Galeana-Sánchez, H., Goldfeder, I.A.: A classification of all arc-locally semicomplete digraphs, Electron. Notes Discrete Math. 34 (2009), 59 – 61.
- [5] Galeana-Sánchez, H., Goldfeder, I.A.: A classification of all arc-locally semicomplete digraphs, Discrete Math. 312 (2012), 1883 – 1891.
- [6] Gutin, G.: Criterion for complete bipartite digraphs to be Hamiltonian, Vestsī Acad. Navuk BSSR Ser.Fiz.-Mat. Navuk 1 (1984), 109 – 110.
- [7] Gutin, G.: Effective characterization of complete bipartite digraphs that have a Hamiltonian path, Kibernetika (Kiev) 4 (1985), 124 – 125.
- [8] Häggkvist, R.H., Manoussakis, Y.: Cycles and paths in bipartite tournament with spanning configurations, Combinatorica 9(1) (1989), 33 – 38.

Número de perforación, número cromático de hipergráficas y la conjetura de Katchalski

Bertín Hernández T.* Déborah Oliveros B.[†]

Resumen

En este trabajo se estudia la conjetura de Katchalski, en la que dada una familia \mathcal{F} de conjuntos convexos se trata de encontrar un número k (si existe) tal que si cualquier subfamilia de \mathcal{F} con k elementos es 2-perforable implique que la familia \mathcal{F} es 2-perforable. Nos apoyamos en el número cromático de gráficas e hipergráficas, donde el número cromático de hipergráficas está dado por la coloración débil.

Palabras Clave. Número de perforación. Teorema de Helly. Número cromático.

1 Introducción

Dada una familia finita \mathcal{F} de conjuntos en \mathbf{R}^d , decimos que \mathcal{F} es *m*-perforable si existen *m* puntos en \mathbf{R}^d tal que cualquier elemento de \mathcal{F} contiene al menos uno de los *m* puntos. Al mínimo número *m* para el cual F es *m*-perforable se le llama número de perforación. El Teorema de Helly (1913) [1] en \mathbf{R}^d nos dice que si \mathcal{F} es una familia finita de conjuntos convexos en \mathbf{R}^d , entonces \mathcal{F} es 1-perforable si y sólo si cualquier subfamilia de d + 1 elementos tiene intersección no vacía o es 1-perforable.

Existen varias generalizaciones de este teorema, una de ellas ha dado lugar a lo que se conoce como teoremas tipo Helly, en los que dada una familia de conjuntos se trata de encontrar (si existe) una constante k tal que si cualquier subfamilia de k elementos es m-perforable, entonces también la familia sea m-perforable.

Este tipo de teoremas son raros en la literatura y en 1982 Danzer y Grünbaum demostraron que incluso para el caso de la familia de las cajas de dimensión d (paralelogramos con lados paralelos a los ejes coordenados) este teorema no siempre es cierto, rescatando que para el número de perforación 2, la constante k es 3d para d impar y 3d - 1 para d par. Mas tarde en 1996 Meir Katchalski y David Nashtir probaron que si cualquier subfamilia con 9 elementos de una familia de triángulos homotéticos es 2-perforable entonces la familia completa es 2-perforable.

En este trabajo nos interesa estudiar en particular el número de perforación 2; para ello nos ayudamos del número cromático de gráficas e hipergráficas.

Resulta interesante relacionar el número cromático de una gráfica y de una 3-hipergráfica uniforme. De hecho, existe en la literatura una demostración alterna para perforación dos usando teoría de gráficas, lo que motivó a investigar: 1) la relación estrecha entre el número cromático y el número de perforación; 2) la existencia de características en hipergráficas para número cromático igual a dos; y 3) los problemas que existen en la literatura que guardan esos temas, en particular los (n, d)-cuerpos.

2 Gráficas e hipergráficas

2.1 Hipergráficas

Una hipergráfica es un par $\mathcal{H} = (\mathcal{V}(\mathcal{H}), \mathcal{E}(\mathcal{H}))$ tal que $\mathcal{V}(\mathcal{H})$ es un conjunto de vértices o puntos y $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ es una colección de subconjuntos no vacíos de $\mathcal{V}(\mathcal{H})$.

Una hipergráfica es simple si $E_1, E_2 \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$ y $E_1 \subset E_2$ implica $E_1 = E_2$. Los elementos de $\mathcal{V}(\mathcal{H})$ son los vértices de la hipergráfica, mientras que los conjuntos de $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ son las aristas de la hipergráfica. Una

^{*}IMATE-UNAM, bertin130gmail.com

[†]IMATE-UNAM, dolivero@matem.unam.mx

hipergráfica simple tal que $r = |E_1| = |E_2| = \cdots = |E_m|$, es llamada *r*-uniforme; haremos referencia a este tipo de hipergráfica como *r*-hipergráfica. En este trabajo sólo consideraremos los casos cuando r = 2 y r = 3. Observe que cuando una hipergráfica es simple y r = 2, ésta coincide con el concepto de gráfica usual.

Dada una hipergráfica $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, una coloración débil por vértices para \mathcal{H} es un mapeo o una asignación $C_W : \mathcal{V} \to \{1, 2, ..., k\}$, del conjunto de vértices \mathcal{V} al conjunto de colores $\{1, 2, ..., k\}$, tal que los vértices de cada arista son no monocromáticos o reciben al menos dos colores. Observe que cuando r = 2 esta definición coincide con la definición usual de coloración de gráficas.

En la literatura existe la noción de coloración fuerte, donde los vértices de una arista son heterocromáticos (todos los vértices de una arista tienen distinto color), en este trabajo nos vamos a referir sólo a la coloración débil y la llamaremos simplemente coloración. El mínimo k tal que una hipergráfica \mathcal{H} admite una coloración con k colores es llamado el número cromático de \mathcal{H} y se denota por $\chi(\mathcal{H})$.

A diferencia de gráficas, donde sabemos que una gráfica es 2-cromática si y sólo si la gráfica no tiene ciclos impares, en hipergráficas no existe una caracterización para r-hipergráficas con número cromático dos. Aunque existen algunos resultados parciales, ver por ejemplo [6].

2.2 Gráficas e hipergráficas de intersección

Las gráficas de intersección de conjuntos han sido muy estudiadas en la literatura y en este trabajo nos serán muy útiles, pues capturan algunas propiedades combinatorias de los conjuntos convexos que estudiaremos.

Definición 1 Sea \mathcal{F} una familia de conjuntos en \mathbb{R}^d . La gráfica de intersección $G_{\mathcal{F}}$ asociada a \mathcal{F} , se define como $G_{\mathcal{F}} = (V, E)$, donde $V = \mathcal{F}$ y $E = \{\{F_i, F_j\} | F_i, F_j \in \mathcal{F} \text{ y } F_i \cap F_j \neq \emptyset\}$. Definimos también la gráfica de no intersección de \mathcal{F} como la gráfica complemento $\overline{G}_{\mathcal{F}}$ de G.

Similarmente tenemos la siguiente definición para hipergráficas.

Definición 2 Sea \mathcal{F} una familia de conjuntos convexos en el plano \mathbb{R}^2 , podemos asignar a \mathcal{F} una hipergráfica $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$, llamada 3-hipergráfica intersección asociada a la familia \mathcal{F} , donde para cada miembro de la familia \mathcal{F} le asignamos un vértice de \mathcal{H} , y decimos que tres vértices forman una arista de \mathcal{H} si los elementos de la familia, correspondientes a esos vértices, tienen un punto en común. Es decir, $V(\mathcal{H}_{\mathcal{F}}) = \mathcal{F} \ y \ \mathcal{E}(\mathcal{H}_{\mathcal{F}}) = \{\{F_i, F_j, F_k\} | F_i \cap F_j \cap F_k \neq \emptyset\}$. Definimos la 3-hipergráfica de no intersección como la 3-hipergráfica complemento $\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}$.

3 Teoremas tipo Helly y número de perforación

El Teorema de Helly ha dado lugar a muchas generalizaciones de diversos índoles, una de estas se conoce como problemas tipo Helly o teoremas tipo Helly-Gallai y rescatan la estructura del Teorema de Helly. Se han considerado en la literatura muchos problemas de este tipo restringidos algunos a subconjuntos convexos de ciertos espacios. Existen pocos teoremas de este tipo en la literatura.

Como ya mencionamos con anterioridad, decimos que una familia finita \mathcal{F} de conjuntos convexos en \mathbf{R}^d es *m*-perforable si existe un conjunto de *m* puntos, tal que cada miembro de la familia contiene al menos uno de los puntos. El *número de perforación* $\Pi(\mathcal{F})$ de \mathcal{F} , es el mínimo número *m* tal que \mathcal{F} es *m*-perforable.

Una familia de conjuntos es Π^m si $\Pi(\mathcal{F}) = m$. Diremos que la familia \mathcal{F} es Π^m_k si cada subfamilia de tamaño k o menor, satisface ser Π^m .

Con este concepto, el Teorema de Helly en el plano \mathbf{R}^2 dice que para familias de conjuntos convexos en el plano Π_3^1 implica Π^1 .

En 1982 Danzer y Grünbaum probaron la existencia de teoremas tipo Helly con la propiedad de perforación para cajas en dimensiones 1 y 2, y algunos casos de dimensión d y probaron en general la no existencia (mediante construcciones) de teoremas tipo Helly para cajas en \mathbf{R}^d , ver [2].

En particular nosotros estamos interesados en conjuntos convexos en el plano y tratar de averiguar si existen familias y teoremas tipo Helly para perforación 2. Un ejemplo de este tipo de teorema es el siguiente.

Teorema 1 Para familias \mathcal{F} de cajas en \mathbb{R}^2 con lados paralelos a los ejes, si \mathcal{F} es Π_5^2 , entonces \mathcal{F} es Π^2 .

Pendavingh, Puite y Woeginger demostraron este resultado en [5] usando teoría de gráficas. Por otro lado Meir Katchalski y David Nashtir ([3],[4]) abordaron el problema de ver si existe algún k tal que Π_k^2 implique Π^2 para familias planares de conjuntos convexos y en 1996 [3] probaron los siguientes teoremas.

Teorema 2 Si \mathcal{A} es cualquier familia de triángulos homotéticos en \mathbb{R}^2 , entonces Π_0^2 implica Π^2 .

Teorema 3 Para familias de hexágonos convexos simétricos no existe k_0 tal que $\Pi_{k_0}^2$ implique Π^2 .

4 Número de perforación y número cromático

En esta sección relacionamos el número de perforación de una familia finita de conjuntos convexos \mathcal{F} dada, con el número cromático de el complemento de las gráficas e hipergráficas de intersección.

La siguiente proposición es cierta para k-hipergráficas (k = 2, 3) y $\chi(\mathcal{H})$ denota el número cromático para gráficas o número cromático débil para hipergráficas respectivamente.

Proposición 4 Para una familia \mathcal{F} de conjuntos convexos $\chi(\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}) \leq \Pi(\mathcal{F})$.

En general la igualdad no se cumple, es decir $\Pi(\mathcal{F}) > \chi(\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}})$. Sin embargo bajo ciertas condiciones se cumple la igualdad.

Proposición 5 Sea \mathcal{F} una familia de conjuntos convexos en \mathbb{R}^2 y sea $\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}$ su 3-hipergráfica de no intersección. Si toda clase cromática de $\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}$ tiene al menos tres vértices, entonces $\chi(\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}) = \Pi(\mathcal{F})$.

Para la familia de cajas la condición de que cada clase cromática tenga más de 3 elementos no es necesaria. De hecho el siguiente teorema es cierto para familias de convexos en \mathbf{R} .

Proposición 6 Sea \mathcal{F} una familia de convexos en **R**. Si $\overline{G_{\mathcal{F}}}$ es su gráfica de no intersección, entonces $\chi(\overline{G_{\mathcal{F}}}) = \Pi(\mathcal{F})$.

5 Conjeturas y conclusiones

Conjectura 1 ¿Existe un teorema tipo Helly para familias de (2,2)-cuerpos obtenidas de n-ágonos regulares?

Esta conjetura es equivalente a la siguiente:

Conjectura 2 ¿Existe k tal que Π_k^2 y $\chi(\mathcal{H}_F) = 2$, implique Π^2 para n-ágonos regulares?

De ser cierto, se podrían utilizar técnicas de coloración de hipergráficas, a saber, los teoremas de Las Vergnas-Fournier y Lovász, para probar algo de este estilo:

Conjectura 3 Para toda familia de n-ágonos regulares, existe un entero k tal que Π_k^2 implique Π^2 .

Resulta interesante preguntarse también sobre si es posible dar una familia de hipergráficas prohibidas para familias de hexágonos regulares trasladados.

Sabemos que existen condiciones necesarias y suficientes para que una gráfica tenga número cromático 2, se saben algunas características de las 3—hipergráficas uniformes para saber cuando su número cromático es dos, sin embargo quedó claro en ese momento que a diferencia de las gráficas esta caracterización dista de ser completa.

Por otro lado, como vimos en la sección 4 dada una familia de cajas ésta será 2-perforable si y sólo si su gráfica de intersección es 2-coloreable, lo que nos permite demostrar el Teorema de Danzer y Grünbaum vía el número cromático.

Como ya mencionamos con anterioridad, la idea central de este trabajo es la de encontrar cuándo los teoremas que determinan si una 3-hipergráfica es 2-cromática pueden utilizarse para familias más generales como convexos en \mathbb{R}^2 .

Sea \mathcal{F} una familia de conjuntos convexos en \mathbb{R}^2 y sea $\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}$ su 3-hipergráfica de no intersección. Las siguientes observaciones se derivan de la proposición 5: a) si $\chi(\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}) = 2$ y una de las clases cromáticas tiene más de 3 elementos, entonces $\Pi(\mathcal{F}) = 2$. b) si $\chi(\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}) = 2$ y una de las clases cromáticas tiene un solo elemento y la otra tiene uno o más de tres elementos, entonces $\Pi(\mathcal{F}) = 2$, c) si $\chi(\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}) = 2$ y una de las clases cromáticas tiene un de las clases cromáticas tiene un de las clases cromáticas tiene un de las clases cromáticas tiene exactamente 2 elementos, entonces $\Pi(\mathcal{F}) \ge 2$.

¿Qué podemos decir entonces en el caso 3? ¿Será cierto que si $\chi(\overline{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}) = 2$ y la familia satisface Π_k^2 para algún k entonces $\Pi(\mathcal{F}) = 2$?

El siguiente ejemplo muestra que k > 5.

Sea $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, ..., A_{n-2}, X, Y\}$ una familia de conjuntos convexos que cumplen $X \cap Y = \emptyset$ y $A_i \cap X \neq \emptyset$ y $A_i \cap Y = \emptyset$ para algún $i \in \{1, 2, ..., n-2\}$, y $\chi(\mathcal{H}_{\mathcal{F}}) = 2$, entonces Π_5^2 no implica Π^2 . Ver la Figura 1.



Figura 1: Contraejemplo de que Π_5^2 no implica Π^2

- [1] Katchalski, M., Liu, A.: A problem of geometry in \mathbb{R}^d , Proc. Amer. Math. Soc. 75 (1979), 284-288.
- [2] Danzer, L., Grünbaum, B.: Intersection properties of boxes in \mathbf{R}^d , Combinatorica 2(3) (1982), 237-246.
- [3] Katchalski, M., Nashtir, D.: On a conjecture of Danzer and Grünbaum, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), 3213-3218.
- [4] Katchalski, M., Nashtir, D.: A Helly Type Conjecture, Discrete & Computational Geometry 21(1) (1999), 37-43.
- [5] Pendavingh, R., Puite, Q. Woeginger, G. J.: 2-piercings via graph theory, Discrete Applied Mathematics 56 (2008), 3510-3512.
- [6] Fournier, J. C., Las Vergnas, M.: Une classe d'hypergraphes bichromatiques, Discrete Math. 2 (1972), 407-410.
- [7] König, D.: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Providence, RI Chelsea Publ. 1936.

Indice cromático circular con una aplicación a un problema de asignación^{*}

Ma. Guadalupe Rodríguez S.[†]

José de Jesús Rodríguez M.[‡]

Resumen

El concepto de número cromático circular $\chi_c(G)$ es una de las variaciones de la coloración estándar de una gráfica G. Esta puede verse como un refinamiento del número cromático $\chi(G)$. Equivalentemente a una coloración circular de los vértices se define una coloración circular de las aristas de G, dando lugar al índice cromático circular $\chi'_c(G)$. En este trabajo, se hace una revisión de ciertas familias infinitas de gráficas para las cuales χ'_c es conocido. Se presenta una aplicación de χ'_c , mediante un modelo matemático para un caso especial del problema de asignación open shop.

Palabras Clave. Número cromático circular. Número cromático. Índice cromático. Índice cromático circular. Gráficas planas. Gráficas bipartitas. Gráficas con peso.

1 Introducción

Se consideran solo gráficas simples finitas. Se define una gráfica como una pareja G = (V, E) donde V es un conjunto finito de vértices y E un subconjunto de $V \times V$, a los elementos de E, se les llama aristas. Los vértices serán representados por puntos y las aristas por líneas que unen pares de vértices.

Se entiende por una coloración de los vértices de una gráfica G, a una función $c: V \to S$, donde S es un conjunto de k colores $\{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$, V el conjunto de vértices de G, tal que $c(v) \neq c(w)$ si v y wson vértices adyacentes, es decir, si están unidos por una arista. A c se le conoce como una coloración propia de G. Decimos que G, es k-coloreable, si existe una coloración propia de los vértices de G con k colores. Al entero más pequeño k, para el cual G es k-coloreable, se le denomina número cromático de G y se denota por $\chi(G)$. El número cromático se puede aplicar en la asignación de tiempos a los semáforos de un cruce vehicular, ver [4].

Análogamente, se define una coloración propia de las aristas de G, como la función $c: E \to S$ tal que $c(e_1) \neq c(e_2)$ si e_1 y e_2 son áristas incidentes. G es k-coloreable, si existe una coloración propia de las áristas de G con k colores. Al entero más pequeño k, para el cual G es k-coloreable por aristas, se le denomina *índice cromático* de G y se denota por $\chi'(G)$.

En el año de 1988, surgió un nuevo concepto para la coloración de vértices de una gráfica, dado por Vince [5], bajo el nombre *star coloring*, este concepto puede verse como una generalización de la coloración propia y se le denomina *coloración circular*.

En las secciónes 2 y 3 de este trabajo, se definen los conceptos de número cromático circular $\chi_c(G)$, índice cromático circular $\chi'_c(G)$ de una gráfica (G), gráfica con pesos (G, w), número cromático circular $\chi_c(G, w)$ e índice cromático circular $\chi'_c(G, w)$ de (G, w). Se hace un resumen de las familias de gráficas para las cuales se conoce su número de coloración circular por aristas.

^{*}Trabajo realizado con apoyo de UAM-Azcapotzalco

[†]UAM-Azcapotzalco, rsmg@correo.azc.uam.mx

[‡]UAM-Azcapotzalco, jjesus.rodriguez@gmail.com

La coloración circular de las aristas de una gráfica (G, w) se puede aplicar a problemas de sistemas de producción cíclica conocidos en la literatura como open shop problems. La aplicación es tratada en la sección 4.

2 Definiciones y propiedades básicas del índice cromático circular

En esta sección se define el índice cromático circular de una gráfica en dos formas equivalentes. También se mencionan algunas propiedades fundamentales de este parámetro.

2.1 Coloración de gráficas

Definición 1 Sean k, d enteros positivos, tal que $k \ge 2d$. Una (k, d)-coloración de las aristas de una gráfica G = (V, E) es una función $c : E \to S$, donde S es el conjunto $\{0, \ldots, k-1\}$ de colores, tal que $d \leq |c(e_1) - c(e_2)| \leq k - d$, si $e_1 \neq e_2$ son aristas incidentes. El índice cromático circular, $\chi'_c(G)$, es el ínfimo de los $\frac{k}{d}$, tal que G es (k, d)-coloreable.

Definición 2 Sea $r \ge 2$ un número real y sea C^r el círculo (Euclideano) de perímetro r. Una rcoloración circular de las aristas de una gráfica G es una asignación c de intervalos unitarios de C^r a las aristas de G tal que para cualesquiera aristas incidentes e_1 y e_2 , los intervalos asociados $c(e_1)$ y $c(e_2)$ son disjuntos. Se dice que la gráfica G es r-coloreable, si existe una r-coloración circular de G. El índice cromático circular, $\chi'_{c}(G)$, es el ínfimo de los r, tal que G es r-coloreable.



Figura 1: Una (5,2)-coloración de C_5 , una 2.5-coloración circular de C_5 vista en la círculo $C^{2.5}$ y una [0,2.5)coloración circular de C_5 vista en el intervalo [0, r).

Se puede demostrar que el valor del ínfimo en esta definición siempre se alcanza, ver [2]. El siguiente teorema demuestra que $k \leq E(G)$, y podemos ver que el índice cromático circular es un número racional.

Teorema 1 Si G es una gráfica con q aristas, entonces $\chi'_c(G) = min\{\frac{k}{d}: G \text{ tiene una } (k, d)\text{-coloración}$ $\operatorname{con} k \le q \}.$

Demostración. Consideremos una (k, d)-coloración de las aristas de G con qcd(k, d) = 1 y supongamos que k > q. Entonces existe al menos un color del conjunto $\{0, \ldots, k-1\}$ el cual no es asignado a las aristas de G. Sin pérdida de generalidad digamos el color d no es usado (permutación de colores).

De aquí que podemos volver a colorear las aristas de color 2d por color 2d - 1 sin violar la condición $d \leq |c(e_i) - c(e_j)| \leq k - d$ para aristas incidentes e_i, e_j . De esta manera podemos volver a colorear las aristas de color ld por color ld-1 para $l=2,3,\ldots,x$ donde x es el mínimo entero tal que $xd\equiv 1$ mod(k). Puesto que k y d son coprimos, x existe. De aquí que tenemos una (k, d) coloración de las aristas de G sin una arista de color del conjunto $S = \{d, 2d, \dots, xd\}.$

Sea k' = k - x y definimos la coloración $c' : E(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, k' - 1\}$ donde $c'(e) = c(e) - |\{l \in S : l \in S : l \in S\}$ $l \leq c(e)$ |. Se muestra que c' es una (k', d') coloración de aristas de G donde d' = d - y con $y = \frac{(xd-1)}{k}$:

Para cualesquiera aristas incidentes e_i , e_j tenemos $|c(e_i) - c(e_j)| \ge d$. Sin pérdida de generalidad, supongamos $c(e_i) < c(e_j)$. Ya que $1 \in S$ tenemos $c(e_i), c(e_j) \neq 1$. Entonces exactamente y del los colores $c(e_i), c(e_i)+1, \ldots, c(e_i)+d-1$, reducidos módulo k, pertenecen a S, por tanto $|c'(e_i)-c'(e_i)| \ge d-y = d'$. Por otro lado, exactamente y colores de $c(e_j), c(e_j) + 1, \ldots, c(e_j) + d - 1 \mod(k)$ pertenecen a S. Puesto 82

que $|c(e_i) - c(e_j)| \le k - d$ obtenemos $|c'(e_i) - c'(e_j)| \le k - x - (d - y) = k' - d'$. Vemos que $\frac{k'}{d'} < \frac{k}{d}$ de la siguiente desigualdad: $\frac{k'}{d'} = \frac{k - x}{d - y} = \frac{k(k - x)}{d(k - x) + 1} < \frac{k}{d}$. Por lo tanto es suficiente considerar las (k, d) coloraciones de aristas con $k \le q$ y gcd(k, d) = 1 para

Por lo tanto es suficiente considerar las (k, d) coloraciones de aristas con $k \leq q$ y gcd(k, d) = 1 para determinar el $\chi'_c(G)$.

Un teorema fundamental en coloración de las aristas de una gráfica es el teorema de Vizing [6], el cual nos dice que $\chi'(G) = \Delta(G)$ o $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$, donde $\Delta(G)$ es el grado máximo de G. Este teorema hace una clasificación de las gráficas en dos clases: la clase 1 está formada por las gráficas G para las cuales $\chi'(G) = \Delta(G)$ y la clase 2 es el conjunto de gráficas tales que $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

2.2 Cotas principales para el número cromático circular

Lema 2 Para toda gráfica G el índice cromático es una cota superior del índice cromático circular. Es decir

$$\chi'(G) - 1 < \chi'_{c}(G) \le \chi'(G).$$

Demostración. Ver [2].

Teorema 3 Si G es de clase 1 entonces $\chi'_c(G) = \Delta(G)$. Si G es de clase 2, $\Delta(G) < \chi'_c(G) \le \Delta(G) + 1$.

Demostración. Supongamos que G tiene una (k, d)-coloración de las aristas de G con $\frac{k}{d} < \Delta(G)$. Por el principio del palomar existen dos aristas adyacentes de las $\Delta(G)$ aristas, digamos e_i, e_j tal que $|c(e_i) - c(e_j)| \le \frac{k}{\Delta(G)} < d$ lo cual es una contradicción a la definición de (k, d)-coloración de las aristas de G. De aquí que, $\frac{k}{d} \ge \Delta(G)$ y concluimos que $\chi'_c(G) = \Delta(G)$ si G es de clase 1.

Supongamos que G tiene una (k, d)-coloración c de las aristas de G con $\frac{k}{d} \leq \chi'(G) - 1$. Sin pérdida de generalidad, supongamos gcd(k, d) = 1. Veamos que la función $c' : E(G) \to S = \{o, \ldots, \lfloor \frac{(k-1)}{d} \rfloor\}$ tal que $c'(e_i) = \lfloor \frac{c(e_i)}{d} \rfloor$, nos define una $(\chi'(G) - 1)$ -coloración de las aristas de G, lo cual es una contradicción a la definición de índice cromático. Por lo tanto $\chi'_c(G) > \Delta(G)$ si G es de clase 2.

Teorema 4 Si G es de clase 2, o bien $\chi'_c(G) = \Delta(G) + 1$ ó $\Delta(G) + \frac{1}{\alpha'(G)} \leq \chi'_c(G) \leq \Delta(G) + \frac{\alpha'(G)-1}{\alpha'(G)}$, donde $\alpha'(G)$ el número de independencia por aristas de G.

Demostración. En una $\frac{k}{d}$ coloración circular de las q aristas de G hay a lo más $\alpha'(G)$ intervalos unitarios que pueden intersectarse dos a dos y por tanto $\frac{k}{d} \ge \frac{q}{\alpha'(G)}$, lo cual implica $d \le \frac{k\alpha'(G)}{q} \le \alpha'(G)$ por teorema 1. Por lo tanto, $\Delta(G) + \frac{1}{\alpha'(G)}$ es una cota inferior para $\chi'_c(G)$ para las gráficas de clase 2 y $\Delta(G) + 1 - \frac{1}{\alpha'(G)}$ una cota superior si $\chi'_c(G) < \Delta(G) + 1$.

Definición 3 Sea (G, w) una gráfica con pesos en las aristas. Una *r*-coloración circular por aristas de (G, w) es una asignación *c* de intervalos de C^r a las aristas de *G* tal que para toda arista $e \in (G, w)$ la longitud de c(e) es igual w(e) y para cualesquiera par de aristas incidentes e_1 , e_2 los intervalos $c(e_1)$ y $c(e_2)$ son disjuntos.

Observación 1 El índice cromático circular de una gráfica (G, w) es equivalente a el número cromático circular de su gráfica de líneas L(G, w), es decir $\chi'_c(G, w) = \chi_c(L(G, w))$.

3 Familias de gráficas con índice cromático circular conocido

El índice cromático circular de algunas gráficas ha sido estudiado por diversos investigadores. Presentamos una tabla que resume algunas de las familias de gráficas para las cuales se conoce $\chi_{c}^{'}(G)$ [3]. En particular resultan interesantes las familias de gráficas para las cuales $\chi_{c}^{'}(G) < \chi^{'}(G)$.

3.1 Tabla de familias de gráficas con χ	$\chi_{c}^{'}(G)$ conocido
---	----------------------------

Familia de gráficas	χ_{c}^{\prime}	clase
Gráfica de Petersen P	$3 + \frac{2}{3}$	2a
Ciclos C_{2k+1}	$2+\frac{1}{k}$	2a, k > 1
Gráficas completas K_n	n "	2b
Ruedas Multieje $W_{p+1,p-1}$	$p + 1 + \frac{1}{p-1}$	2a
Collares N_p	$3 + \frac{2^{r}}{p}$	2a
Snark J_3	$\frac{7}{2}$	2a
Snark J_5	$\frac{17}{5}$	2a
Snark J_{2k+1}	$\frac{10}{3}$	2a, k > 2

Tabla 1: Índice cromático circular de algunas gráficas.

4 Aplicación de coloración circular al problema de sistemas de producción cíclica

4.1 Terminología básica y presentación del problema

Supongamos que tenemos m procesadores P_1, P_2, \ldots, P_m y n trabajos J_1, J_2, \ldots, J_n . Cada trabajo J_i consiste de tareas $T_{i1}, T_{i2}, \ldots, T_{im}$, donde cada T_{ij} es procesada sin interrupción en t_{ij} unidades de tiempo en el procesador P_j . Asumimos que t_{ij} son enteros no negativos. Una calendarización de un problema de producción cíclica es una asignación de periodos de tiempos a las tareas tal que ningún procesador ejecuta dos tareas al mismo tiempo y tareas del mismo trabajo no se procesan simultáneamente. Nuestro objetivo es minimizar la longitud de asignación, considerando que cada ciclo de producción inicia enseguida de otro. Entonces se puede permitir que una tarea inicie cerca del fin de ciclo de producción y se complete en el inicio del siguiente ciclo de producción.

El problema de producción cíclica se modela de manera natural en una gráfica bipartita pesada (G, w). Una partición de los vértices representan los procesadores, mientras la otra partición consiste de vértices que representan los trabajos. Entonces una arista que une vértices de J_i y P_j corresponden a la tarea T_{ij} y ponemos su peso t_{ij} sobre ella. Esta gráfica es llamada gráfica de asignación. Una coloración circular de las aristas de la gráfica de asignación corresponde a un ciclo de producción y viceversa; el arco asignado a la arista T_{ij} representa el un intervalo de producción del ciclo.

Considérese un círculo de perímetro r y un arco unitario asignado a cada vértice de la gráfica, tal que vértices adyacentes tienen arcos disjuntos. En [1] se presenta un modelo para gráficas con pesos unitarios y nosotros lo expresamos de la siguiente manera:

min Z = r

S.t.

$$1 \leq |c(T_{ij}) - c(T_{ik})| \leq r - 1 \qquad T_{ij}, T_{ik} \in J_i \qquad (M)
1 \leq |c(T_{ij}) - c(T_{sj})| \leq r - 1 \qquad T_{ij}, T_{sj} \in P_j
0 < c(T_{ij}) < r - 1.$$

4.2 Ejemplo ilustrativo

Ejemplo 1. Consideramos un problema de producción cíclica con cuatro trabajos $J = \{J_1, J_2, J_3, J_4\}$ y siete tareas $T_{11}, T_{12}, T_{22}, T_{23}, T_{33}, T_{41}, T_{42}$. El tiempo de procesamiento de cada tarea es $t_{11} = 2, t_{13} = 4, t_{21} = 2, t_{22} = 3, t_{31} = 2, t_{32} = 3$. No hay restricciones de precedencia. El objetivo es encontrar una asignación que ejecute todas las tareas tal que el horario de taller sea mínimo.

El concepto de coloración de gráficas es aplicado para resolver el problema. La gráfica que representa este problema se muestra en la figura (2). La calendarización cíclica óptima para este sistema se muestra en la figura (3).



Figura 2: a) Gráfica bipartita con pesos y b) gráfica de incompatibilidades.



Figura 3: Calendarización cíclica óptima vista en C^6 y en [0, 6).

5 Conclusiones

En este trabajo se presentan el modelo de asignación para gráficas con pesos enteros positivos en las aristas, así como el mismo problema con una asignación de pesos unitarios, todo esto con la mira de desarrollar una teoría del modelo matemático de asignación. Se presentan las familias conocidas de gráficas de clase 2a, que son significativas para la búsqueda de una solución óptima para los problemas de asignación, usando el modelo que se propone. El trabajo a futuro es analizar problemas reales de producción cíclica y obtener su índice cromático circular, usando técnicas exactas o heurísticas.

- Modarres M., Ghandehari M.: Applying Circular Coloring to Open Shop Scheduling, Scientia Iranica Vol. 15, No. 5 2008 652–660.
- [2] Nadolski A.: Contemporary Mathematics, 352, American Mathematical Society, 2004 123–137.
- [3] Nadolski A.: The circular chromatic index of some Class 2 graphs, Discrete Mathematics 307 2007, 1447–1454.
- [4] Rodríguez M. G., Herrera S.: La coloración circular de gráficas. Una aplicación al problema de cruces vehiculares, Miscelánea Sociedad Matemática Mexicana 2014, 11–30.
- [5] Vince. A.: Star chromatic number, Journal of Graph Theory 12 (1998), 551–559.
- [6] Vizing. V. G.: On an estimate of the chromatic class of a p-graph, Met. Diskret. Anal 3 (1964), 25–30.

Sobre la computabilidad del clan comportamiento *

C. Cedillo † M.A. Pizaña[‡]

Resumen

Dada una gráfica G, los clanes son las subgráficas completas maximales de G y la gráfica de intersección de éstos es la gráfica de clanes, K(G). Evidentemente el operador de clanes puede ser iterado. Determinar el K-comportamiento de una gráfica G consiste en determinar si G es Kconvergente ($K^n(G) \cong K^m(G)$ para $n \neq m$) o no. En esta investigación en curso, trataremos de probar que el K-comportamiento es algorítmicamente irresoluble para el caso de gráficas localmente finitas y finitamente presentadas (pero infinitas).

Palabras Clave. Gráficas de Clanes. Clan Comportamiento. Computabilidad.

1 Introducción

Un clan de una gráfica G es una subgráfica completa maximal de G. Mientras que la gráfica de clanes K(G) de G es la gráfica de intersección de sus clanes: los vértices son los clanes y dos de ellos son adyacentes si y sólo si ellos comparten por lo menos un vértice (ver Fig. 1) [1]. A K se le conoce como el operador de clanes. La iteración de éste fue introducida en el año de 1972 por Hedetniemi y Slater [2], y definida como $K^0(G) = G$ y $K^{n+1}(G) = K(K^n(G))$.



Figura 1: Gráfica de clanes K(G) de la gráfica G.

En la investigación trabajaremos con gráficas infinitas pero finitamente presentadas (es decir que admiten una descripción con una cantidad finita de símbolos) y localmente finitas (el grado de cada vértice es finito). En este contexto, diremos que G es K-convergente si $K^n(G) \cong K^m(G)$ para $n \neq m$ y diremos que es K-divergente en caso contrario.

El comportamiento dinámico de G bajo la aplicación iterada del operador de clanes K es llamado el K-comportamiento de G, por lo que determinar el K-comportamiento de G se refiere a determinar si G es K-convergente o K-divergente [2].

^{*}Trabajo realizado con apoyo de SEP-CONACyT, proyecto 183210.

[†]Universidad Autónoma Metropolitana, Iztapalapa, mccc@xanum.uam.mx

[‡]Universidad Autónoma Metropolitana, Iztapalapa, map@xanum.uam.mx

1.1 Gráficas de clanes

En 1968 Hamelink [1] introduce condiciones suficientes para que una gráfica sea gráfica de clanes. Un año más tarde Roberts y Spencer [3] dan una caracterización de las gráficas de clanes en donde dan condiciones necesarias y suficientes para que una gráfica G sea gráfica de clanes. En el año 2006 un grupo de colaboradores establecieron que el problema de decidir si una gráfica G es gráfica de clanes es un problema NP-completo [4].

En 1973 Neumann-Lara descubre los primeros ejemplos de gráficas clan divergentes: para $n \geq 3$ todos los octaedros *n*-dimensionales \mathcal{O}_n son *K*-divergentes. Escalante reporta esta investigación de Neumann-Lara y también muestra que existen gráficas de cualquier periodo posible $p(G) \geq 1$ [5].

Desde entonces se ha estudiado ampliamente la K-divergencia [2, 5, 17, 18] y la K-convergencia [16, 19, 20]. También se han tratado el diámetro de las gráficas iteradas de clanes [21-24] y se han estudiado espacios topológicos asociados a estas gráficas iteradas de clanes [14-16] entre muchos otros temas relacionados.

Por otra parte, a principios del siglo XXI [6] se plantearon algunas preguntas interesantes sobre el operador de clanes, entre ellas están las siguientes:

- Determinar la clase de gráficas clan-invariante más grande.
- ¿El operador de clanes tiene el poder computacional de la máquina de Turing? Es decir, ¿es posible codificar un algoritmo, con su entrada en una gráfica, y simular los pasos del algoritmo iterando con el operador K?.

1.2 Teoría de computabilidad

En la primera mitad del siglo XX, matemáticos como Kurt Gödel, Alan Turing y Alonzo Church descubrieron que ciertos problemas no pueden ser resueltos por computadoras, es decir, que son algorítmicamente irresolubles. Estos fueron llamados *problemas irresolubles* [7].

Algunos problemas irresolubles que se han analizado son: el problema del paro (*The Halting Problem*), el problema de la palabra para grupos (*The Word Problem for Groups*) y el problema del dominó (*The Domino Problem*) [7–10].

1.3 Autómatas celulares

Un autómata celular (AC) es un modelo discreto que consiste de una malla regular de celdas, cada una con un número finito de estados, donde la malla puede estar en cualquier número finito de dimensiones. Cada celda c tiene un conjunto de celdas llamadas vecinos que se definen en relación a c [13].

El estado inicial de un AC, en el tiempo t = 0, se selecciona mediante la asignación de un estado para cada celda. Cada nueva generación es creada de acuerdo a un conjunto de reglas fijas que determinan el estado nuevo para cada celda en términos del estado actual de la celda y de los estados de las celdas en su vecindad. Típicamente, las reglas para actualizar el estado de las celdas son las mismas para cada celda y no cambian en el tiempo; además éstas son aplicadas simultáneamente en toda la malla, aunque existen excepciones, tales como el autómata celular estocástico y el asíncrono [13].

Aunque el autómata celular tuvo origen en la década de 1950, su interés se generalizó con el autómata celular de dos dimensiones llamado el *juego de la vida* de John Conway, popularizado por Martin Gardner en un artículo de Scientific American en el año de 1970 [11].

El juego de la vida es un autómata celular que tiene un universo infinito dividido en celdas, donde cada celda puede tomar dos estados, *viva o muerta*, y sus reglas son las siguientes [11]:

- Una celda viva sobrevive si tiene dos o tres vecinas vivas. En caso contrario muere.
- Una celda muerta (re)vive si tiene tres vecinas vivas. En caso contrario permanece muerta.

Una de las características más evidentes del juego de la vida es la frecuente aparición de *planeadores* (gliders). Conway, a través de los planeadores transporta información de un lugar a otro en el universo infinito de celdas. Los planeadores también interactúan con otros objetos en formas interesantes, por

ejemplo, es posible simular contadores y construir compuertas lógicas, tales como AND, OR y NOT, así como la construcción de un modelo que actúa como una computadora digital. Estas características llevan a que el juego de la vida puede simular una máquina universal de Turing [11,12] y por lo tanto, es algorítmicamente irresoluble el problema de decidir si una configuración inicial en el juego de la vida termina siendo estacionaria a la larga o continúa por siempre sin repetir configuraciones.

2 Estrategias de nuestra investigación

El objetivo principal de esta investigación es tratar de demostrar que el clan comportamiento es irresoluble para gráficas infinitas pero finitamente presentadas. Para esto se está tomando un *universo* infinito U, como en el juego de la vida de Conway, que por cuestiones técnicas de visualización se representa de manera finita colocándole un bordado a su alrededor (ver Fig. 2 (a)).



Figura 2: (a) Universo infinito U, finitamente representado. (b) $K^1(U)$. (c) $K^2(U)$.

Con ayuda de Yags¹ se realizan las iteraciones del operador de clanes en el universo. Así se observó que U es K-convergente ya que $K^2(U) \cong K^0(U)$ (ver Fig. 2 (b) y (c)). Sin embargo, cuando se agrega una perturbación en el universo su comportamiento cambia. Por ejemplo, si se agrega un vértice y se itera el operador de clanes, tres nuevos objetos aparecen, y se desplazan por el universo U (ver Fig. 3) aunque dos de ellos desaparecen pronto al llegar al borde de la representación.

Este tipo de comportamiento da esperanza a encontrar distintos objetos en U y lograr que interactúen entre sí, de modo que nos sea posible simular contadores y compuertas lógicas para construir una computadora digital o una máquina de Turing dentro de este universo.

Pero ya que el problema principal es demostrar que el clan comportamiento es irresoluble, esto podría lograrse reduciendo a éste a alguno de los problemas mencionados en la sección 1.2. Hasta el momento parece que la mejor opción es reducir el problema del paro al problema del K-comportamiento, y con ello se demostraría que el problema del K-comportamiento para gráficas localmente finitas y finitamente presentadas es irresoluble.

¹Sistema diseñado por R. MacKinney-Romero, M.A. Pizaña y R. Villarroel-Flores como herramienta de apoyo para el estudio de gráficas [25].



Figura 3: Iteración del operador de clanes de $U = K^0(U)$. En $K^2(U)$ aparecen tres objetos en el universo y en $K^4(U)$ desaparecen dos de ellos.

- Hamelink, R. C.: A partial characterization of clique graphs, J. Combinatorial Theory 5 (1968). 192–197.
- [2] Larrión, F., Neumann-Lara, V. and Pizaña, M. A.: Clique divergent clockwork graphs and partial orders, Discrete Applied Mathematics 6 (2004) 195–207.
- [3] Roberts, F. S., and Spencer, J. H.: A characterization of clique graphs, J. Combinatorial Theory 10 (1971) 102–108.
- [4] Alcón, L., Faria, L., de Figueiredo, C.M.H., and Gutierrez, M.: Clique graph reconginition is NP-complete Graph-Theoretic Concepts in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg (2006) 269–277.
- [5] Escalante, F.: Über iterierte clique-graphen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 39 (1973) 59–68.
- [6] Meidanis, J.: The clique operator, http://www.ic.unicamp.br/~meidanis/research/clique/ (2001).
- [7] Sipser, M.: Introduction to the theory of computation, Thomson Course Tecnology, Segunda Edición (2006)
- [8] Miller, C. F.: Decision problems for groups survey and reflections, Algorithms and Classification in Combinatorial Group Theory 23 (1992) 1–59.

- [9] Britton, J. L.: The word problem, Annals of Mathematics, Segunda serie 77 (1963) 16–32.
- [10] Berger, R.: The undecidability of the domino problem, Memoirs of the American Mathematical Society 66 (1996).
- [11] Adamatzky, A.: Game of life cellular automata, Springer (2010).
- [12] Berlekamp, E., Conway, J. H., and Guy, R.: Winning ways for your mathematical plays, Academic Press, New York 5 (1982).
- [13] Wolfram, S.: Statiscal mechanics of cellular automata, Reviews of Modern Physics 55 (1983) 601–644.
- [14] Prisner, E.: Homology of the line graph and of related graph-valued functions, Archiv der Mathematik. Archives of Mathematics. Archives Mathématiques 56 (1991) 400–404.
- [15] Bandelt, H. J., and Prisner, E.: Clique graphs and Helly graphs, Journal of Combinatorial Theory, Serie B 51 (1991) 34–45.
- [16] Prisner, E.: Convergence of iterated clique graphs, Discrete Mathematics 103 (1992) 199–207.
- [17] Neumann-Lara, V.: Clique divergence in graphs. Some variations, Pub. Prelim. Inst. Mat. U.N.A.M, México 224 (1991) 1–14.
- [18] Neumann-Lara, V.: Clique divergence in graphs, Algebraic methods in graph theory 25 (1981) 563–569.
- [19] Bornstein, C. F., and Szwarcfiter, J. L.: On clique convergent graphs, Graphs and Combinatorics 11 (1995) 213–220.
- [20] Acharya, B. D. : Some queries on the periodicity and convergence of a graph, Prof. P.L. Bhatnagar Commemoration Volume of Nat. Acad. Sci. (India), Ser. A (1980) 185–205.
- [21] Chen, B.L., and Lih, K.W.: Diameters of iterated clique graphs of chordal graphs, Journal of Graph Theory 14 (1990) 391–396.
- [22] Peyrat, C., Rall, D. F., and Slater, P. J.: On iterated clique graphs with increasing diameters, Journal of Graph Theory 10 (1986) 167–171.
- [23] Balakrishnan, R. and Paulraja, P.: Self-clique graphs and diameters of iterated clique graphs, Utilitas Mathematica 25 (1986) 263–.
- [24] Dutton, R. D. and Brigham, R. C.: On the radius and diameter of the clique graph, Discrete Mathematics 147 (1995) 293–295.
- [25] MacKinney-Romero, R., Pizaña, M.A., and Villarroel-Flores, R.: YAGS: Yet Another Graph System a GAP4 Package, Departamento de Ingeniería Eléctrica, UAM-Iztapalapa, Versión 0.01 (2014).

Acerca de una conjetura de Erdős-Grünbaum

A. Montejano^{*}

L. Montejano[†]

E. Roldán-Pensado

P. Soberón

Resumen

Grünbaum planteó en el 2008 una conjetura que dice que existe un entero n tal que para cualquier familia de conjuntos convexos, cerrados en el plano, dos de los cuales son acotados, si de cada cuatro conjuntos existen tres que tienen un punto en común, entonces existe un conjunto S (que consiste de n puntos), tal que cualquier convexo de nuestra familia contiene al menos un punto de S. Probaremos que la conjetura es falsa.

1 Introducción

La versión infinita del muy conocido Teorema de Helly [6] en el plano nos dice lo siguiente: Dada una familia infinita de conjuntos convexos, cerrados en el plano, uno de los cuales es acotado, si de tres en tres tienen un punto en común, entonces todos ellos tiene un punto en común. La siguiente conjetura fue publicada a sugerencia de Erdős en 1990 [2]: Existe una constante n tal que, dada una familia infinita de conjuntos convexos en el plano, uno de los cuales es acotado, con la propiedad de que cada vez que tomemos cuatro de ellos tres se intersectan, entonces existe un conjunto finito S con n puntos, tal que cualquier convexo de nuestra familia contiene al menos un punto de S.

18 años mas tarde, mientras Branko Grünbaum leía el manuscrito de la nueva edición de [2], comentó que esta conjetura no era cierta ni siquiera para la línea \mathbb{R} y dió un ejemplo que la rebatía. El ejemplo es el siguiente: Definamos conjuntos en \mathbb{R} como sigue: $F_0 = \{0\}$, y $F_n = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq n\}$, para cualquier entero positivo n. Por supuesto, todas las condiciones de la conjetura se satisfacen, mientras que es obvio que para cualquier conjunto finito S de números reales existe un entero n que es más grande que cualquier número de S. Por lo tanto, debido a la manera en que F_n fue definido, este no contiene ningún punto de S. En este mismo año 2008, Alexander Soifer le preguntó a Branko Grünbaum si el podría salvar la conjetura. Así fue como la siguiente versión más elaborada de la conjetura fue publicada en [7].

Conjectura 1.1 (*Grünbaum 2008*). Existe un entero n tal que para cualquier familia de conjuntos convexos, cerrados en el plano, dos de los cuales son acotados, si de cada cuatro conjuntos existen tres que tienen un punto en común, entonces existe un conjunto S (que consiste de n puntos), tal que cualquier convexo de nuestra familia contiene al menos un punto de S.

2 Nuestros resultados

Probaremos que la Conjetura 1.1, es falsa, refutando el hecho de que esta pueda ser salvada substituyendo la condición de dos conjuntos acotados por cualquier otro número mayor. Más aún, estudiaremos la conjetura de Erdős-Grünbaum en el plano más general del problema (p,q) de Hadwiger-Debrunner (ver [3] y [5]), para familias infinitas de conjuntos convexos cerrados en \mathbb{R}^d . Decimos que una familia \mathcal{F} de conjuntos convexos, cerrados en \mathbb{R}^d satisface la propiedad (p,q) si dados cualesquiera p conjuntos de la familia, entonces existen q de ellos que tienen un punto en común. El número de perforación, $\pi(\mathcal{F})$, es la mínima cardinalidad de un conjunto $S \subset \mathbb{R}^d$, tal que cualquier conjunto en la familia contiene al

^{*}Unidad Multidisciplinaria de Docencia e Investigacin de Juriquilla,UNAM, amandamontejano@ciencias.unam.mx †Instituto de matemáticas. UNAM. luis@matem.unam.mx

menos un punto de la familia S. Si no existe un conjunto finito que cumpla esta propiedad, diremos simplemente que $\pi(\mathcal{F}) = \infty$. Así pues, el Teorema clásico de Helly puede rescribirse como sigue:

Teorema de Helly. Sea \mathcal{F} una familia infinita de conjuntos convexos, cerrados en \mathbb{R}^d , uno de los cuales es acotado. Si \mathcal{F} satisface la propiedad (d+1, d+1) entonces $\pi(\mathcal{F}) = 1$.

Hadwiger y Debrunner conjeturaron que la propiedad (p,q) debería de ser suficiente para acotar el número de perforación de una familia de conjuntos convexos, lo cual fue confirmado más tarde por Alon y Kleitman [1]. El siguiente Teorema es ahora bien conocido como el Teorema-(p,q).

Teorema de Alon y Kleitman Dados enteros positivos $p \ge q \ge d+1$, existe una constante c = c(p, q, d)tal que la familia finita \mathcal{F} de conjuntos convexos cerrados en \mathbb{R}^d con la propiedad (p, q), satisface $\pi(\mathcal{F}) \le c$.

Vamos a denotar por $\xi(p, q, d)$ el valor más pequeño de la constante c(p, q, d) en el teorema anterior. En este contexto, es natural preguntarse cuántos conjuntos acotados son necesarios para que el teorema anterior sea cierto para familias infinitas.

Debemos de hacer notar que el ejemplo dado por Grünbaum nos hacer ver también que al menos p-q+1 conjuntos acotados son necesarios para que el Teorema-(p,q) pueda ser cierto. Para ver esto, sólo tomemos p-q copias de F_0 en vez de una sola. Vamos a caracterizar las tripletas (p,q,d) tales que p-q+1 conjuntos acotados en \mathbb{R}^d son suficientes para implicar el Teorema-(p,q) para familias infinitas. Nuestro resultado principal es el siguiente:

Teorema Principal Sean $p \ge q \ge d+1$ enteros positivos.

• Si $q \ge p - q + (d + 1)$ y \mathcal{F} es una familia de convexos, cerrados en \mathbb{R}^d conteniendo al menos p - q + 1 miembros acotados y satisfaciendo la propiedad (p, q), entonces

$$\pi(\mathcal{F}) \le \xi(q-1, d, d-1)\xi(p, q, d) + p - q + 1,$$

en donde $\xi(p,q,d)$ son las cotas del Teorema-(p,q), y

• Si $q , entonces existe una familia <math>\mathcal{F}$ de conjuntos convexos, cerrados en \mathbb{R}^d , conteniendo una cantidad contable de miembros acotados y satisfaciendo la propiedades (p,q), pero para la cual $\pi(\mathcal{F}) = \infty$.

Si denotamos por k el valor de p - q, el teorema anterior puede describirse diciendo que la familia con la propiedad (d + 2k + 1, d + k + 1) y teniendo al menos k + 1 conjuntos acotados, es suficiente para acotar el número de perforación, y para la propiedad (d + 2k, d + k) ningún número de miembros acotados es suficiente.

Sin embargo, insistiendo en de alguna manera salvar el espíritu de la Conjetura 1.1, obtenemos resultados positivos, si por ejemplo, los miembros acotados de \mathcal{F} satisfacen cierta estructura de separación. Decimos que una familia de convexos en \mathbb{R}^d es *m*-libre si ninguna (m + 1)-dupla tiene un miembro en común y todos sus elementos son acotados. Si $d \ge k$, un ejemplo de familia *k*-libre de tamaño arbitrario en \mathbb{R}^d consiste de un conjunto de planos afines (k-1)-dimensional en posición general interceptados por una bola compacta suficientemente grande. Más aún, si todos estos están contenidos en un plano afin *k*-dimensional entonces todas las *k*-duplas se interceptan mientras que ninguna (k + 1)-dupla lo hace.

Teorema Sea $p \ge q \ge d+1$ enteros positvos. Si \mathcal{F} es una familia de convexos cerrados en \mathbb{R}^d satisfaciendo la propiedad (p,q) y tal que contiene una familia (q-d)-libre de tamaño p-d, entonces

$$\pi(\mathcal{F}) \le \xi(p,q,d) + p - q + 1.$$

Por ejemplo, con (p,q,d) = (4,3,2), el teorema anterior nos dice que para salvar la Conjetura 1.1 es suficiente tener dos conjuntos convexos, acotados *disjuntos* en la familia.

Notemos que en el Teorema-(p,q) las cotas obtenidas para $\xi(p,q,d)$ son astronómicas. Cuando Hadwiger y Debrunner conjeturaron el Teorema-(p,q) también demostraron que si p y q eran suficientemente grandes, entonces $\pi(\mathcal{F}) \leq p-q+1$ (la mejor cota posible que podríamos esperar). Siguiendo este espíritu mostraremos que si p, q son suficientemente grandes, entonces p-q+1 conjuntos acotados son suficientes para obtener la misma cota, en el número de perforación, para familias infinitas con la propiedad (p,q). O sea:

Teorema Sea \mathcal{F} una familia infinita de conjuntos convexos, cerrados en \mathbb{R}^d conteniendo al menos t+1 miembros acotados. Si \mathcal{F} satisface la propiedad (p, p-t) para $p \ge \eta(d+1, t+1)$, entonces $\pi(\mathcal{F}) \le t+1$, en donde $\eta(d+1, t+1)$ son las números de Erdős-Gallai [4].

Para conjuntos convexos en el plano (el caso d = 2) los resultados anteriores, más el hecho de que $\xi(4,3,2) \leq 13, \ \xi(p,q,1) = p - q + 1 \ y \ \eta(3,3) \leq 16$, pueden resumirse en el siguiente enunciado:

- propiedad (4,3) + número infinitamente grande de miembros acotados $\neq \pi(\mathcal{F}) < \infty$.
- propiedad (4,3) + dos miembros acotados disjuntos $\Rightarrow \pi(\mathcal{F}) \leq 15$.
- propiedad (5,4) + dos miembros acotados $\Rightarrow \pi(\mathcal{F}) \leq 28$.
- propiedad (6,5) + dos miembros acotados $\Rightarrow \pi(\mathcal{F}) \leq 2$.
- propiedad (7,5) + tres miembros acotados $\Rightarrow \pi(\mathcal{F}) \leq 16$.

- Alon, N., Kleitman. D.J.: Piercing convex sets and the Hadwiger-Debrunner (p,q)-problem. Adv. Math. 96 No 1 (1992), 103-112.
- [2] Boltyanski, V., Soifer, A.: Geometric Etudes in Combinatorial Mathematics Center of Excellence in Mathematical Education Colorado Springs 1991
- [3] Eckhoff, J.: A Survey of the Hadwiger Debrunner (p,q)-problem. Discrete and Computational Geometry, pp. 347 – 377, Algorithms Combin., 25, Springer, Berlin, 2003
- [4] Erdős, P., Gallai, T.: On the minimal number of vertices representing the edges of a graph. Maguar Tud. Akad. Mat. Int. Kozl. 6 (1961) 181 – 203
- [5] Hadwiger, H., Debrunner, H.: Über eine variante zum Hellyschen satz. Archiv der Mathematik 8.4 (1957) 309 – 313
- [6] Helly, E.: Uber Mengen konvexer Krper mit gemeinschaftlichen Punkte. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 32 (1923) 175 – 176
- [7] Soifer, A.: The Mathematical Coloring Book: Mathematics of Coloring and the Colorful Life of its Creators. Springer 2009

Sobre el índice pseudoacromático-conexo de las gráficas completas

Gabriela Araujo-Pardo*

Christian Rubio-Montiel[†]

Resumen

Una k-coloración completa y conexa de una gráfica G es una coloración (no necesariamente propia) de los vértices de G con k colores tal que cada clase cromática induce una subgráfica conexa y para cada par de colores existe una arista con estos colores en sus vértices. El *índice pseudoacromático-conexo* de G es el mayor k para el cual la gráfica de líneas de G tiene una k-coloración completa y conexa. Mostraremos que el índice pseudoacromático-conexo de la gráfica completa es de orden $n^{3/2}$. Esta cota mejora la cota lineal dada por Abrams y Berman [Australas J Combin 60 (2014), 314–324].

Palabras Clave. Pseudoacromático. Pseudoacromático-conexo. Coloración completa. Gráfica de líneas.

1 Introducción

Sea G = (V(G), E(G)) una gráfica simple y finita. Una k-coloración completa de G es una asignación $\varsigma \colon V(G) \to [k]$ (donde $[k] := \{1, \ldots, k\}$) tal que para cada par de elementos distintos $i, j \in [k]$ existe una arista $xy \in E(G)$ tal que $x \in \varsigma^{-1}(i)$ y $y \in \varsigma^{-1}(j)$. El número pseudoacromático $\psi(G)$ de G es el máximo k para el cual existe una k-coloración completa de G (ver [9]). Resultados básicos sobre el número pseudoacromático y con la noción relacionada del número acromático (el cual tiene la restricción de que no hay aristas entre los vértices de un mismo color, es decir, está dada sobre coloraciones propias) se pueden encontrar en [5, 6, 12]. En este mismo sentido también hay que ver [2, 3, 7, 13] donde se discuten estas coloraciones en las aristas de K_n .

Suponga que $H := K_k$ es un menor de G obtenido de una subgráfica G' de G al contraer algunas aristas. Si V(H) = [k] entonces hay una correspondencia natural con las k-coloraciones completas $\varsigma: V(G') \to [k]$ para la cual $\varsigma^{-1}(i)$ es exactamente el conjunto de vértices de G' que se contraen al vértice i en H. El número pseudoacromático-conexo $\psi_c(G)$ se define como el máximo k para el cual existe una k-coloración completa de G de tal manera que cada clase cromática induce una subgráfica conexa (k-coloración completa y conexa) (ver [1]). Con esta definición, vemos que $\psi_c(G)$ es el orden del menor más grande que es una gráfica completa de G, cuyo valor se conoce como el número de Hadwiger de G. De las definiciones vemos que

$$\psi_c(G) \leq \psi(G).$$

El número pseudoacromático de la gráfica de líneas L(G) de G se llama el *índice pseudoacromático* $\psi'(G)$ de G (ver [6]). En este trabajo nos enfocaremos en la gráfica de líneas $L(K_n)$ de la gráfica completa K_n . Notemos que cualquier k-coloración completa y conexa de $L(K_n)$ se puede ver como una coloración en las aristas de K_n en la cual cada clase cromática induce una subgráfica conexa y entre cada par de clases cromáticas comparten al menos un vértice.

Se saben algunos valores exactos de $\psi'(K_n)$. La siguiente tabla aparece en [2] donde se recopilan los valores más pequeños conocidos.

En [2, 3, 7, 13] se prueba que $\psi'(K_n) = qn$ para $n = q^2 + q + 1$ con q potencia de un primo impar y que $\psi'(K_{n-a}) = q(m-2a)$ para $n = (q+1)^2$ con q potencia de un primo par y $a \in \{-1, 0, 1, 2\}$. En [13] se prueba que $\psi'(K_n)$ crece asintóticamente como $n^{3/2}$.

^{*}Instituto de Matemáticas, UNAM. garaujo@matem.unam.mx

[†]Instituto de Matemáticas, UNAM. christian@matem.unam.mx

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\psi'(K_n)$	1	3	4	7	8	11	14	18	22	27	32	39

Tabla 1: Valores exactos para $\psi'(K_n), 2 \le n \le 13$.

Sin embargo, para el caso de valores exactos de $\psi'_c(K_n)$ solamente se saben los valores pequeños de la siguiente tabla, los cuales aparecen en [1] donde también se prueba que $\psi'_c(K_{5k+j+1})$ es al menos 9k + j la cual es la mejor cota conocida.

n	2	3	4	5	6	7
$\psi_c'(K_n)$	1	3	4	6	7	10

Tabla 2: Valores exactos de $\psi'_c(K_n), 2 \le n \le 7$.

Nosotros probaremos los siguientes teoremas que refieren al índice pseudoacromático-conexo de las gráficas completas:

Teorema 1 Si q es potencia de primo y $n = q^2 + q + 1$ entonces

$$\left\lceil \frac{q}{2} \right\rceil n \le \psi_c'(K_n).$$

Teorema 2 Si $n \ge 8$ entonces

$$\frac{1}{2}n^{\frac{3}{2}} + \Theta(n) \le \psi'_c(K_n).$$

Teorema 3 Si $n \ge 8$ entonces

$$\psi'_c(K_n) \le \max\left\{\min\{f(x), g(x) : x \in \mathbb{N}\}\right\}$$
donde $f(x) = \lfloor n(n-1)/2x \rfloor \ y \ g(x) = \lfloor (x+1)(n-x+3/2) + 1/2 \rfloor.$

Teorema 4 Si $n \ge 8$ entonces

$$\psi_c'(K_n) \le \frac{1}{\sqrt{2}}n^{\frac{3}{2}} + \Theta(n).$$

Los teoremas 1 y 2 mejoran claramente la cota que prueban en [1], y los teoremas 3 y 4 implican que $\psi'_c(K_n) < \psi'(K_n)$. Más aún, los teoremas 2 y 4 observan que $\psi'_c(K_n)$ crece asintóticamente del orden de $n^{3/2}$.

2 Sobre la cota inferior

Los teoremas 1 y 2 abordan la cota inferior del índice pseudoacromático conexo de la gráfica completa de n vértices $\psi'_c(K_n)$. La herramienta para probar el Teorema 1 son los planos proyectivos finitos de orden q denotados como Π_q (ver [10, 11]).

Un plano proyectivo consiste de un conjunto de n puntos, un conjunto de líneas que son subconjuntos de puntos, y una relación de incidencia entre los puntos y líneas (la incidencia natural de pertenencia) teniendo las siguientes propiedades:

- 1. Dados dos puntos distintos, hay exactamente una línea incidente a ambos.
- 2. Dadas dos líneas distintas, hay exactamente un punto incidente a ambas.
- 3. Existen cuatro puntos en posición general (ninguna línea contiene a más de dos de ellos).

Así pues, no es difícil probar que dicho plano proyectivo tiene $n = q^2 + q + 1$ puntos (para algún número q) y n líneas; y que cada línea tiene q + 1 puntos y cada punto pasan q + 1 líneas. El número q es llamado el *orden* del plano proyectivo. Un plano proyectivo de oden q es denotado Π_q . Además, si q
es potencia de un primo, entonces Π_q existe, el cual es llamado el plano proyectivo algebraico ya que su construcción proviene de los campos finitos de Galois; para mayores referencias de planos proyectivos ver [11].

Lo siguiente fue planteado por primera vez por Bouchet en [7], posteriormente por Jamison en [13] y después para dar resultados sobre el índice pseudoacromático de las gráficas completas por los autores de este artículo y otros en [2, 3]. Como Π_q tiene $n = q^2 + q + 1$ puntos de manera natural tiene una correspondencia con K_n que particiona a sus aristas mediante las líneas de Π_q , cuyas líneas corresponden a subgráficas completas K_{q+1} . Dada una coloración en las aristas de K_n , las propiedades combinatorias de Π_q garantizan que si cada color aparece en cada vértice de una misma línea, entonces la coloración es completa. En este artículo estamos además interesados en que cada clase cromática sea conexa y esto lo logramos coloreando las subgráficas completas K_{q+1} que corresponden a las líneas de K_n por ciclos o trayectorias hamiltoneanos monocromáticas dependiendo de la paridad de q.

El siguiente lema observa la relación que guardan los índices pseudoacromáticos conexos entre una gráfica conexa y una de sus subgráficas inducidas conexas, el cual se utiliza en la prueba del Teorema 2.

Lema 5 Para cualquier gráfica conexa G, si H es una subgráfica inducida conexa de G, entonces $\psi_c(G) \ge \psi_c(H)$.

Demostración. Es suficiente probarlo cuando H se obtiene de G al borrar un solo vértice v. Dada una k-coloración completa y conexa ς de H, extendemos la coloración a G asignándole a v el color de alguno de sus vecinos.

A continuación probaremos el Teorema 2:

Demostración. La prueba depende de una versión fuerte, dada por Tchebychev, del "postulado" de Bertrand el cual se sigue del Teorema de los Números Primos (ver [4, 8]): Para cualquier $\epsilon > 0$, existe una N_{ϵ} tal que para cualquier real $x \ge N_{\epsilon}$, existe un primo q entre $x y (1 + \epsilon)x$. Ahora, sea $\epsilon > 0$ dada, y suponga que $n > (N_{\epsilon} + 1)^2(1 + \epsilon)^2$. Sea $x = \sqrt{n}/(1 + \epsilon) - 1$, así que $x \ge N_{\epsilon}$. Sea q un primo tal que $x \le q \le (1 + \epsilon)x$. Note que $q^2 + q + 1 \le (x + 1)^2(1 + \epsilon)^2 = n$. Ya que el plano proyectivo de orden qexiste para todo primo q (ver [10, 11]), se sigue del Teorema 1 y del Lemma 5 que

$$\psi_c'(K_n) \ge \psi_c'(K_{q^2+q+1}) \ge \frac{q}{2}(q^2+q+1) > \frac{q^3}{2} \ge \frac{x^3}{2} = \frac{(\sqrt{n}-1-\epsilon)^3}{2(1+\epsilon)^3}$$

como ϵ es arbitrariamente pequeña, el resultado se sigue.

Los teoremas 3 y 4 refieren a la cota superior de $\psi'_c(K_n)$ cuyas demostraciones son analíticas. El Teorema 3 se puede deducir por los siguientes hechos: Dada una $\psi'_c(K_n)$ -coloración completa y conexa $\varsigma \colon V(G) \to [\psi'_c(K_n)]$ de la gráfica de líneas G de K_n , sea x el tamaño de la clase cromática más pequeã C en la gráfica coloreada G. Se sigue que el número de clases cromáticas, $\psi'_c(K_n)$, es a lo más $\lfloor n(n-1)/2x \rfloor$. Por otro lado, no es difícil ver que el número de vértices los cuales no están en C pero son adyacentes a algún vértice en C es $\lfloor (x+1)(n-x+3/2)-1/2 \rfloor$ (recuerde que cada clase cromática es conexa). Como ς es completa y conexa, el número de clases $\psi'_c(K_n)$ es a lo más $\lfloor (x+1)(n-x+3/2)+1/2 \rfloor$. Por lo tanto:

$$\psi_c'(K_n) \le \max\left\{\min\{f(x), g(x) : x \in \mathbb{N}\}\right\}.$$

Después, debido a un análisis detallado y técnico, se obtienen el orden de los valores entre $\lfloor n(n-1)/2x \rfloor$ y $\lfloor (x+1)(n-x+3/2)+1/2 \rfloor$ en términos de n y x, logrando el Teorema 4.

Referencias

 Abrams, L., Berman Y.: Connected pseudoachromatic index of complete graphs, Australasian J. of Combinatorics 60(3), (2014), 314–324.

- [2] Araujo-Pardo G., Montellano-Ballesteros J. J., Rubio-Montiel C., Strausz R.: On the pseudoachromatic index of the complete graph II, J. Graph Theory 66(2), (2011), 89–97.
- [3] Araujo-Pardo G., Montellano-Ballesteros J. J., Strausz R.: On the pseudoachromatic index of the complete graph, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) 20(1), (2014), 17–28.
- [4] Bollobás, B.: Extremal graph theory, London Mathematical Society Monographs vol. 11, Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1978.
- [5] Bollobás, B., Reed, B., Thomason, A.: An extremal function for the achromatic number, Contemporary Mathematics 147 (1993), 161–165.
- [6] Bosák J., Nešetřil J.: Complete and pseudocomplete colourings of a graph, Math. Slovaca, 26(3), (1976), 171–184.
- Bouchet, A.: Indice achromatique des graphes multiparti complets et réguliers, Cahiers Centre Études Rech. Opr. 20(3-4), (1978), 331-340.
- [8] Gioia, A.: The theory of numbers, Markham, Chicago 1970, 156.
- [9] Gupta, R. P.: Bounds on the chromatic and achromatic numbers on complementary graphs, In Recent Progress in Combinatorics (Proc. Third Waterloo Conf. Combin., 1968), 1969, 229–235.
- [10] Hall, M.: Combinatorial Theory, (Blaisdell, Toronto), 1967.
- [11] Hirschfeld, J. W. P.: Projective geometries over finite fields, Clarendon Press, Oxford, 1979.
- [12] Harary, F., Hedetniemi, S., Prins, G.: An interpolation theorem for graphical homomorphims, Portugaliae Mathematica, 26, (1967) 453–462.
- [13] Jamison R. E.: On the edge achromatic numbers of complete graphs, Discrete Math. 74(1–2), (1989), 99–115.

Complejos que modelan un Sistema Distribuido

Fernando A. Benavides^{*}

Sergio Rajsbaum[†]

Resumen

Recientemente herramientas de la topología han sido de utilidad en el análisis de sistemas computacionales distribuidos. En este documento presentamos como el sistema distribuido de lectura/escritura para n+1 procesos se puede representar como un complejo simplicial \mathcal{WR}^n el cual es colapsable. Además se presenta su relación con el complejo $View^n$ y la subdivisión cromática $\chi(\Delta^n)$ asociados a los modelos distribuidos Atomic Snapshot e Immediate Snapshot respectivamente.

Palabras Clave. Sistema Distribuido. Complejo simplicial.

1 Introducción

En la industria de la computación es común escuchar hoy en día de *multiprocesamiento*, lo cual se ha convertido en la manera más promisoria de diseñar computadores más efectivos. Sin embargo esto trae limitaciones ya que los procesadores deben coordinarse efectivamente uno con el otro, lo difícil de la coordinación se debe a que los procesos son inherentemente *asíncronos*, es decir que ellos pueden retardarse debido a fallas, interrupciones, retardos en la comunicación, etc. Formalmente un *sistema distribuido* se define como una colección de procesos, los cuales ejecutan un protocolo finito, junto con un medio de comunicación tales como paso de mensaje, memoria compartida u otro objeto compartido. Algunos modelos conocidos son *atomic snapshot* e *immediate snapshot*, ver [3] y [4]. Cada sistema distribuido está caracterizado esencialmente por dos propiedades, la primera es que todo proceso tiene una *vista local* de lo que está a su alrededor y la segunda es la evolución de las vistas es decir cada comunicación entre los procesos modifica las vistas locales.

Aproximadamente en los 90's surgieron nuevas técnicas que tiene sus orígenes en la topología combinatoria, las cuales permitieron analizar estos sistemas distribuidos desde otras perspectivas y permitieron descubrir resultados muy interesantes como la imposibilidad de los problemas del *consensus, k-set agreement* y *renaming*, ver [5] y [6]. La relación entre estas ramas se basa en la representación de las vistas locales de un modelo distribuido como los vértices de un complejo simplicial. Lo interesante del complejo es que este refleja todas las ejecuciones del modelo distribuido incluyendo indirectamente aquellas en las cuales se presentan fallas de los procesos. Por ejemplo en [2] se define el problema de los *Generales Bizantinos*, el cual consiste en dos ejércitos localizados en lugares distintos y comandados por los generales A y B quienes desean atacar un campamento enemigo. Sin embargo ellos deben acordar la hora del ataque dado que si uno solo avanza perderá la batalla. Para ello cada uno envía un mensajero con la hora del ataque, pero existe la posibilidad que cada mensajero sea capturado por el enemigo. El general A desea combatir al amanecer mientras que B desea al atardecer. Si representamos por 0 el amanecer y por 1 el atardecer, se tiene que lo que conoce A puede ser $\{0\}$ si el mensajero de B fue atrapado o puede ser $\{0, 1\}$ en caso contrario. En la figura 1 se presentan los diferentes escenarios que pueden ocurrir.

El presente documento está dividido en cuatro secciones. En la segunda de ellas se hace una introducción al modelo considerado con el fin de formalizarlo y adicionalmente se exponen algunas de sus propiedades. En la tercera sección se presenta como las vistas locales de una ejecución del sistema distribuido representan las caras maximales de un complejo simplicial.

^{*}Instituto de Matemáticas - UNAM, Universidad de Nariño - Colombia, fandresbenavides@gmail.com

[†]Instituto de Matemáticas - UNAM, sergio.rajsbaum@gmail.com



Figura 1: Complejo Generales

2 Modelo

El modelo computacional está conformado por n + 1 procesos asíncronos los cuales escriben y leen sobre n + 1 registros atómicos *single-writer/multi-reader* donde cada uno de ellos ejecuta el protocolo de la figura 2. Los procesos serán denotados por los números de $[n] = \{0, 1, ..., n\}$.

procedure

```
s_i \leftarrow \emptyset

\operatorname{mem}[i] \leftarrow i

for j \leftarrow 1 to n do

s_i \leftarrow s_i \cup \{\operatorname{mem}[j]\}

return s_i
```

Figura 2: Protocolo del proceso i

Observe que cada proceso realiza dos operaciones, escritura y lectura. La primera es la operación denotada por w_i y se ejecuta cuando *i* escribe en su localidad mem[*i*]. La segunda denotada por $r_i(j)$ ocurre cuando *i* lee la localidad de *j*. De esta manera la vista local de *i* denotada por s_i está formada por todos los procesos que han escrito antes de la lectura. Por ejemplo después de la escritura w_i su vista local es $s_i = \emptyset$. Además se define el estado del sistema como el conjunto $S = \{(i, s_i) : i \in [n]\}$ formado por todas las vistas locales. Sin embargo estamos interesados en analizar el estado final del sistema que se obtiene déspues de la última lectura.

Por otro lado, dadas las características de los registros no pueden existir dos operaciones concurrentes sobre la misma localidad. De ahí que si op y op' son operaciones concurrentes podemos considerar que la operación op se ejecuto antes que op' o viceversa de manera tal que el estado final del sistema no se altere.

Definición 1 Una ejecución E del sistema de lectura y escritura sobre registros atómicos single-writer / multi-reader es un orden total \rightarrow_E del conjunto de operaciones { $w_i, r_i(j) : i, j \in [n]$ } tal que

- 1. $w_i \to_E r_i(1)$.
- 2. $r_i(j) \to_E r_i(j+1)$.

De ahí que la vista local de un proceso en la ejecución E está dada por:

$$s_i = \{j \in [n] : w_j \to_E r_i(j)\}$$

lo cual implica que para todo $i \in [n], s_i \neq \emptyset$. Observe que el orden de Lamport definido en [1] determina una ejecución del sistema distribuido considerado.

Consideremos ahora el conjunto $S = \{(i, s_i) : i \in s_i \subseteq [n], i \in [n]\}$ no necesariamente el estado final de una ejecución. Entonces sobre la clase de operaciones $\{w_i : i \in [n]\}$ se define la relación dada por:

Definición 2 Se dice que w_j es causal directa de w_i sobre S y se denota por $w_i \rightsquigarrow_S w_j$ si se cumple una de las siguientes condiciones,

- 1. $j \notin s_i$.
- 2. existe $k \in [n]$ tal que $i \in s_k$ y $j \notin s_k$ con i < j.

Definición 3 Se dice que w_j es causal indirecta de w_i sobre S y se denota por $w_i \rightarrow w_j$ si existe una secuencia i_1, \ldots, i_m tal que

$$w_i = w_{i_1} \rightsquigarrow_S \cdots \rightsquigarrow_S w_{i_m} = w_i$$

Proposición 1 Para cada estado final S.

 $w_i \rightarrow w_i$ si y solo si $w_i \rightarrow w_i$ para cada ejecución E de S.

De esta proposición se puede ver que cualquier extensión lineal de la relación de causalidad determina una ejecución del sistema distribuido. Además nos permite definir que las operaciones w_i y w_j son operaciones concurrentes si $w_i \not \to w_j$ y $w_j \not \to w_i$.

3 Complejo del Protocolo

Ahora entramos a definir nuestro objeto principal. Como se verá nuestra definición está fuertemente ligada al modelo distribuido definido.

Definición 4 Para cada $S = \{(i, s_i) : i \in s_i \subseteq [n]\}$ se define:

- 1. El conjunto de procesos de S
- 2. El conjunto de vistas de S

$$View(S) = \bigcup_{i \in Id(S)} s_i$$

 $Ids(S) = \{i : (i, s_i) \in S\}$

3. El conjunto de operaciones de S

$$Op(S) = \{w_i : i \in View(S)\} \cup \{r_i(j) : i \in Ids(S)\}$$

Definición 5 Para cualquier número natural n, se define el complejo simplicial abstracto $W\mathcal{R}^n$ como sigue:

1. El conjunto de vértices es

$$V(\mathcal{WR}^n) = \{(i,\sigma_i) : i \in s_i \subseteq [n]\}.$$

2. Un subconjunto S de $V(W\mathcal{R}^n)$ es un simplejo si y sólo si existe un orden lineal \rightarrow_E sobre el conjunto de operaciones Op(S) tal que satisface las condiciones de la deficinión 1 y S corresponde a su estado final.

A finales del 2013 en [7], Kozlov probó que el complejo $\chi(\Delta^n)$ asociado al modelo *immediate atomic* snapshot es un subcomplejo de Viewⁿ el cual está asociado al modelo *atomic snapshot*. Además prueba que Viewⁿ puede ser colapsado a $\chi(\Delta^n)$. El corolario anterior nos garantiza que Viewⁿ es un subcomplejo de \mathcal{WR}^n . En la figura 3 se presenta el complejo \mathcal{WR}^2 en el cual se puede observar que se han adicionado tres nuevos simplejos al complejo View².

Teorema 2 Para cada número natural n se cumple:

- 1. El complejo simplicial \mathcal{WR}^n es colapsable.
- 2. El complejo simplicial \mathcal{WR}^n es colapsable al complejo $View^n$.



Figura 3: Complejo de vistas para 3 procesos

- Lamport, L.: Time, clocks, and the ordering of events in a distributed system, Communications of the ACM 21 1978, 558 – 565.
- [2] Lamport, L., Shostak, R., Pease, M.: The Byzantine Generals Problem, ACM Transactions on Programming Languages and Systems 4 1982, 382 – 401.
- [3] Afek, Y., Attiya, H., Dolev, D., Gafni, E., Merrit, M., Shavit, N.: Atomic Snapshot of Shared Memory, J. ACM 40 1993, 873 – 890.
- [4] Borowsky, E., Gafni, E.: Immediate Atomic Snapshots and Fast Renaming, PODC '93. 1993, 41–51.
- [5] Borowsky, E., Gafni, E.: Generalized flp impossibility result for t-resilient asynchronous computations, STOC. 1993, 91–100.
- [6] Herlihy, M., Shavit, N.: The topological of asynchronous computability, J. ACM 46 1999, 858 923.
- [7] Kozlov, D.: The Topology of View Complex, preprint 11pp, arXiv:1311.7283 [cs.DC].
- [8] Saks, M., Zaharoglou, F.: Wait-free k-set agreement is impossible: The topology of public knowledge, SIAM J, Comput. 29 2000, 1449–1483.

Curvas que se pintan solas

Hans L. Fetter^{*}

Resumen

A veces, en un dibujo de una familia de líneas rectas, podemos observar la aparición de una curva delimitada por dichas líneas rectas. Sobretodo, si los segmentos se seleccionan metódicamente, es posible obtener una curva con formas o características bastante interesantes. Describiremos varios contextos diferentes en los que surgen estas curvas.

Palabras Clave. Cónica. Envolvente. Billar.

1. Introduccion

Todos hemos podido apreciar en un dibujo de una familia de segmentos de líneas rectas, sobre todo si estos son generados por alguna regla matemática particular, la repentina aparición de una o varias curvas "fantasma". En algunos casos nos es fácil describir estas curvas, ya que resultan ser harto conocidas. En otros casos obtenemos formas novedosas y no menos interesantes.

2. Lo conocido

Consideremos el ejemplo más sencillo (véase Boltianski [1],p.52): una familia de rectas con la propiedad de estar todas a igual distancia r de un punto fijo O. Entonces es relativamente sencillo convencerse que dicha familia de rectas simplemente "engendra" la circunferencia con centro O y radio r.

¿Alguna vez ha escuchado el término hilorama? Probablemente no, pero sí seguramente ha visto los resultados de esta manifestación artística.

El hilorama, o arte con hilos tensados, es una técnica que se caracteriza por la utilización de hilos de colores, cuerdas o alambres tensados que se enrollan alrededor de un conjunto de clavos para formar figuras geométricas, abstractas u otros tipos de representaciones.

Tomemos, por ejemplo, 36 puntos igualmente espaciados en un círculo, etiquetados del 0 al 35. Conectemos el *n*-ésimo punto con el punto $2n \mod 36$. Este proceso, nuevamente nos genera una curva notable (véase la figura 1a.)

Otro ejemplo, igualmente familiar, que a menudo se usa para ilustrar el concepto de tasas de cambio relacionadas, tiene que ver con una escalera de longitud L situada sobre el suelo liso y apoyada con un extremo en la pared (véase cualquier texto de cálculo.) Si la escalera empieza a deslizarse hacia abajo describe una familia de segmentos como los que se aprecian en la figura 1b. La curva que delimita la región que forman éstas es bien conocida:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = L^{2/3}.$$

Otro contexto en el que aparecen segmentos rectilíneos es en los billares (consúltese por ejemplo Tabachnikov [6].) Aquí lo que nos interesa estudiar es el comportamiento de una bola sobre una mesa de billar que se impulsa y luego se mueve en línea recta con velocidad constante hasta chocar con la banda. Entonces continúa por aquella dirección que corresponde a la igualdad entre el ángulo de incidencia y el de reflexión. Como no hay efectos de fricción el movimiento de la bola continúa de manera indefinida. Para el billar elíptico se observan básicamente dos tipos de trayectorias no-periódicas: en un caso los segmentos de la trayectoria de la bola describen la figura de otra elipse y en el otro obtenemos la envolvente de una hipérbola. (Véase la figura 2).

^{*}Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, hans@xanum.uam.mx



Figura 1: Dos ejemplos clásicos

El concepto de envolvente (a veces también se utiliza cáustica) (véase por ej. Flores [3]) viene dado por la siguiente

Definición 1 La envolvente de una familia de curvas, si existe, es una nueva curva tal que en cada uno de sus puntos es tangente a una de las curvas de la familia dada y de manera que cada curva de la familia es tangente al menos en un punto de la envolvente.

3. Lo nuevo

Ahora vamos a modificar ligeramente algunos detalles en varios de los problemas presentados anteriormente. En el caso de la escalera que resbala vamos a agregar un gatito sentado en el centro de la escalera. Y ahora nos preguntamos: ¿por qué curva se mueve el gatito al caer la escalera? (véase Gutenmacher [5].) Para responder esta interrogante simplemente vamos a incorporar colores en la imagen: la mitad superior de la escalera la pintamos de amarillo y la inferior de azul. De la figura 3a se desprende inmediatamente que esta trayectoria es parte de una circunferencia.

Como contraparte del hilorama para la cardioide tenemos la imagen 3b, que representa una trayectoria en un billar de clase C^2 , en el cual se han "pegado" adecuadamente tres arcos de elipse. Nótese la presencia de una curva en forma de trébol.

También hemos considerado nuevamente trayectorias no-periódicas en el billar elíptico, sólo que ahora empleando todo una gama de colores. Esta vez no nada más se observan las cáusticas en el exterior, sino que arcos de elipses e hipérbolas así como segmentos rectilíneos. (Véase la figura 4).

De forma un poco distinta a como procedimos para la construcción del billar hecho con tres arcos de elipse, construimos otros billares, también de clase C^2 , con cinco y seis arcos de elipse, respectivamente. Para éstos la presencia de diversas curvas y segmentos es muy notoria. (Véase la figura 5).

4. Lo inquietante

En un texto sobre los elementos de Euclides [2] encontramos la siguiente

Definición 2 Una línea es una longitud sin anchura.

Manifestándose al respecto de lo mismo, B. E. Goetz [4] nos dice:

Una línea recta no tiene anchura, ni profundidad, no se contornea, y no tiene extremos. No hay líneas rectas. Tenemos ideas sobre estas imposibilidades no existentes: incluso hacemos dibujos de ellas, pero, sin embargo, no existen.

Y ¿entonces ...?



(a) Cáustica elíptica







(b) Cáustica hiperbólica

(b) ¿Un hilorama?





Figura 4: Billar elíptico



Figura 5: Billares hechos con 5 y 6 arcos de elipse

- Boltianski, V. G.: La Envolvente, Lecciones populares de matemáticas, Editorial MIR, MOSCÚ, 1977.
- [2] Fernández de Medrano, S.: Los seis primeros Libros, onze, y doze, de los Elementos Geométricos del famoso philosopho Euclides, Bruselas, 1688.
- [3] Flores, A.: The parabola as the envelope of a family of straight lines, PRIMUS 10 3 (2000), 257 266.
- [4] Goetz, B. E.: The Usefulness of the Impossible, AAUP Bulletin, 42 2, (1956), 275–287.
- [5] Gutenmacher, V., Vasilyev, N. B.: Lines and Curves: A Practical Geometry Handbook, Birkhäuser, Boston, 2004.
- [6] Tabachnikov, S.: Billiards, Société Mathématique de France, Panor. Synth. No. 1, 1995

Ciclos en torneos multipartitos

Ana Paulina Figueroa *

Juan José Montellano-Ballesteros[†]

Mika Olsen[‡]

Resumen

En esta plática veremos algunas condiciones en las relaciones entre el orden, la irregularidad global y el número de partes de un torneo c-partito que aseguran que cada vértice de dicho torneo pertenezca a ciclos dirigidos de longitud q, para cada q entre tres y c.

Palabras Clave. Torneo multipartito, ciclos dirigidos, irregularidad global

1 Introducción

La familia que probablemente se ha estudiado más en el mundo de las digráficas es la de los torneos, que son orientaciones de gráficas completas. Los resultados que presentaremos en esta ocasión estudian a una familia de digráficas que generaliza a la de los torneos: la familia de los torneos multipartitos. Un torneo multipartito es una orientación de una gráfica multipartita completa. Es decir, los vértices de un torneo multipartito T están partidos en subconjuntos ajenos e independientes $V_1, V_2, \ldots V_c$, llamadas partes y son tales que, entre cada par de vértices que se encuentran en distintas partes, existe una flecha. Esta familia generaliza a los torneos, porque todo torneo es un torneo multipartito donde cada parte tiene un solo vértice.

La estructura de los ciclos dirigidos en los torneos multipartitos ha sido extensamente estudiada en las últimas décadas. En 2007 Volkmann [10], presentó los resultados más importantes hasta el momento en el tema y la discusión de por lo menos 40 problemas abiertos y conjeturas. Como es natural, muchos de los resultados y preguntas están principalmente dirigidos a generalizar a los que se conocen de torneos. En particular, en dicho artículo, se puede encontrar una sección que trata sobre la existencia de ciclos dirigidos cuya longitud no excede el número de partes, problema que extiende naturalmente a conceptos y resultados clásicos como hamiltonicidad y panciclismo de torneos.

Una digráfica es *hamiltoniana* si tiene un ciclo dirigido que pasa por todos los vértices. Los teoremas clásicos sobre torneos, que se conocen en este sentido, tienen su origen en 1934 cuando Rédei demostró que todo torneo tiene una trayectoria hamiltoniana [8]. En 1959 Camion [3] publicó que todos los torneos fuertemente conexos son hamiltonianos.

La primer generalización del concepto de hamiltonicidad es la panciclicidad. Decimos que una digráfica es *pancíclica* si tiene ciclos dirigidos de todas las posibles longitudes desde tres hasta el número de vértices. Harary y Moser publicaron en 1966 [6] que todo vértice fuertemente conexo es pancíclico.

Aún más fuerte es pedir que cada vértice esté en un ciclo de todas las posibles longitudes (digráfica pancíclica en vértices) o cada arista (digráfica pancíclica en aristas). Moon demostró que cualquier torneo fuertemente conexo no sólo es pancíclico sino pancíclico en vértices. En el mismo artículo de 1966 [7] probó que de hecho, todo torneo multipartito de orden n tiene n - m + 1 ciclos dirigidos para $3 \le m \le n$. Sin embargo, para garantizar que un torneo es pancíclico en aristas hace falta más que la conexidad fuerte, necesitamos de hipótesis sobre otros invariantes como pueden ser la conexidad, o en nuestro caso la irregularidad global. La irregularidad global de una digráfica D, se define como

 $i_q = \max\{\max\{d^+(x), d^-(x)\} - \min\{d^+(y), d^-(y)\} \mid x, y \in V(D)\}$

y se dice que D es regular si su irregularidad global es cero. En 1967, Alspach demostró que todo torneo regular es pancíclico en aristas [1].

^{*}Departamento de Matemáticas, ITAM, ana.figueroa@itam.mx

[†]Instituto de Matemáticas, UNAM. juancho@matem.unam.mx

[‡]Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas UAM-Cuajimalpa, olsen.correo.cua.uam.mx

Así, en el caso de torneos multipartitos hay resultados que se exponen en el survey de Volkmann sobre el problema de panciclicidad en todas sus variantes. Sin embargo, si sólo nos concentramos en los ciclos cuya longitud no excede el número de partes, también se pueden buscar generalizaciones de los resultados de panciclicidad para torneos puesto que, como habíamos mencionado antes, en un torneo hay tantos vértices como partes.

Los teoremas principales en los que nos inspiramos para el planteamiento de los resultados que se darán en la plática son los siguientes.

Bondy [2] generaliza el resultado de Harary y Moser demostrando que todo torneo multipartito tiene un ciclo dirigido de todas las longitudes hasta el número de partes. Además, en el mismo artículo subraya que el resultado es justo pues pudo encontrar una familia infinita de torneos multipartitos fuertemente conexos que no tienen ciclos de longitud mayor al número de partes. Luego, Guo y Volkmann en 1994 [4] pudieron demostrar que si el torneo multipartito tiene c partes y es fuertemente conexo, entonces en cada una de las partes podemos encontrar por lo menos un vértice que está en un ciclo dirigido de longitud m para cada $m \in \{3, \ldots c\}$, generalizando así el resultado de la panciclicidad en vértices de los torneos fuertemente conexos. Si además de la regularidad, pedimos que el torneo tenga por lo menos cuatro partes, entonces cada vértice está en un ciclo dirigido de longitud m para cada $m \in \{3, \ldots c\}$ como demostraron Zhou et al [11]. Finalmente, cuando la irregularidad global es 1 y el torneo multipartito tiene por lo menos cinco partes también se obtiene el resultado según podemos ver en [9]. Estos resultados nos dieron pie para investigar condiciones sobre el orden, irregularidad global y número de partes que pueden garantizar el que todos los vértices estén en ciclos de longitud menor o igual al número de partes.

2 Los resultados

Haciendo uso del Teorema de Turán es posible probar los siguientes lemas, que nos permitirán mostrar condiciones suficientes sobre el orden de un torneo multipartito, en función de su número de partes y de su irregularidad global, para que cada vértice del torneo este en ciclos dirigidos de longitud desde tres hasta el número de partes.

Dado un torneo multipartito, con partes V_1, V_2, \ldots, V_c , sea

$$i_g^c = max\{|V_i| - |V_j| : 1 \le i, j \le c\}$$

No es difícil ver que $i_q^c \leq 2i_g$.

Lema 1 Sea T un torneo multipartito con $c \ge 5$ partes y orden n. Si

$$n \ge \left(\frac{c(5c-4)}{(c-1)(c-4)}\right)i_g^c + \left(\frac{4c}{c-4}\right)i_g$$

entonces todo vértice está en un triángulo dirigido.



Figura 1: Lema 1

Lema 2 Sea T un torneo multipartito con $c \ge 5$ partes y orden n. Si

$$n \ge \left(\frac{c(3c-2)}{(c-1)(c-2)}\right)i_g^c + \left(\frac{4c}{c-2}\right)i_g$$

entonces todo vértice está en un cuadrado dirigido.

$$d^+(z) \le (d^+(x) - A)\frac{c-2}{2(c-1)} + |C_x^1| - 1$$



Figura 2: Lema 2

Sea xy un arco de un torneo T. Diremos que un triángulo transitivo $\{z_1z_2, z_2z_3, z_1z_3\}$ en T es un buen xy-triángulo si $z_1z_3 = xy$. De igual manera, un cuadrado $\{z_1z_2, z_2z_3, z_3z_4, z_1z_4\}$ en T será un buen xy-cuadrado si $z_1z_4 = xy$. Un conjunto F de buenos xy-triángulos y xy-cuadrados será un xy-buen conjunto si para todo par de elementos $C_1, C_2 \in F$ tenemos que $V(C_1) \cap V(C_2) = \{x, y\}$.

Lema 3 Sea T un torneo multipartito con $c \ge 9$ partes y orden n. Si para algún m se cumple que

$$n \ge \left(\frac{7c - 11}{c - 8}\right)i_g^c + \left(\frac{5c - 9}{c - 8}\right)i_g + \left(\frac{6c - 10}{c - 8}\right)m$$

entonces para todo arco xy de T existe un xy-buen conjunto de cardinalidad m.



Figura 3: Lema 3

Teorema 4 Sea T un torneo multipartito con $c \ge 9$ partes y orden n. Si para algún m se cumple que

$$n \ge \left(\frac{7c - 11}{c - 8}\right)i_g^c + \left(\frac{5c - 9}{c - 8}\right)i_g + \left(\frac{6c - 10}{c - 8}\right)m$$

entonces cada vértice de T está en un ciclo dirigido de longitud q, con $q = 3, 4, \ldots, m + 2$.

Demostración. De los lemas 1, 2 y 3 vemos que si el orden del torneo es suficientemente grande y tiene al menos 9 partes, todo vértice está en un triángulo dirigido y un cuadrado dirigido, y todo arco tiene un buen conjunto grande. Por otro lado, dado un ciclo dirigido C, si cada arco xy de C tiene un xy-buen conjunto grande, se sigue que C puede extenderse a otro ciclo dirigido más grande que lo contiene. Dependiendo del cardinal de los buenos conjuntos, será el que tanto podemos extender el ciclo dirigido original.



Figura 4: Teorema 1

Así tenemos como corolario que:

Corolario 5 Sea T un torneo multipartito con $c \ge 9$ partes y orden n. Si

$$n \ge \left(\frac{7c - 11}{c - 8}\right)i_g^c + \left(\frac{5c - 9}{c - 8}\right)i_g + \left(\frac{6c - 10}{c - 8}\right)(c - 2)$$

entonces cada vértice de T está en un ciclo dirigido de longitud q, con $q = 3, 4, \ldots, c$.

- [1] Alspach, B.: Cycles of each length in regular tournaments, Canad. Math. Bull 10 (1967), 283–286.
- [2] Bondy, J.A.: Disconnected orientation and a conjecture of Las Vergnas, J. London Math. 14 (1976), 227 - 282.
- [3] Camion, P.: Chemins et circuits hamiltoniens des graphes complets, C.R. Acad. Scie. Paris 249 (1959), 2151 – 2152.
- [4] Guo, Y., Volkmann, L.: Cycles in multipartite tournaments, J. Combin. Theory Ser. B 62 (1994), 363 – 366.
- [5] Guo, Y., Volkmann, L.: Extendable cycles in semicoplete multipartite digraphs, Graphs Combin. 20 (2004), 185 – 190.

- [6] Harary F., Moser, L.: The theory of round robin tournaments, American Math. Monthly 73 (1966), 231 – 246.
- [7] Moon, J.W.: On subtournaments of a tournament, Canad. Math. Bull 9 (1968), 297 301.
- [8] Rédei, L.: Ein kombinatoricher Satz, Acta Litt. Sci. Szeged 7 (1939), 39 43.
- [9] Tewes, M., Volkman, L., Yeo, A.: Almost all almost regular c-partite tournaments with $c \ge 5$ are vertex pancyclic. Discrete Mathematics 242 (2002), 201 228.
- [10] Volkmann, L.: Multipartite Tournaments: A survey Discrete Mathematics 307 24 (2007), 3097 3129.
- [11] Zhou, G., Yao, T., Zhang, K.M.: A note on cycles in regular multipartite tournaments, J. Nanjing Univ. Math. Biq. 15 (1998), 73 – 75.

Jaulas mixtas

Martha Gabriela Araujo Pardo^{*}

César Hernández Cruz †

Juan José Montellano Ballesteros[‡]

Resumen

Una (z, r, g)-gráfica mixta es una gráfica mixta z-regular por flechas, r-regular por aristas y de cuello g. Una jaula mixta es una (z, r, g)-gráfica mixta con el mínimo número posible de vértices. En este trabajo presentamos cotas inferiores y cotas superiores para algunos valores de z, r y g. Demostramos mediante construcciones que, en algunos casos, las cotas propuestas son justas. **Palabras Clave.** Gráfica Mixta. Jaula Mixta. Gráfica de Moore Mixta.

1 Introducción

Denotaremos por G a la gráfica mixta con conjunto de vértices V(G), conjunto de flechas A(G) y conjunto de aristas E(G), sin lazos, sin aristas múltiples y sin flechas paralelas. Decimos que una gráfica mixta es *z*-regular por flechas si el in-grado y el ex-grado de cada vértice es igual a *z*; análogamente, una gráfica mixta es *r*-regular por aristas si el grado de cada vértice es *r*. El cuello, g(G), de una gráfica mixta G es la longitud del ciclo más corto en G, donde todas las flechas del ciclo (en caso de haberlas) tienen el mismo sentido. Una (z, r, g)-gráfica mixta es una gráfica mixta z-regular por flechas, *r*-regular por aristas y de cuello *g*. Una (z, r, g)-jaula mixta es una (z, r, g)-gráfica mixta con el menor número posible de vértices. Si z = 0, la gráfica mixta es simplemente una gráfica, y las jaulas mixtas son jaulas en el sentido usual. Si r = 0, la gráfica mixta es una digráfica, y las jaulas mixtas coinciden con las jaulas dirigidas.

El problema de determinar la cardinalidad exacta de una jaula ha sido extensamente estudiado en el caso de las gráficas no dirigidas [4] y, aunque recibiendo menos atención, también ha sido investigado en el contexto de las gráficas dirigidas [1, 2], sin embargo, en este caso simplemente determinar las cota inferior de las jaulas dirigidas resulta un problema difícil, relacionado con varias conjeturas importantes en digráficas, como la conjetura de Caccetta-Häggkvist [3].

En el caso de las gráficas, las jaulas están estrechamente relacionadas con las gráficas de Moore. Una gráfica de Moore es una gráfica r-regular, con diámetro d, y con el máximo número posible de vértices, que resulta ser

$$1 + r \sum_{i=0}^{d-1} (r-1)^i.$$

No es difícil probar que la cota superior, o cota de Moore, para las gráficas r-regulares de diámetro d coincide con la cota inferior de las jaulas r-regulares de cuello impar 2d + 1, es por esta razón que las jaulas que alcanzan la cota inferior se llaman *jaulas de Moore*, sin embargo es importante notar que si el cuello es par, entonces la cota inferior de las jaulas r-regulares de cuello g no concide con la cota de Moore de las gráficas r-regulares de diámetro g/2.

Para las digráficas, en [2] se construyen diversas digráficas z-regulares de cuello g, todas ellas digráficas de Cayley. Además de estas construcciones, que brindan una cota superior para la cardinalidad de una (z, g)-jaula dirigida, los autores también demuestran que para z > 1, el número de vértices en una (z, 4)-jaula dirigida es al menos (5z + 4)/2, de donde se deduce que para $1 \le r \le 3$, el número de vértices en una (z, 4)-jaula dirigida es 3z + 1. Algunos otros valores son calculados de manera precisa, como el orden de una (4, 4)-jaula dirigida o los órdenes de las (2, g)-jaulas dirigidas para $3 \le g \le 5$ A raíz de los

^{*}Instituto de Matemáticas, UNAM, garaujo@matem.unam.mx

[†]Facultad de Ciencias, UNAM, cesar@matem.unam.mx

[‡]Instituto de Matemáticas, UNAM, juancho@matem.unam.mx

resultados obtenidos, se conjetura que para cualesquiera $z \ge 1$ y $g \ge 2$, el número de vértices en una (z,g)-jaula dirigida es z(g-1) + 1. Como se puede observar, las cotas justas se conocen únicamente para valores muy pequeños de z y g, dando esto una idea de la dificultad del problema.

De la misma manera en la que el estudio de las gráficas de Moore inspiró el estudio de las jaulas, nuestra motivación para estudiar las jaulas mixtas proviene del estudio de las gráficas de Moore mixtas (cuya definición es análoga). Recientemente se demostró en [5] que todas las gráficas de Moore mixtas de diámetro 2 son únicas, y que no existen gráficas mixtas de Moore de diámetro mayor o igual a 3. Este hecho nos invita a pensar que el comportamiento de las gráficas mixtas tiene particularidades muy diferentes al de las las gráficas y a las digráficas, lo que las hace muy atractivas como objeto de estudio.

2 Nuestro trabajo

Nuestro trabajo ha tomado dos direcciones principalmente. La primera es la obtención de una cota superior para el orden de las (z, 1, 4)-jaulas mixtas mediante la construcción de una familia de gráficas mixtas con las propiedades requeridas; para $1 \le z \le 4$ esta cota resulta ser justa.

Como es de esperarse, el comportamiento de las (z, r, g)-jaulas mixtas es muy parecido al de las (z, g)jaulas dirigidas cuando r es muy pequeña, y es muy parecido al de las (r, g)-jaulas cuando z es muy pequeña. Dado que existe mucho más trabajo realizado para el segundo caso, la segunda dirección que abordamos fue considerar a las (1, r, g)-jaulas mixtas. Tenemos construcciones de (1, r, 4)-jaulas mixtas para cualquier r > 1, que resultan no ser únicas, como puede observarse en la Figura 1 (es fácil observar que ambas resultan ser orientaciones parciales de $K_{4,4}$). También tenemos construcciones para una (1, 2, 5)-jaula mixta y actualmente estamos trabajando en la construcción de las (1, r, 5)-jaulas.



Figura 1: Dos (1, 2, 4)-jaulas no isomorfas.

- [1] Araujo-Pardo, M.G., Balbuena, C., Olsen, M.: On (k, g; l)-dicages, Ars Combinatoria, 92, (2009) 289–301.
- [2] Behzad, M., Chartrand, G., Wall, C.E.: On minimal regular digraphs with given girth, Kolekcja Mathematica 69 (1970), 227–231.
- [3] Caccetta, L., Häggkvist, R.: On minimal digraphs with given girth, Congressus Numerantium XXI (1978).
- [4] Exoo, G., Jaycay, R.: Dynamic cage survey, Electronic Journal of Combinatorics 15 (2008). #DS16.
- [5] Nguyen, M.H., Miller, M., Gimbert, J.: On Mixed Moore Graphs, Discrete Mathematics, 307. (2007) 964–970.

Sobre las extensiones finitas de gráficas^{*}

N. García-Colín[†]

M.A. Pizaña \ddagger

R. Villarroel-Flores[§]

Resumen

Una gráfica G es extensión de otra gráfica L, si para todo vértice $v \in G$, la subgráfica inducida por los vecinos de v es isomorfa a L. El problema de la extensión finita (PEF) consiste decidir si existe alguna extensión finita G para una gráfica dada L. Es un problema abierto el determinar si el PEF es algorítmicamente soluble o no, pero todas las variantes interesantes del PEF que se han considerado han resultado ser algorítmicamente irresolubles. Reportamos en este documento parte del trabajo que hemos venido haciendo en torno del PEF. En particular, presentamos condiciones suficientes para que una gráfica dada no tenga extensión finita.

Palabras Clave. Extensión de gráficas. Gráficas localmente homogéneas. Algoritmos. Irresolubilidad.

1 Introducción

Una gráfica G (no necesariamente finita) es *extensión* de otra gráfica L (finita), si para todo vértice $v \in G$, la subgráfica inducida por los vecinos de v es isomorfa a L ($N_G(v) \cong L$); en este caso también decimos que G es *localmente* L. Más en general considere un conjunto de gráficas (finitas) $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, \ldots, L_r\}$, decimos entonces que una gráfica G (no necesariamente finita) es *localmente* \mathcal{L} si para todo $v \in G$ los vecinos de v inducen una subgráfica isomorfa a alguna de las gráficas en \mathcal{L} , en este caso también diremos que G es una extensión de \mathcal{L} . Se ha mostrado, que los siguientes problemas son (algorítmicamente) irresolubles:

Teorema 1 [8, 9] Son irresolubles los siguientes problemas:

- 1. Dada L, decidir si L tiene extensión finita o infinita.
- 2. Dada L, decidir si L tiene extensión infinita.
- 3. Dada $\mathcal{L} = \{L_1, L_2\}$, decidir si \mathcal{L} tiene extensión finita.

El problema de la extensión finita (PEF) consiste decidir si existe alguna extensión finita G para una gráfica dada L. Como puede verse, el PEF es un problema muy cercano a los problemas en la lista anterior. Sin embargo, es un problema abierto el determinar si el PEF es algorítmicamente irresoluble o no.

Recuerde que un *algoritmo* es un procedimiento que ante cualquiera de sus posibles entradas, responde correctamente y *termina en un tiempo finito*; por contraste, un *procedimiento* que calcula algo, puede en principio quedarse calculando por siempre ante algunas de sus entradas posibles, de modo que el usuario no puede saber cuál es la respuesta ante esas entradas. Entonces lo que no se sabe sobre el PEF es si existe un algoritmo que lo resuelve o no.

Existen, eso sí, procedimientos conocidos que construyen una extensión finita de una gráfica dada Len caso de existir, pero estos procedimientos pueden quedarse calculando por siempre en caso de que L no tenga extensión. Como estos procedimientos no siempre terminan, no son algoritmos y queda entonces de manifiesto que uno de los problemas centrales en esta línea de investigación consiste en

^{*}Trabajo realizado con apoyo de SEP-CONACyT, proyecto 183210.

[†]INFOTEC Centro de investigación e innovación en tecnologías de la información y comunicación pmnatz0gmail.com

[‡]Universidad Autónoma Metropolitana, map@xanum.uam.mx

[§]Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, rafaelv@uaeh.edu.mx

encontrar criterios que permitan decidir que la gráfica L no tiene extensión. Para lograr un algoritmo para el PEF, bastaría entonces tener un procedimiento que en algún momento responda "no" en caso de que L no tenga extensión finita (aunque pueda seguir calculando por siempre en caso contrario): El algoritmo se podría entonces construir corriendo ambos procedimientos concurrentemente: si L tiene extensión finita, en algún momento tendríamos la construcción de G gracias al primer procedimiento, y si L no tiene extensión, el segundo procedimiento respondería "no" en algún tiempo finito. Con ello tendríamos un programa que responde correctamente y siempre termina en tiempo finito: un algoritmo.

Reportamos en este documento parte del trabajo que hemos venido haciendo en torno del problema de la extensión finita. En particular, presentamos condiciones suficientes para que una gráfica dada no tenga extensión finita (Teorema 2) y mostramos que debería existir un algoritmo para el PEF si cierta condición se cumple (Teorema 3).

2 El teorema

Para cada entero $r \ge 0$, decimos que una gráfica H es una r-extensión parcial de L si existe $x_0 \in H$ tal que para todo vértice $x \in H$ tenemos $d(x_0, x) \le r \implies N_H(x) \cong L$. Supondremos que cada H de estas ya viene con su vértice x_0 especificado. Note que una extensión (finita o infinita) de L es siempre una r-extensión parcial de L.

Sea L una gráfica finita. Sea s el número de órbitas de los vértices de L bajo su propio grupo de automorfismos y sean $n_1, n_2, \ldots n_s$ el número de vértices de L en cada órbita. Etiquetemos los vértices de L del 1 al s de acuerdo a la órbita a la que pertenece cada vértice. Esto nos permite a su vez etiquetar (algunas) aristas de una r-extensión parcial H de L: Si $xy \in E(H)$ y $d(x_0, x), d(x_0, y) \leq r$, entonces $N_H(x) \cong L \cong N_H(y)$. Usando los isomorfismos implícitos, podemos copiar las etiquetas de La los vértices de $N_H(x)$ y $N_H(y)$ y entonces, si $y \in N_H(x)$ está etiquetado como a y $x \in N_H(y)$ está etiquetado como b podemos asignar la etiqueta $\{a, b\}$ a la arista xy de H. Si una r-extensión parcial Hde L tiene un vértice x tal que x_0x es arista y está etiquetada $\{a, b\}$ decimos que H realiza a $\{a, b\}$.

Definimos el conjunto de pares $X_0 = \{\{a, b\} \mid 1 \le a, b \le s\}$. Observe que algunos de estos pares son de hecho singuletes $\{a, a\} = \{a\}$. Definimos ahora los siguientes subconjuntos de X_0 :

 $\begin{array}{lll} X_r &=& \{\{a,b\} \in X_0 \mid \text{ existe una } r\text{-extensión parcial de } L \text{ que realiza a } \{a,b\} \}\\ X_\infty &=& \{\{a,b\} \in X_0 \mid \text{ existe una extensión de } L \text{ que realiza a } \{a,b\} \}\\ X_F &=& \{\{a,b\} \in X_0 \mid \text{ existe una extensión finita de } L \text{ que realiza a } \{a,b\} \} \end{array}$

Evidentemente $X_F \subseteq X_{\infty} \subseteq \cdots \subseteq X_2 \subseteq X_1 \subseteq X_0$. También es cierto que $X_{\infty} = \bigcap_{r=1}^{\infty} X_r$, aunque esto es menos evidente. Diremos que X es un *conjunto admisible de pares* si $X_F \subseteq X \subseteq X_0$. Tomemos un conjunto admisible de pares $X = \{p_1, p_2, \ldots, p_t\}$ y para cada i, j con $1 \leq i \leq s$ y $1 \leq j \leq t$ definamos

$$m_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{si } p_j = \{i\} \\ 1 & \text{si } i \in p_j, |p_j| = 2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Ahora definimos $\mathcal{D}_X(L)$ como programa lineal entero (ILP):

$$\begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{s1} & \cdots & m_{st} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_t \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_s \end{pmatrix}, \qquad x_1, x_2, \dots, x_t \ge 0, \qquad n \ge 1.$$

Como es usual en programación lineal entera, sólo nos interesarán las soluciones de $\mathcal{D}_X(L)$ que sean enteras, así que simplemente diremos que $\mathcal{D}_X(L)$ tiene solución si y sólo si tiene alguna solución entera. Ahora podemos enunciar nuestro teorema principal:

Teorema 2 Sea *L* una gráfica finita y *X* un conjunto admisible de pares, entonces, si $\mathcal{D}_X(L)$ no tiene solución, *L* no tiene extensión finita. Además $\mathcal{D}_{X_F}(L)$ tiene solución si y sólo si *L* tiene extensión finita.

La segunda parte del teorema anterior suena estupenda, pero el problema es que no se sabe si X_F es algorítmicamente computable. Dado que $X_F \subseteq X_{\infty}$, es fácil ver que si $\mathcal{D}_{X_F}(L)$ tiene solución, $\mathcal{D}_{X_{\infty}}(L)$ también la tiene. No sabemos si el recíproco también es verdadero, pero si lo fuera, tendríamos un algoritmo para el PEF:

Teorema 3 Si para toda gráfica finita L se cumple que $\mathcal{D}_{X_F}(L)$ tiene solución siempre que $\mathcal{D}_{X_{\infty}}(L)$ la tenga, entonces existe un algoritmo para el PEF.

Este teorema vale pese a que se sabe (por el Teorema 1, inciso 1) que X_{∞} no es algorítmicamente computable.

- S. Al-Addasi. Some properties of locally homogeneous graphs. An. Ştiinţ. Univ. "Ovidius" Constanţa Ser. Mat. 18 (2010) 15–21.
- [2] A. Blass, F. Harary and Z. Miller. Which trees are link graphs? J. Combin. Theory Ser. B 29 (1980) 277–292.
- [3] A. Blokhuis, A.E. Brouwer, D. Buset and A.M. Cohen. The locally icosahedral graphs. In *Finite geometries (Winnipeg, Man., 1984)*, volume 103 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 19–22. Dekker, New York, 1985.
- [4] A.E. Brouwer, J.H. Koolen and M.H. Klin. A root graph that is locally the line graph of the Petersen graph. Discrete Math. 264 (2003) 13–24. The 2000 Com²MaC Conference on Association Schemes, Codes and Designs (Pohang).
- [5] M. Brown and R. Connelly. On graphs with a constant link. In New directions in the theory of graphs (Proc. Third Ann Arbor Conf., Univ. Michigan, Ann Arbor, Mich., 1971), pages 19–51. Academic Press, New York, 1973.
- [6] M. Brown and R. Connelly. On graphs with a constant link. II. Discrete Math. 11 (1975) 199–232.
- [7] P. Bugata, A. Nagy and R. Vávra. A polynomial time algorithm recognizing link trees. J. Graph Theory 19 (1995) 417–433.
- [8] V.K. Bulitko. On the problem of the finiteness of a graph with given vertex neighborhoods. In General systems theory (Russian), pages 76–83. Akad. Nauk Ukrain. SSR Inst. Kibernet., Kiev, 1972.
- [9] V.K. Bulitko. Graphs with prescribed environments of the vertices. Trudy Mat. Inst. Steklov. 133 (1973) 78–94, 274. Mathematical logic, theory of algorithms and theory of sets (dedicated to P. S. Novikov on the occasion of his seventieth birthday).
- [10] D. Buset. Graphs which are locally a cube. Discrete Math. 46 (1983) 221–226.
- [11] D. Buset. Locally polyhedral graphs. In Finite geometries (Winnipeg, Man., 1984), volume 103 of Lecture Notes in Pure and Appl. Math., pages 23–25. Dekker, New York, 1985.
- [12] D. Buset. Locally C_n^k graphs. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 2 (1995) 481–485.
- [13] B.L. Chilton, R. Gould and A.D. Polimeni. A note on graphs whose neighborhoods are n-cycles. Geometriae Dedicata 3 (1974) 289–294.
- [14] J.I. Hall. Locally Petersen graphs. J. Graph Theory 4 (1980) 173–187.
- [15] J.I. Hall. Graphs with constant link and small degree or order. J. Graph Theory 9 (1985) 419–444.
- [16] J.I. Hall and E.E. Shult. Locally cotriangular graphs. Geom. Dedicata 18 (1985) 113–159.

- [17] P. Hell. Graphs with given neighborhoods. I. In Problèmes combinatoires et théorie des graphes (Colloq. Internat. CNRS, Univ. Orsay, Orsay, 1976), pages 219–223. CNRS, Paris, 1978.
- [18] R. Nedela. Locally homogeneous graphs with dense links at vertices. Czechoslovak Math. J. 42(117) (1992) 515–517.
- [19] R. Nedela. Covering spaces of locally homogeneous graphs. Discrete Math. 121 (1993) 177–188. Graph theory (Niedzica Castle, 1990).
- [20] R. Nedela. Edge-locally homogeneous graphs. Acta Univ. Mathaei Belii Nat. Sci. Ser. Ser. Math. 1 (1993) 27–32.
- [21] R. Nedela. Covering projections of graphs preserving links of vertices and edges. Discrete Math.
 134 (1994) 111–124. Algebraic and topological methods in graph theory (Lake Bled, 1991).
- [22] R. Nedela. Graphs which are edge-locally C_n . Math. Slovaca 47 (1997) 381–391.
- [23] M.A. Ronan. On the second homotopy group of certain simplicial complexes and some combinatorial applications. Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 32 (1981) 225–233.
- [24] J. Tomanová. Amalgamations and link graphs of Cayley graphs. Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.) 60 (1991) 257–267.
- [25] J. Tomanová. A note on link graphs. Math. Slovaca **39** (1989) 225–231.
- [26] P. Vanden Cruyce. A finite graph which is locally a dodecahedron. Discrete Math. 54 (1985) 343–346.
- [27] A. Vince. Locally homogeneous graphs from groups. J. Graph Theory 5 (1981) 417–422.
- [28] W. Vogler. Representing groups by graphs with constant link and hypergraphs. J. Graph Theory 10 (1986) 461–475.
- [29] G.M. Weetman. A construction of locally homogeneous graphs. J. London Math. Soc. (2) 50 (1994) 68–86.
- [30] G.M. Weetman. Diameter bounds for graph extensions. J. London Math. Soc. (2) 50 (1994) 209–221.
- [31] B. Zelinka. The least connected non-vertex-transitive graph with constant neighbourhoods. Czechoslovak Math. J. 40(115) (1990) 619–624.

Desigualdades para la constante de hiperbolicidad de gráficas cúbicas

José M. Sigarreta^{*}

José M. Rodríguez^{**}

Yadira Torres-Nuñez^{***}

Resumen

En este trabajo se obtiene información sobre la constante de hiperbolicidad de gráficas cúbicas. Ellas son una clase interesante de gráficas con muchas aplicaciones y muy importantes en el estudio de la hiperbolicidad en el sentido de Gromov, pues para toda gráfica G con grado máximo acotado existe una gráfica cúbica G^* tal que G es hiperbólica si y sólo si G^* es hiperbólica. En particular, se encuentran algunas caracterizaciones para las gráficas cúbicas con pequeña constante de hiperbolicidad. Además, se prueba que la constante de hiperbolicidad de la gráfica complemento de una gráfica cúbica G sólo alcanza los valores 5/4 y 3/2, excepto para cuando G es isomorfa a K_4 o a $K_{3,3}$.

Palabras Clave. Gráfica cúbica. Gráfica complemento. Gráfica hiperbólica.

1. Introducción

Los espacios hiperbólicos en el sentido de Gromov juega un papel importante en la teoría geométrica de grupos y en la geometría de los espacios curvados negativamente. El concepto de hiperbolicidad en el sentido de Gromov captura la esencia de los espacios con curvatura negativa como los espacios hiperbólicos clásicos: variedades riemanniana completas con curvatura seccional negativa acotada superiormente por una constante negativa, y de espacios discretos como los árboles y las gráficas de Cayley de muchos grupos finitamente generados. Es resaltable que este simple concepto produce a una rica teoría general [8].

Los primeros trabajos sobre los espacios Gromov hiperbólicos están asociados a grupos finitamente generados [8]. Inicialmente, los espacios de Gromov fueron aplicados al estudio de grupos automáticos en la ciencia de la computación (ver, *e.g.*, [7]). El concepto de hiperbolicidad también aparece en matemáticas discretas: algoritmos y redes. Algunos problemas algorítmicos en espacios y gráficas hiperbólicos han sido publicados recientemente (ver, *e.g.*, [10]). Otra importante aplicación de estos espacios está en el estudio de la propagación de virus en Internet y la transmisión segura de información por la red [9].

En el presente trabajo se consideran gráficas simples con aristas de longitud 1, no necesariamente finitas. Además, serán gráficas métricas (G, d) dotadas de la métrica natural d: para cada par de puntos $x, y \in G$ (no necesariamente vértices), d(x, y) es la distancia más corta entre ellos donde la distancia se mide a lo largo de las aristas de G. Se dice que una curva γ en G que une a x e y es una geodésica si la longitud de γ es igual a la distancia entre x e y (*i.e.*, $L(\gamma) = d(x, y)$). La gráfica métrica (G, d) se dice geodésica si para todo par de puntos en G existe una geodésica que los une, se denotará por [xy]a una geodésica que une a x e y; esta notación es ambigua, ya que en general no se tiene la unicidad de las geodésicas, pero será conveniente. Luego, las gráficas usadas en esta comunicación serán métricas geodésicas (por tanto conexas). La arista que une los vértices u y v será denotada por [u, v], y por comodidad, se escribirá G en lugar de (G, d) para referenciar la gráfica métrica geodésica.

Un triángulo geodésico $T = \{x_1, x_2, x_3\}$ es la unión de tres geodésicas $[x_1x_2], [x_2x_3]$ y $[x_3x_1]$ de G. El espacio G es δ -hiperbólico (en el sentido de Gromov) si todo lado de T está contenido en la δ -vecindad de la unión de los otros dos lados, para todo triángulo geodésico T de G. Se denota por $\delta(G)$ a la constante de hiperbolicidad óptima de G, es decir, $\delta(G) := \inf\{\delta \ge 0 : G \text{ es } \delta$ -hiperbólico $\}$.

^{*}Universidad Autónoma de Guerrero, jsmathguerrero@gmail.com

^{**}Universidad Carlos III de Madrid, jomaro@math.uc3m.es

^{****}Humboldt International University, yadiratn830gmail.com

Recientemente se han publicado trabajos que estudian la hiperbolicidad de ciertas clases de gráficas [3, 6, 12]. En particular, las gráficas cúbicas son una clase interesante de gráficas con muchas aplicaciones [4, 5]. El estudio de las gráficas cubicas hiperbólicas comenzó en [12]; en particular, [12, Teorema 3.4] muestra que ellas son muy importantes en el estudio de la hiperbolicidad en el sentido de Gromov: para cualquier gráfica G con grado máximo finito, existe una gráfica cúbica G^* tal que G es hiperbólica si y sólo si G^* lo es.

El objetivo principal de este trabajo es mostrar nuevos resultados sobre la constante de hiperbolicidad de gráficas cúbicas. La Sección 2 muestra algunas caracterizaciones para las gráficas cúbicas con pequeña constante de hiperbolicidad. En la Sección 3 se obtienen cotas para la constante de hiperbolicidad de la gráfica complemento de una gráfica cúbica; el resultado más relevante que se obtiene en este sentido es que la constante de hiperbólicidad de la gráfica complemento de una gráfica cúbica G sólo alcanza los valores 5/4 y 3/2, excepto para cuando G es isomorfa a K_4 o a $K_{3,3}$, mejorando el resultado previo [12, Teorema 4.9]. Para mayor informe sobre este trabajo y detalle de las demostraciones ver [13].

2. Pequeños valores de la constante de hiperbolicidad

Comencemos esta sección con algunas definiciones que serán utilizadas. Por *ciclo* en una gráfica se entenderá una curva simple cerrada, *i.e.*, un camino con vértices diferentes excepto para el primero y el último los cuales coinciden. Si C es un camino en una gráfica G y $w \in V(C)$, se denota por $\deg_C(w)$ el grado del vértice w en la subgráfica inducida por V(C). Por otro lado, se denota por $\dim_G V(G)$ o diam V(G)al diámetro estándar de la gráfica G, *i.e.*, diam $V(G) := \sup\{d_G(x,y) : x, y \in V(G)\}$. Por diam_G G o diam G se denota el diámetro de la gráfica métrica geodésica G, *i.e.*, diam $G := \sup\{d_G(x,y) : x, y \in G\}$. Los siguientes son resultados bien conocidos, para gráficas con longitud de aristas 1 (constante).

Teorema 1 [2, Teorema 2.6] Para toda gráfica hiperbólica G, $\delta(G)$ es un múltiplo entero de 1/4.

Lema 2 [11, Teorema 11] Sea G una gráfica.

- (1) $\delta(G) = 0$ si y sólo si G es un árbol.
- (2) $\delta(G) = 1/4, 1/2$ no se satisface.
- (3) $\delta(G) = 3k/4$ si y sólo si G no es un árbol y todo ciclo en G tiene longitud 3.

Recordemos que un *ciclo hamiltoniano*, es un ciclo que pasa una y solo una vez por todos los vértices de una gráfica. El siguiente resultado es una versión débil de [1, Teorema 4.10] adaptado a gráficas cúbicas. Para detalles de la demostración ver [13].

Proposición 3 Sea G una gráfica cúbica. Entonces $\delta(G) = 1$ si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

- (1) Existe en G un ciclo isomorfo a C_4 .
- (2) Todo ciclo en G con longitud mayor a 4 es hamiltoniano.

Corolario 4 Sea G una gráfica cúbica. Entonces $\delta(G) = 1$ si y sólo si se tiene una de las siguiente:

- (1) G es isomorfa a K_4 o a $K_{3,3}$.
- (2) G es infinita tal que todo ciclo en G tiene longitud a lo sumo 4 y existe un ciclo con longitud 4.

Proposición 5 [1, Proposición 4.12] Sea G una gráfica. Si $\delta(G) \ge 3/2$, entonces existe un ciclo g en G con diam $g \ge 3k$.

El recíproco de la Proposición 5 no se cumple, la Figura 1 muestra una gráfica cúbica H con un ciclo C tal que diam C = 3, pero $\delta(H) = 5/4 < 3/2$. El siguiente resultado es una variante de su recíproco.

Proposición 6 Sea G una gráfica cúbica. Si existe un ciclo g en G tal que diam $V(g) \ge 3$, entonces $\delta(G) \ge 3/2$.



Figura 1: Gráfica cúbica $H \operatorname{con} \delta(H) = 5/4$ y un ciclo C tal que diam C = 3.

Demostración. La prueba se basa en la existencia de un ciclo σ con características favorables y a partir de σ construir un triángulo geodésico T tal que $\delta(T) \geq 3/2$. La demostración se apoya en una casuística en la longitud de σ . Para obtener detalles de la prueba ver [13].

Se define la *circunferencia* c(G) de una gráfica G como el supremo de las longitudes de sus ciclos si G no es un árbol; se define c(G) = 0 si G es un árbol. El siguiente resultado porporciona una fórmula sencilla y explícita de la constante de hiperbolicidad de una larga clase de gráficas cúbicas.

Teorema 7 Si G es una gráfica cúbica tal que $c(G) \leq 5$, entonces $\delta(G) = c(G)/4$.

Demostración. La cota superior se tiene directamente por [6, Proposición 3.9], *i.e.*, $\delta(G) \leq c(G)/4$ (con *G* cualquier gráfica no necesariamente cúbica). La cota inferior se obtiene por el Lema 2 para $c(G) \leq 3$ y en [13] por lemas separados asociados a $c(G) \in \{4, 5\}$.

Note que el resultado anterior no es válido para c(G) = 6, ya que $c(K_{3,3}) = 6$ y $\delta(K_{3,3}) = 1$.

Teorema 8 Sea G una gráfica cúbica. Asuma que se cumplen las siguientes condiciones:

- (1) Para todo ciclo γ en G se tiene diam $\gamma \leq 3$.
- (2) Existe un ciclo g tal que diam $V(g) \ge 3$.

Entonces se tiene $\delta(G) = 3/2$.

Demostración. Por (2) y la Proposición 6, se tiene $\delta(G) \ge 3k/2$. Para todo triángulo geodésico T que es un ciclo, usando (1), se tiene $d_G(x, y) \le 3$ para todo $x, y \in T$ y, en consecuencia, $\delta(T) \le 3/2$. El resultado sigue de [14, Lemma 2.1] (es suficiente analizar triángulos geodésicos que constituyan ciclos).

3. Complemento de una gráfica cúbica

El artículo [3] estudia la hiperbolicidad de la gráfica complemento. En esta sección, se obtienen nuevos resultados para esta operación sobre gráficas cúbicas. Dada una gráfica cúbica finita G, denotamos por \overline{G} su gráfica complemento. Si \overline{G} es disconexa con componentes conexas $\overline{G}_1, \ldots, \overline{G}_r$ $(r \ge 2)$, definimos

 $\delta(\overline{G}) := \max\left\{\delta(\overline{G}_1), \dots, \delta(\overline{G}_r)\right\}, \qquad \operatorname{diam} \overline{G} := \max\left\{\operatorname{diam} \overline{G}_1, \dots, \operatorname{diam} \overline{G}_r\right\}.$

El resultado principal de esta sección es el Teorema 14. Dado que la demostración del teorema es bastante extensa, y para hacer más transparentes los argumentos, se coleccionan varios resultados en lemas técnicos. Las demostraciones de cada uno de los lemas utilizan argumentos independientes con técnicas habituales de hiperbolicidad y de combinatoria, para detalles de las pruebas se referencia [13, Sección 3].

Lema 9 Dada una gráfica cúbica finita G, se tiene $\delta(\overline{G}) \leq 3/2$.

Lema 10 Si G es una gráfica (n-4)-regular con orden $n \ge 6$, entonces $1 \le \delta(G) \le 3/2$.

Lema 11 Sea G una gráfica (n-4)-regular con orden $n \ge 6$. Entonces, $\delta(G) = 1$ si y sólo si diam G = 2.

Lema 12 Dada una gráfica cúbica finita G la cual es no isomorfa a $\overline{C_6}$, se tiene diam_{\overline{G}} $V(\overline{G}) \leq 2$. Además, si G tiene orden $n \geq 8$, entonces diam_{\overline{G}} $V(\overline{G}) = 2$.

Lema 13 Si G es una gráfica cúbica finita no isomorfa a K_4 ó a $K_{3,3}$, entonces diam $\overline{G} \geq 5/2$.

El siguiente resultado afirma que la constante de hiperbolicidad del complemento de (casi) toda gráfica cúbica finita toma sólo los valores 5/4 y 3/2. El mismo sigue de los lemas previos.

Teorema 14 Toda gráfica cúbica finita G no isomorfa a K_4 ó a $K_{3,3}$, verifica que $5/4 \le \delta(\overline{G}) \le 3/2$.

Finalmente, se encuentran condiciones suficientes para garantizar que la constante de hiperbolicidad de $\delta(\overline{G})$ es igual a 5/4 o a 3/2. Las demostraciones de los siguientes resultados aparecen en [13].

Teorema 15 Si G es una gráfica finita cúbica con orden n > 4 y no contiene una subgráfica inducida isomorfa a un ciclo C_4 , entonces diam $\overline{G} = 5/2$ y $\delta(\overline{G}) = 5/4$.

Teorema 16 Sea G una gráfica cúbica finita. Si existe una subgráfica inducida C en \overline{G} isomorfa a un ciclo C_6 con diam $_{\overline{G}}C = 3$, entonces $\delta(\overline{G}) = 3/2$.

- [1] Bermudo, S., Rodríguez, J. M. and Sigarreta, J. M.: Small values of the hyperbolicity constant in graphs, Submitted. Preprint in http://gama.uc3m.es/index.php/jomaro.html
- Bermudo, S., Rodríguez, J. M. and Sigarreta, J. M.: Computing the hyperbolicity constant, Comput. Math. Appl. 62 (2011), 4592–4595.
- [3] Bermudo, S., Rodríguez, J. M., Sigarreta, J. M. and Tourís, E.: Hyperbolicity and complement of graphs, Appl. Math. Letters 24 (2011), 1882–1887.
- [4] Bowers, P. L.: Negatively curved graph and planar metrics with applications to type, Michigan Math. J. 45 (1998), 31–53.
- [5] Buser, P.: Cubic graphs and the first eigenvalue of a Riemann surface, Math. Z. 162 (1978), 87–99.
- [6] Carballosa, W., Rodríguez, J. M., Sigarreta, J. M. and Villeta, M.: Gromov hyperbolicity of line graphs, Electr. J. Comb. 18(1) (2011), P210.
- [7] Charney, R.: Artin groups of finite type are biautomatic, Math. Ann. 292 (1992), 671–683.
- [8] Gromov, M.: Hyperbolic groups, in Essays in group theory. Edited by S. M. Gersten, M. S. R. I. Publ. 8, Springer 1987, 75–263.
- [9] Jonckheere, E. A. and Lohsoonthorn, P.: Geometry of network security, Amer. Control Conf. ACC (2004), 111–151.
- [10] Krauthgamer, R. and Lee, J. R.: Algorithms on negatively curved spaces, FOCS 2006.
- [11] Michel, J., Rodríguez, J. M., Sigarreta, J. M. and Villeta, M.: Hyperbolicity and parameters of graphs, Ars Comb. 100 (2011), 43–63.
- [12] Pestana, D., Rodríguez, J. M., Sigarreta, J. M. and Villeta, M.: Gromov hyperbolic cubic graphs, Central Europ. J. Math. 10(3) (2012), 1141-1151.
- [13] Rodríguez, J. M., Sigarreta, J. M., Torres-Nuñez Y.: Computing the hyperbolicity constant of a cubic graph, Int. J. Comput. Math. 9(91) (2014), 1897–1910.
- [14] Rodríguez, J. M. and Tourís, E.: Gromov hyperbolicity through decomposition of metric spaces, Acta Math. Hung. 103 (2004), 53–84.

Total dominación en el producto cartesiano de gráficas

Sergio Bermudo^{*}

Walter Carballosa^{**}

José M. Sigarreta^{***}

Resumen

Sea G = (V, E) una gráfica. Un conjunto $S \subseteq V(G)$ es un conjunto de k-dominación total de G si todo vértice $v \in V(G)$ tiene al menos k vértices adyacentes en S. El número de k-dominación total $\gamma_{kt}(G)$ es la mínima cardinalidad entre todos los conjuntos de k-dominación total. En el presente trabajo se obtienen cotas para el número de 2-dominación total del producto cartesiano de gráficas, las cuales se alcanzan. En particular, se obtienen valores exactos del número de 2-dominación total del producto cartesiano de gráficas completas.

Palabras Clave. Gráfica. Total dominación. Producto cartesiano.

1. Introducción

En la presente comunicación se establece la siguiente notación y terminología. G = (V, E) denota una gráfica simple de orden n = |V| y tamaño m = |E|. Si u y v son dos vértices adyacentes en G, se denotará $u \sim v$. Para un vértice $u \in V$ se denota $N(v) = \{u \in V : u \sim v\}$ y $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. El grado de un vértice $v \in V$ será denotado por d(v) = |N(v)|. Se denota por δ y Δ el mínimo y máximo grado de la gráfica, respectivamente. Dado un subconjunto no vacío $S \subseteq V$, y un vértice $v \in V$, se denota por $N_S(v)$ el conjunto de vecinos que v tiene en S, o sea $N_S(v) := \{u \in S : u \sim v\}$ y $d_S(v) = |N_S(v)|$.

Dado una gráfica G = (V, E), un conjunto $S \subseteq V$ es un conjunto k-dominante si todo vértice $v \in V \setminus S$ satisface $d_S(v) \geq k$. El número de k-dominación $\gamma_k(G)$ es la mínima cardinalidad entre todos los conjuntos k-dominantes. Un conjunto $S \subseteq V$ es un conjunto k-dominante total si todo vértice $v \in V$ satisface que $d_S(v) \geq k$. En tales casos, es necesario tener $k \leq \delta y |S| \geq k+1$. El número de k-dominación total $\gamma_{kt}(G)$ es la mínima cardinalidad entre los conjuntos k-dominantes total.

La noción de dominación total en gráficas fue introducida por Cockayne, Dawes y Hedetniemi en [1]. El problema abierto más famoso que incluye la dominación en gráficas es la conjetura de Vizing [6], la cual plantea que el número de dominación del producto cartesiano de cualesquiera dos gráficas es mayor o igual que el producto de sus números de dominación. La dominación y sus variantes en gráficas se siguen estudiando; se sugiere ver [1, 2, 3, 4, 5, 6] y sus referencias.

2. El número de 2-dominación total para el producto cartesiano

Sean G_1, G_2 dos gráficas de órdenes respectivos n, m. Ya que $G_1 \square G_2 \subseteq K_n \square K_m$, se tiene una cota inferior natural para $\gamma_{kt}(G_1 \square G_2)$ en $\gamma_{kt}(K_n \square K_m)$ para $k \ge 1$ (*i.e.*, $\gamma_{kt}(G_1 \square G_2) \ge \gamma_{kt}(K_n \square K_m)$). En esta sección se encuentra el valor exacto para $\gamma_{2t}(K_n \square K_n)$ y desigualdades que involucran a $\gamma_{2t}(K_n \square K_m)$, por lo cual se centrará el trabajo en estudiar el número de 2-dominación total para el producto cartesiano de gráficas completas.

Lema 1 Para todos $n, m \ge 2$ se tiene

$$\min\{n, m\} + 2 \le \gamma_{2t}(K_n \Box K_m) \le 2\min\{n, m\}.$$
(1)

Además, si $n, m \geq 3$ se tiene

$$\gamma_{2t}(K_n \Box K_m) \le n + m - 1. \tag{2}$$

^{*}Universidad Pablo de Olavide, sbernav@upo.es

^{**}CONACYT & Universidad Autónoma de Zacatecas, wcarballosato@conacyt.mx

^{****}Universidad Autónoma de Guerrero, jsmathguerrero@gmail.com

Demostración. Sin pérdida de la generalidad suponga que $n \leq m$. Para obtener la primera desigualdad considere $S \subset V(K_n \Box K_m)$ un conjunto 2-dominante total de $K_n \Box K_m$. Dado que $d_{K_n \Box K_m}(v) = n + m - 2$ para todo $v \in S$ y $d_S(u) \geq 2$ para todo $u \in V(K_n \Box K_m)$, se tiene $|S|(n + m - 2) \geq 2 nm$. Por tanto,

$$|S| \ge \left\lceil \frac{2\,nm}{n+m-2} \right\rceil = n+1 + \left\lceil \frac{(n-1)(m-n)+2}{n+m-2} \right\rceil \ge n+2.$$

Para concluir la primera parte es suficiente escoger $S := V(K_n) \times \{w_1, w_2\}$ para $w_1, w_2 \in V(K_m)$ y $w_1 \neq w_2$.

Además, si $v \in V(K_n)$, $w \in V(K_m)$ y se toma $S = (v \times V(K_m)) \cup (V(K_n) \times \{w\})$ para mín $\{n, m\} \ge 3$, entonces se tiene que S es un conjunto 2-dominante total para $K_n \Box K_m$, por tanto, $\gamma_{2t}(K_n \Box K_m) \le n + m - 1$.

Note que por el Lema 1 se tiene $\gamma_{2t}(K_2 \Box K_m) = 4$ para todo $m \ge 2$. Por otro lado, nuestro problema de estudio tiene un enunciado equivalente en tableros que por comodidad será utilizado en lo que sigue del trabajo.

Problema 2 Considere un tablero de $n \times m$ con $3 \le n \le m$ y coloque q fichas en q casillas distintas del tablero. Cada casilla ve las fichas que están ubicadas en su columna y en su fila, sin ver una posible ficha en ella misma. Determine la cantidad mínima para q de modo que cada casilla vea al menos dos fichas.

Lema 3 En las distribuciones mínimas del Problema 2 con $\gamma_{2t}(K_n \Box K_m) < 2n$ no puede haber ninguna fila o columna sin fichas.

Demostración. Note que si hubiera alguna fila (columna) sin fichas, como sus casillas deben ver al menos 2, se tiene que cada columna (fila) tendría al menos 2 fichas y por tanto $\gamma_{2t}(K_n \Box K_m) \ge 2n$. \Box

Lema 4 En las distribuciones mínimas del Problema 2 con $\gamma_{2t}(K_n \Box K_m) < 2n$ hay al menos un fila (columna) con 3 fichas.

Demostración. Dado que $\gamma_{2t}(K_n \Box K_m) < 2n$, por el Lema 1 se tiene que existe al menos una columna (fila) con exactamente 1 ficha. Luego, dicha casilla ve al menos 2 fichas y por tanto su fila (columna) tiene al menos 3 fichas.

En lo sucesivo, cuando sea conveniente, se denota $V(K_n) := \{v_1 \dots, v_n\}$ y $V(K_m) := \{w_1 \dots, w_m\}$. Ahora se presta especial atención al caso diagonal n = m, o sea, se calcula $\gamma_{2t}(K_n \Box K_n)$.

Proposición 5 Se tiene $\gamma_{2t}(K_2 \Box K_2) = 4$, $\gamma_{2t}(K_3 \Box K_3) = 5$, $\gamma_{2t}(K_4 \Box K_4) = 6$ y $\gamma_{2t}(K_5 \Box K_5) = 8$.

Demostración. La Figura 1 muestra una configuración 2-dominante total de $K_n \Box K_n$ para n = 2, 3, 4, 5. Luego, por el Lema 1 se tiene $\gamma_{2t}(K_2 \Box K_2) = 4$, $\gamma_{2t}(K_3 \Box K_3) = 5$ y $\gamma_{2t}(K_4 \Box K_4) = 6$; además, se tiene $\gamma_{2t}(K_5 \Box K_5) \leq 8$.

Suponga que se tiene una configuración 2-dominante total para n = 5 con menos de 8 vértices. Por Lema 4 hay una fila y una columna con al menos 3 fichas. Sin pérdida de la generalidad suponga que sean Fila 1 y Columna 1. Entonces se tienen dos casos, tal como se ilustran en la Figura 2, los cuales conducen a una contradicción de forma inmediata y se sigue que $\gamma_{2t}(K_5 \Box K_5) = 8$.

Teorema 6 Para todo $6 \le n \le m$, si $\gamma_{2t}(K_n \Box K_m) < 2n$ se tiene

$$\gamma_{2t}(K_n \Box K_m) \ge \min\{\gamma_{2t}(K_3 \Box K_3) + T\gamma_{2t}(K_{n-3} \Box K_{m-3}), \gamma_{2t}(K_4 \Box K_4) + T\gamma_{2t}(K_{n-4} \Box K_{m-4})\}.$$
126



Figura 1: Configuraciones mínimas de 2-dominación total para n = 3, 4, 5, 6.



Figura 2: Configuraciones auxiliares para el Problema 2.

Demostración. Fije n, m y considere S un conjunto mínimo 2-dominante total de $K_n \Box K_m$. Por el Lema 4 se tiene que existen $1 \le i \le n$ y $1 \le j \le m$ tales que la Fila i y la Columna j tienen al menos 3 fichas. Sin pérdida de generalidad se puede asumir que i = j = 1.

Por tanto, se tienen los casos de configuraciones como en la Figura 2, los cuales se analizan por separado obteniendo $\gamma_{2t}(K_n \Box K_m) \geq \gamma_{2t}(K_3 \Box K_3) + T\gamma_{2t}(K_{n-3} \Box K_{m-3})$ y $\gamma_{2t}(K_n \Box K_m) \geq \gamma_{2t}(K_4 \Box K_4) + T\gamma_{2t}(K_{n-4} \Box K_{m-4})$, respectivamente. En cada caso la idea de trabajo es probar que con las fichas que se tienen fuera del subcuadrado de 3×3 (respectivamente 4×4) se puede cubrir el subtablero complementario de $(n-3) \times (m-3)$ (respectivamente $(n-4) \times (m-4)$) como un conjunto de 2-dominación total. Esto se consigue utilizando los Lemas 1 y 3, siendo necesario en algunos casos mover de forma adecuada las fichas fueras de los dos bloques en diagonal al subtablero complementario.

Teorema 7 Para todo $n \ge 2$ se tiene

$$\gamma_{2t}(K_n \Box K_n) = \begin{cases} (3n)/2, & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ (3n+1)/2, & \text{si } n \equiv 1 \pmod{2}, \\ (3n+2)/2, & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases}$$
(3)

Demostración. Primero note que al colocar por bloques en diagonal la configuración de tamaño congruente con n módulo 4 de la Figura 1 seguido de tantas de 4 × 4 como sea necesario para completar el orden $n \times n$, se obtienen configuraciones 2-dominante total; por tanto, se tiene la primera desigualdad (\leq). Para completar la prueba se procede por inducción completa en k cuando n = 4k + r con $r \in \{-2, -1, 0, 1\}$. Por Proposición 5 se tiene la igualdad para k = 1 y el resultado sigue por el Teorema 6.

Corolario 8 Para todo $n \ge 3$ se tiene

$$\gamma_{2t}(K_n \Box K_{n+1}) = \gamma_{2t}(K_n \Box K_n) + 1.$$
(4)

127

Demostración. El procedimiento es análogo al del Teorema 9. Se puede comprobar que $\gamma_{2t}(K_3 \Box K_4) = 6$, $\gamma_{2t}(K_4 \Box K_5) = 7$, $\gamma_{2t}(K_5 \Box K_6) = 9$ y $\gamma_{2t}(K_6 \Box K_7) = 11$, luego el resultado sigue por el Teorema 6. \Box

Finalmente, se pueden obtener cotas para la 2-dominación total del producto cartesiano de gráficas completas.

Teorema 9 Para todo $2 \le n \le m$ se tiene

$$\gamma_{2t}(K_n \Box K_n) \le \gamma_{2t}(K_n \Box K_m) \le \min\{2n, \gamma_{2t}(K_n \Box K_n) + m - n\}.$$

Demostración. Es suficiente probar que $\gamma_{2t}(K_n \Box K_m) \leq \gamma_{2t}(K_n \Box K_{m+1}) \leq \gamma_{2t}(K_n \Box K_m) + 1$. Para probar $\gamma_{2t}(K_n \Box K_m) \leq \gamma_{2t}(K_n \Box K_{m+1})$ considere S' un conjunto 2-dominante total mínimo de $K_n \Box K_{m+1}$. Note que si $\gamma_{2t}(K_n \Box K_{m+1}) = 2n$ entonces por Lema 1 se tiene esta desigualdad. Suponga ahora que $\gamma_{2t}(K_n \Box K_{m+1}) < 2n$. Por esta suposición y el Lema 3 se tiene un vértice $(v_i, w_j) \in S'$ tal que la columna j tiene sólo una ficha y por tanto la fila i tiene al menos 3 fichas. Note que si se mueve la ficha en (v_i, v_j) a cualquier casilla vacía de la fila i y se borra la columna j, se obtiene un conjunto 2-dominante total S para $K_n \Box K_m$. Entonces se obtiene $\gamma_{2t}(K_n \Box K_m) \leq \gamma_{2t}(K_n \Box K_{m+1})$.

Para probar $\gamma_{2t}(K_n \Box K_{m+1}) \leq \gamma_{2t}(K_n \Box K_m) + 1$ considere un conjunto 2-dominante total mínimo S de $K_n \Box K_m$. Note que si $\gamma_{2t}(K_n \Box K_m) = 2n$ entonces $\gamma_{2t}(K_n \Box K_{m+1}) = 2n$. Finalmente, por Lema 4 exite una fila *i* con al menos 3 fichas, por tanto, si se agrega una columna final (se agrega un vértice w_{m+1} a K_m) y se coloca una ficha en (v_i, w_{m+1}) se obtiene un conjunto 2-dominante total para $K_n \Box K_{m+1}$. \Box

Intuitivamente se puede pensar que al tener el valor exacto de $\gamma_{2t}(K_n \Box K_n)$ y siguiendo procedimientos similares a los del presente trabajo, se puede obtener la igualdad $\gamma_{2t}(K_n \Box K_m) = \min\{2n, \gamma_{2t}(K_n \Box K_n) + m - n\}$ pero esto es falso pues $\gamma_{2t}(K_5 \Box K_6) = \gamma_{2t}(K_5 \Box K_7) = 9.$

- Cockayne, E. J., Dawes, R. M., Hedetniemi, S. T.: Total domination in Graphs, Networks 10 (1980), 211–219.
- Hansberg, A., Pepper, R.: On k-domination and j-independence in graphs, Discrete Appl. Math. 161 (10–11) (2013), 1472–1480.
- [3] Haynes, T. W., Hedetniemi, S. T. Slater, P. J. (eds).: Domination in Graphs: Advanced Topics, New York: Marcel Dekker 1998.
- [4] Henning, M. A.: A survey of selected recent results on total domination in graphs, Discrete Math. 309 (1) (2009), 32–63.
- [5] Li, N., Hou, X.: On the total k-domination number of Cartesian products of graphs, J. Combin. Optim. 18 (2) (2009), 173–178.
- [6] Vizing, V. G.,: Some unsolved problems in graph theory, Uspehi Mat. Naukno. (en Ruso) 23(6) (1968), 117–138.

Digráficas *H***-pancromáticas**

Hortensia Galeana Sánchez*

Rocío Rojas Monroy[†]

Resumen

Dada una digráfica D podemos considerar un conjunto de vértices absorbente e independiente donde cada una de estas dos características depende, de algún modo, de otra digráfica H. A este conjunto le llamamos núcleo por H-trayectorias. En este trabajo mostramos algunos tipos de digráficas que siempre tienen este tipo de núcleo para cualquier H; a estas digráficas las llamamos H-pancromáticas.

Palabras Clave. Núcleo. H-trayectoria. Digráfica H-pancromática. Digráfica quasitransitiva.

1 Introducción

Si D una digráfica, V(D) denotará el conjunto de vértices de D y F(D) el conjunto de sus flechas.

Definición 1 Un conjunto K de vértices de una digráfica D es un núcleo si satisface las siguientes condiciones:

- 1. Para cualquier vértice $x \in V(D) K$ existe un vértice $y \in K$ tal que $(x, y) \in F(D)$ (K es absorbente), y
- 2. Para cualesquiera dos vértices de K no existen flechas entre ellos (K es independiente).

El concepto de núcleo fue introducido por J. Von Neumann y Morgenstern [7] en el área de Teoría de Juegos. Existen varias generalizaciones del concepto de núcleo, tales como núcleo por trayectorias monocromáticas [3] y núcleo por H-caminos [1].

Definición 2 Decimos que una digráfica está *m*-coloreada si sus flechas han sido coloreadas con *m* colores, es decir existe una función de F(D) a un conjunto con *m* elementos llamados colores.

Una digráfica es monocromática si todas sus flechas son del mismo color.

Definición 3 Sea D una digráfica m-coloreada. Un conjunto K de vértices de D es un núcleo por trayectorias monocromáticas si satisface las siguientes condiciones:

- 1. Para cualquier vértice $x \in V(D) K$ existe una trayectoria dirigida monocromática desde x hacia algún vértice $y \in K$ (K es absorbente por trayectorias monocromáticas), y
- 2. Para cualesquiera dos vértices de K no existen trayectorias monocromáticas entre ellos (K es independiente por trayectorias monocromáticas).

Definición 4 Sean D y H dos digráficas. Una H-coloración de D es una coloración de las flechas de D donde el conjunto de colores es V(H), es decir es una función $c : F(D) \longrightarrow V(H)$.

En lo que resta de esta sección, $D \ge H$ son dos digráficas tales que D es una digráfica H-coloreada.

^{*}Instituto de Matemáticas, UNAM, hgaleana@matem.unam.mx

[†]Facultad de Ciencias, UAEM, mrrm@uaemex.mx

Definición 5 Si c es una H-coloración de D, entonces una trayectoria W en D es una H-trayectoria si la sucesión de colores usados en la flechas de W es un camino dirigido en H; es decir, si $W = (u_0, u_1, ..., u_n)$ entonces $(c(u_0, u_1), c(u_1, u_2), ..., c(u_i, u_{i+1}), ..., c(u_{n-1}, u_n))$ es un camino dirigido en H.

Definición 6 Un conjunto $S \subset V(D)$ es independiente por H-trayectorias, si cualesquiera dos vértices de S no están conectados en D por una H-trayectoria.

Definición 7 Un conjunto $S \subset V(D)$ es absorbente por H-trayectorias, si para cualquier vértice x de V(D) - S existe en D una H-trayectoria desde x hacia algún vértice en S.

Definición 8 Un conjunto $S \subset V(D)$ es un núcleo por H-trayectorias si es independiente por H-trayectorias y absorbente por H-trayectorias.

Un núcleo y un núcleo por trayectorias monocromáticas son casos particulares de núcleo por H-trayectorias. Si H satisface que $F(H) = \emptyset$, entonces un conjunto de vértices de D es un núcleo por H-trayectorias si y sólo si es un núcleo. Y si $F(H) = \{(u, u); u \in V(H)\}$ entonces un conjunto de vértices de D es un núcleo por H-trayectorias si y sólo si es un núcleo por H-trayectorias si y sólo si es un núcleo.

En este trabajo introducimos el concepto de digráfica H-pancromática, esto es una digráfica tal que para toda digráfica H y toda H-coloración tiene núcleo por H-trayectorias. Asimismo presentamos diferentes tipos de digráficas que son H-pancromáticas. En particular analizamos una operación aplicada a digráficas quasitransitivas que generan este tipo de digráficas.

2 Digráficas *H*-pancromáticas

Una flecha (u, v) de una digráfica D es llamada simétrica si $(v, u) \in F(D)$. Una digráfica D es llamada simétrica si todas sus flechas son simétricas. Una digráfica D is acíclica si D no contiene ciclos dirigidos. Una digráfica D es transitiva si $\{(u, v), (v, w)\} \subseteq F(D)$ implica $(u, w) \in F(D)$. Una generalización del concepto de digráfica transitiva es el de digráfica quasitransitiva; una digráfica es quasitransitiva si $\{(u, v), (v, w)\} \subseteq F(D)$ implica $(u, w) \in F(D)$ o $(w, u) \in F(D)$. Este concepto fue introducido por Ghouilà-Houri [4] y ha sido estudiado por varios autores como Bang-Jensen y Huang [2]. Las digráficas quasitransitivas están estrechamente relacionadas con las gráficas perfectas.

Si D es una digráfica infinita, una trayectoria infinita exterior es una sucesión infinita $(x_1, x_2, ...)$ de vértices distintos de D tales que $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$ para cada i.

Definición 9 Decimos que una digráfica D es H-pancromática si para cualquier digráfica H y toda H-coloración de D, D tiene núcleo por H-trayectorias.

En Teoría de Núcleos, una digráfica es núcleo perfecta si toda subdigráfica inducida tiene núcleo. Hay varios tipos de digráficas que son núcleo perfectas, tales como las digráficas simétricas, digráficas transitivas [5], digráficas acíclicas [7], digráficas bipartitas [6], digráficas sin ciclos de longitud impar [8, 6]. Así, es natural pensar que este tipo de digráficas sean H-pancromáticas. De acuerdo a lo anterior tenemos los Teoremas 1 y 2.

Teorema 1 Sea D una digráfica posiblemente infinita. Supongamos que D es transitiva y que no contiene trayectorias infinitas exteriores, entonces D es H-pancromática.

Teorema 2 Sea D una digráfica posiblemente infinita. Supongamos que D es acíclica y que no contiene trayectorias infinitas exteriores, entonces D es H-pancromática.

Observación 1 Existen digráficas simétricas así como bipartitas que no son H-pancromáticas.

Note que no es posible caracterizar a las digráficas H-pancromáticas mediante la prohibición de ciertos tipos de digráficas, ya que toda digráfica puede ser subdigráfica inducida de una digráfica H-pancromática. Por ejemplo, sea D una digráfica, y sea D' la digráfica que es obtenida a partir de D añadiendo un nuevo vértice w y todas las posibles flechas desde los vértices de D hacia w; D' es una digráfica H-pancromática y D es una subdigráfica inducida de D'.

3 El resultado principal

Sean D_0, D_1, \ldots, D_n digráficas y supongamos que z_1, \ldots, z_n son los vértices de D_0 . $D_0[D_1, \ldots, D_n]$ denota la digráfica tal que $V(D_0[D_1, \ldots, D_n]) = \bigcup_{i=1}^n V(D_i)$, y $(u, v) \in F(D_0[D_1, \ldots, D_n])$ si y sólo si se satisface una de las condiciones siguientes: (a) $\{u, v\} \subseteq V(D_i)$ para alguna i, y $(u, v) \in F(D_i)$; (b) $u \in V(D_i), v \in V(D_j)$ para algunas $i \neq j$, y $(z_i, z_j) \in F(D_0)$.

Nuestro resultado principal es el Teorema 3 el cual da condiciones suficientes para que una digráfica de la forma $D_0[D_1, \ldots, D_n]$ sea H-pancromática, donde D_0 es una digráfica quasitransitiva.

Teorema 3 Sea D_0 una digráfica quasitransitiva con vértices z_1, z_2, \ldots, z_n , y supongamos que $N_0 = \{z_1, z_2, \ldots, z_r\}$ es un núcleo de D_0 . Considere D_1, D_2, \ldots, D_n digráficas tales que D_1, \ldots, D_r son H-pancromáticas. Supongamos además, que si una flecha simétrica de D_0 incide en un vértice z_i con $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, entonces para cada digráfica H y cada H-coloración de D_i existe un núcleo por H-trayectorias de D_i que consiste de un único elemento. Entonces, $D = D_0[D_1, D_2, \ldots, D_n]$ es H-pancromática.

Corolario 4 Si D es una digráfica quasitransitiva y tiene núcleo, entonces D es H-pancromática.

- Arpin, P., Linek, V.: Reachability problems in edge colored digraphs, Discrete Math. 307 (2007), 2276 – 2289.
- [2] Bang-Jensen, J., Huang, J.: Quasi-transitive Digraphs, Journal of Graph Theory 20 (1995), 141–161.
- Galeana-Sánchez, H.: On monochromatic paths and monochromatic cycles in edge coloured tournaments, Discrete Math. 156 (1996), 103–112.
- [4] Ghouilà-Houri, A.: Caracterérisation des graphes non orientés dont on peut orienter les arrêtes de maniere à obtenir le graphe d'un relation d'ordre, C.R. Acad. Sci. Paris 254 (1962), 1370–1371.
- [5] König, D.: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Reprinted from Chelsea Publishing Company, New York 1950.
- [6] Neumann-Lara, V.: Seminúcleos de una digráfica, Anales del Instituto de Matemáticas II (1971),
- [7] Von Neumann, J., Morgenstern, O.: Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press, Princeton, NJ 1944.
- [8] Richardson, R.: Solutions of irreflexive relations, Ann Math. 58 (1953), 573.

Una caracterización combinatoria de triangulaciones del disco.

Edgar Morales Avalos*

Natalia García–Colín †

Resumen

En este trabajo mostraremos que las triangulaciones finitas del disco se caracterizan por su matriz de intersección.

Palabras Clave. Triangulación. Superficie. Matriz de Intersección.

1 Introducción.

Uno de los resultados más interesantes y sorprendentes de la teoría de los politopos convexos dice que la matriz de adjacencias de dimensión d-2 de un d-politopo convexo y simplicial determina por completo su estructura combinatoria. Este fenómeno no es cierto en general [2, 3].

Inspirados por el resultado anterior, Arocha et.al. [1] demostraron que una triangulación finita de una superficie conexa y sin frontera está completamente determinada por su matriz de intersección.

El propósito de este trabajo es dar una caracterización combinatoria del disco finitamente triangulado a partir de su matriz de intersección y con este resultado, motivar al estudio de generalizaciones para algunas otras superficies.

2 Preliminares.

Definición 1 Dada una una superficie C, triangulada por n triángulos etiquetados $\{t_1, \ldots, t_n\}$, su matriz de intersección, M_C , se define como la matriz que tiene en cada una de sus entradas $|t_i \cap t_j| = a_{i,j}$, con $1 \le i, j \le n$.

2.1 Lema de las Semirruedas.

Definición 2 Llamaremos n - semirrueda a la triangulación S_n que consta de n triángulos y de n + 2 vértices $\{v_0, v_1, ..., v_{n+1}\}$ donde $n \ge 3$, y cada triángulo t_i tiene por vértices $\{v_0, v_i, v_{i+1}\}$ con $1 \le i \le n$.

Lema 1 Si T es una triangulación finita con matriz de intersección M_T tal que $M_T = M_{S_n}$ para alguna semirrueda S_n , entonces dependiendo de n, T es alguna de las siguientes triangulaciones:

- (a) Si $M_T = M_{S_3}$ entonces T es una 3 semirrueda.
- (b) Si $M_T = S_j \text{ con } 4 \le j \le 6$, entonces T es una j semirrueda o una j arracada. (Figura 1)
- (c) Si $M_T = S_j$ con $j \ge 7$ entonces T es una j semirrueda.

2.2 Lema de las Ruedas.

Definición 3 Llamaremos *n*-rueda a la triangulación R_n que consta de *n* triángulos y de n+1 vértices: $\{v_0, v_1, v_2, ..., v_n\}$, donde $n \ge 3$ y tal que cada triángulo t_i tiene por vértices $\{v_0, v_i, v_{i+1}\}$ si $1 \le i \le n-1$ y el triángulo t_n tiene por vértices $\{v_0, v_n, v_1\}$.

^{*}Facultad de Ciencias, UNAM, eddy_edgar22@hotmail.com

 $^{^\}dagger INFOTEC,$ Centro de Investigación e Innovación en Tecnologias de la Información y Comunicación, natalia.garcia@infotec.com.mx



Figura 1: De izquierda a derecha S_4 , S_5 y S_6 con sus respectivas arracadas.

Lema 2 Si T es una triangulación finita con matriz de intersección M_T tal que $M_T = M_{R_n}$, entonces dependiendo de n, T es alguna de las siguientes triangulaciones:

(a) Si $M_T = R_3$ entonces T es una 3 - rueda o un 3-libro. (Figura 2)



Figura 2: R_3 y el 3-libro.

- (b) Si $M_T = R_4$ entonces T es una 4 rueda.
- (c) Si $M_T = R_j$ con j = 5 o j = 6 entonces T es una j rueda o una triangulación de una banda de Möbius de j triángulos. (Figura 3)



Figura 3: Izquierda S_5 , derecha S_6 con sus respectivas Bandas de Möbius trianguladas.

(d) Si $M_T = R_j$ con $j \ge 7$, entonces T es una j - rueda.

Las pruebas de ambos lemas requieren de un análisis combinatorio exhaustivo para cada una de las semirruedas S_n y ruedas R_n , el cual consiste en *armar* a la triangulación tomando en cuenta la información de intersecciones que su matriz proporciona.
3 Caracterización de Discos.

Teorema 3 Sean $D ext{ y } D'$ dos superficies trianguladas finitamente por n triángulos, ambas homeomorfas a un disco con matrices de intersección $M_D ext{ y } M_{D'}$ respectivamente, tales que $M_D = M_{D'}$, entonces, $D ext{ y } D'$ son la misma triangulación.

Demostración. Primero que nada, definiremos la vecindad de un vértice v en D, N(v), como el conjunto de todos los triángulos que tienen como alguno de sus vértices a v. Notemos entonces que para cualquier vértice $v \in D$, N(v) es una rueda si el v está en el interior del disco y una semirrueda si v está en la frontera.

Bajo la hipótesis $M_D = M_{D'}$ tenemos que existe una función que va de los triángulos de D a los triángulos de D', $\varphi : \Delta(D) \longrightarrow \Delta(D')$, tal que $|t_i \cap t_j| = |\varphi(t_i) \cap \varphi(t_j)|$ para toda $i, j \leq n$. A continuación analizaremos los posibles casos que puede presentar la función φ .

Caso 1.- Supongamos que para todo vértice en D, $\varphi(N(v))$ es una rueda si N(v) es rueda y $\varphi(N(v))$ es una semirrueda si N(v) es semirrueda. Nótese que $\cap N(v)$ es precisamente v, entonces podemos extender a la función φ a una función que va de los vértices de D a los vértices de D', $\psi: V(D) \longrightarrow V(D')$, con la regla de correspondencia $\psi(\cap N(v)) = \cap \varphi(N(v))$.

Caso 2.- Supongamos que existe $v \in D$ tal que N(v) corresponde a una 3-rueda y tal que la función φ mapea a esta vecindad al 3-libro. Esto querría decir que el 3-libro está contenido en D', pero este caso no puede suceder, pues la dimensión mínima de encaje del 3-libro es 3, mientras que la dimensión mínima de encaje de D' es 2, es decir, D' no puede contener al 3-libro.

Caso 3.- Supongamos que existe $v \in D$ tal que N(v) corresponde a una *i*-semirrueda y tal que la función φ mapea a esta vecindad a una *i*-arracada para $i = 4,5 \ \acute{o} \ 6$. Usando argumentos combinatorios y topológicos podemos mostrar que este caso no puede ser posible. No explicítamos dichos casos en esta nota por brevedad.

Caso 4.- Supongamos que existe $v \in D$ tal que N(v) corresponde a una *j*-rueda con j = 5 ó 6 y tal que la función φ mapea a esta vecindad a una banda de Möbius. Esto implicaría que la banda de Möbius está contenida en D'. Es decir este caso no puede suceder, pues la dimensión mínima de encaje de la banda de Möbius es 3, mientras que la dimensión de encaje de D' es 2, es decir, D' no puede contener a la banda de Möbius.

Entonces hemos argumentado que el Caso 1 es el único posible. Por tanto, mediante el uso de la función ψ podemos dar una biyección entre V(D) y V(D'). Esta función tiene la particularidad de mapear triángulos en triángulos, mientras se preservan las intersecciones. Es decir las triangulaciones D y D' son combinatoriamente equivalentes.

- Arocha, J., Bracho, J., García-Colín, N., Hubard, I.: Reconstructing surface triangulations by their intersection matrices., enero, 2014.
- [2] Branko, G.: Convex Polytopes. Pure and Applied Mathematics, Springer, 1967.
- [3] Matousek, J.: Lectures on Discrete Geometry, Springer, 2002.

Digráficas núcleo imperfectas críticas y familias de torneos generalizados*

Hortensia Galeana-Sánchez[†] Mika Olsen[‡]

Resumen

Vamos a presentar caracterizaciones de algunas familias de torneos generalizados que son digráficas núcleo imperfectas críticas así como las diferentes ideas que están atrás de las pruebas. Palabras Clave. Digráfica. Núcleo imperfecta crítica. Torneos generalizados.

1 Introducción

Una digráfica D es una pareja (V(D), F(D)), donde V(D) es el conjunto de vértices de la digráfica D y F(D) es el conjunto de parejas ordenadas de vértices de D que definen las flechas de D. Un torneo es una digráfica que satisface que entre cualquier par de vértices hay exactamente una flecha. Los torneos forman una clase de digráficas con mucha estructura y tienen una serie de propiedades bonitas; por ejemplo, en caso de ser fuertemente conexo es hamiltoniano y pancíclico y si no es fuertemente conexo, entonces tiene una trayectoria hamiltoniana. En 1990 Bang-Jensen definió la primera familia de generalizaciones de torneos [?] y las diferentes generalizaciones de torneos han recibido mucha atención desde entonces. Una familia de digráficas es una generalización de torneos si de alguna manera las digráficas conservan estructuras básicas de los torneos y además, contiene a los torneos. Algunas familias han sido caracterizadas en términos de su gráfica subyacente o en términos de su estructura mientras que para otras familias aún no se conoce una caracterización bonita. Propiedades interesantes de generalizaciones de torneos se pueden encontrar en [?]. Algunas de las familias de generalizaciones de torneos más estudiados son las digráficas semicompletas, digráficas cuasi-transitivas y digráficas localmente semicompletas.

Dominación y absorción son los conceptos en digráficas análogos a la dominación en gráficas [?]. Un subconjunto N de vértices es *absorbente* en la digráfica D si para todo vértices $u \in V(D) \setminus N$ existe un vértice $v \in N$ tal que $uv \in F(D)$ y un conjunto de vértices es *independiente* si no hay flechas entre los vértices en D. Un *núcleo* en una digráfica es un conjunto independiente y absorbente de vértices. El



concepto de núcleo fue introducido en 1944 por von Neumann y Morgenstein y tiene muchas aplicaciones en diferentes áreas, por ejemplo, en teoría de toma de decisiones, en teoría de juegos y en lógica. En 1973, V. Chvàtal probó que decidir si una digráfica arbitraria *D* tiene un núcleo es un problema *NP*-completo.

La clase de digráficas núcleo imperfectas críticas es una clase con propiedades interesantes. Una digráfica D, que satisface que todas sus subdigráficas propias inducidas tienen núcleo, es una digráfica núcleo imperfecta crítica (CKI) si la digráfica D no tiene núcleo; y es una digráfica núcleo perfecta (KP) si la digráfica D tiene un núcleo. Una digráfica CKI (o digráfica KP) no tiene subdigráficas CKI propias

^{*}Trabajo realizado con apoyo de Conacyt

[†]Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, hgaleana@matem.unam.mx

[‡]Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Cuajimalpa, olsen@correo.cua.uam.mx

inducidas. Los ciclos impares son núcleo imperfectas críticas y los ciclos pares son núcleo perfectas. El único torneo que es CKI es \overrightarrow{C}_3 , y probamos que la familia de digráficas CKI semicompletas es la familia $\overrightarrow{C}_n(1, \pm 2, \pm 3, \pm \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$, para algún $n \ge 4$, donde $\overrightarrow{C}_m(J)$ es una digráfica circulante (o rotacional) definida sobre $V(\overrightarrow{C}_m(J)) = Z_m$, con Z_m el grupo cíclico de enteros módulo $m \ (m \ge 1)$, J un subconjunto no vacío de $Z_m \setminus 0$ y $F(\overrightarrow{C}_m(J)) = \{(i,j) : i, j \in Z - m, j - i \in J\}$. Un dato curioso es que si una digráfica es CKI, la digráfica que se obtiene al invertir todas las flechas de D puede no serlo; Duchet y Meyniel dieron un ejemplo de tal digráfica en 1981.

En 1960 C. Berge definió las gráficas perfectas como aquellas que satisfacen que para cada subgráfica inducida H de G, el número cromático de H es igual al número máximo vértices de una subgráfica completa de H. Además, propuso la conjetura fuerte de las gráficas perfectas que afirma que una gráfica G es perfecta si y sólo si G no contiene ni \vec{C}_{2n+1} ni el complemento de \vec{C}_{2n+1} , para $n \geq 2$, como un subgráfica inducida; esta conjetura fue demostrada por M. Chudnovsky et. al (2006). Muchos autores han contribuido a obtener propiedades y caracterizaciones de gráficas perfectas. En 1986 C. Berge y P. Duchet conjeturaron que una gráfica G es perfecta si y sólo si cualquier orientación por pozos de G es una digráfica núcleo perfecta (si G es una gráfica, una orientación \overrightarrow{G} de G es una digráfica obtenida a partir de G por la dirección de cada arista de G en al menos una de las dos direcciones posibles. Una orientación \overrightarrow{G} de G es una orientación por pozos si cada subgráfica semicompleta H de G tiene un vértice absorbente en $\overrightarrow{G}[V(H)]$). La demostración de esta última propiedad no aparece como tal en la literatura, pero es consecuencia de resultados de dos artículos y construye un puente importante entre dos temas en la teoría de gráficas: a saber, coloraciones y núcleos. Es importante mencionar que cualquier digráfica H que es KP puede ser extendida a una digráfica D que es CKI de modo que H es una subdigráfica inducida de D; por eso las digráficas CKI no pueden ser caracterizadas por menores prohibidos. Víctor Neumann-Lara y Hortensia Galeana-Sánchez probaron que si una digráfica D no tiene ninguna subdigráfica inducida isomorfa a una CKI, entonces la digráfica tiene núcleo. Dado que el problema en general de decidir si una digráfica tiene núcleo es NP-completo, clasificar las digráficas CKI resulta interesante. Algunas familias de digráficas CKI han sido caracterizadas y se conocen propiedades estructurales, ver [?, ?].

2 Gráficas perfectas y digráficas núcleo perfectas

La relación entre gráficas perfectas y digráficas núcleo perfectas nos ayudan a caracterizar las digráficas núcleo imperfectas críticas de algunas familias de torneos generalizados. Los siguientes dos teoremas fueron mencionados en la introducción.

Teorema 1 (Teorema fuerte de gráficas perfectas) [?] Una gráfica G no es perfecta si y sólo si G tiene como subgráfica inducida un ciclo impar de orden al menos 5 o el complemento de un ciclo impar de orden al menos 7.

Teorema 2 [?, ?] Una gráfica G es perfecta si y sólo si las orientaciones por pozos (cada subdigráfica semicompleta tiene un núcleo) de G es una digráfica KP.

El siguiente teorema es fundamental para la caracterización de las digráficas CKI de ciertas familias de torneos generalizados cuya gráfica subyacente es perfecta.

Teorema 3 Las únicas digráficas núcleo imperfectas críticas que son orientaciones de gráficas perfectas son \vec{C}_3 y la familia $\vec{C}(1, \pm 2, \pm 3, ..., \pm |\frac{m}{2}|)$, con $m \ge 4$.

Una digráfica D es cuasi-transitiva si cada vez que hay un uvw camino en D, entonces al menos una de las flechas uw y wu es flecha de D. Se sabe que la gráfica subyacente de una digráfica cuasi-transitiva es una gráfica de comparabilidad, la cual se sabe perfecta. La caracterización de las digráficas CKI que son cuasi-transitivas se sigue del teorema 3. Caracterizamos de la misma manera a los torneos multipartitos semicompletos CKI, porque un torneo multipartito semicompleto es una orientación de una gráfica multipartita completa, que es una gráfica perfecta.

3 Caracterizando las CKI usando propiedades de la familia de torneos generalizados

Una digráfica D es localmente semicompleta si para cada vértice de D la in-vecindad y la ex-vecindad inducen una digráfica semicompleta. Bang-Jensen caracterizó las digráficas localmente semicompletas en términos de digráficas "round" y el número de independencia $\alpha(D)$ (el orden máximo de un conjunto de vértices independientes). Una digráfica es round si podemos etiquetar sus vértices v_1, v_2, \ldots, v_n de manera que para cada i, tenemos $N^+(v_i) = \{v_{i+1}, \ldots, v_{i+d^+(v_i)}\}$ y $N^-(v_i) = \{v_{i-d^-(v_i)}, \ldots, v_{i-1}\}$ (todos los subíndices se toman módulo n). Dejando de lado los detalles, reducimos el problema de caracterizar a las digráficas localmente semicompletas que son CKI al problema de caracterizar las digráficas round que son CKI y caracterizar las digráficas localmente semicompletas con $\alpha(D) = 2$ que son CKI.

Proposición 4 Sea *D* una digráfica localmente semicompleta con $\alpha(D) = 2$. Si *D* es CKI, entonces $D \cong \overrightarrow{C}_5$ o $D \cong \overrightarrow{C}_7(1,2)$.

Probamos un lema técnico que establece que si una digráfica round es CKI, entonces tiene que ser una digráfica circulante con cierto tipo de saltos. Usando ese resultado pudimos caracterizar las digráficas round que son CKI.

Teorema 5 Sea D una digráfica round. Si D es CKI, entonces D es un ciclo impar, $D \cong \overrightarrow{C}_7(1,2)$ o $D \cong \overrightarrow{C}_m(1,\pm 2,\pm 3,\ldots,\pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)$ para algún $m \ge 4$.

Usando la caracterización de las digráficas localmente semicompletas de Bang-Jensen, la proposición ?? y el teorema ?? probamos el siguiente resultado.

Teorema 6 Sea D una digráfica localmente semicompleta. Entonces D es CKI si y sólo si D es un ciclo impar, $D \cong \overrightarrow{C}_7(1,2)$ o $D \cong \overrightarrow{C}_m(1,\pm 2,\pm 3,\ldots,\pm |\frac{m}{2}|)$ para algún $m \ge 4$.

4 Una familia de torneos bipartitos generalizados

Las últimas familias de digráficas que vamos a considerar son familias de torneos bipartitos generalizados. Dada una flecha cualquiera vw en un torneo bipartito, u un vecino de v y x un vecino de w, entonces u y x son adyacentes. Hay cuatro maneras de elegir estos dos vecinos cada una induce una familia de torneos bipartitos generalizados: las digráficas arco-in-localmente semicompleta, digráficas arco-out-localmente semicompleta, digráficas 3-cuasi-transitivas y las digráficas 3-cuasi-anti-transitivas. Estas cuatro familias tienen caracterizaciones parecidas y muy sencillas en términos de trayectorias no necesariamente inducidas. Una trayectoria no necesariamente dirigida P = uvwx es una H_1 -trayectoria si $u \to v \to w \leftarrow x$; es una H_2 -trayectoria si $u \leftarrow v \to w \to x$; es una H_3 -trayectoria si P es una trayectoria dirigida y una H_4 -trayectoria si P es una trayectoria antidirigida (P no tiene subtrayectorias dirigida de tres vértices).



Figura 2: H_i trayectorias para i = 1, 2, 3, 4

Para i = 1, 2, 3, 4, Bang-Jensen definió una digráfica H_i -libre [?] como aquella donde cada H_i trayectoria uvwx tiene una flecha entre los vértices $u \neq x$. Nosotros consideramos una digráfica H_i libre como aquella que no tiene H_i -trayectorias inducidas, claramente contiene las digráficas H_i -libres definidas por Bang-Jensen. Lo primero que pudimos constatar es que hay digráficas que son CKI y no son H_i -libres, por ejemplo la digráfica circulante $\vec{C}_1 1(1, 2, 4)$. Las trayectorias (9, 0, 4, 3), $(1, 0, 4, 5) \neq$ (0, 2, 3, 5) no tienen diagonales, y las H_4 -trayectorias $(8, 1, 0, 4) \neq (10, 1, 0, 4)$ tiene una diagonal. Así que para i = 1, 2, 3 caracterizamos las digráficas CKI tales que cada H_i -trayectoria tiene al menos una



diagonal y las digráficas CKI tales que cada H_4 -trayectoria tiene al menos dos diagonales. Usamos el siguiente resultado, que es una reformulación de dos resultados de Víctor Neumann-Lara y Hortensia Galeana-Sánchez.

Teorema 7 [?] Sea D una digráfica CKI que no es un ciclo impar. Para todo vértice $u \in V(D)$ hay un ciclo $C = (u = u_0)u_1...u_{2n}u_0$ tal que C no tiene diagonales del tipo u_iu_j con $j \in \{0, 1, 3, ..., 2n - 1\}$ ni del tipo $u_{2i+1}u_{2j}$ con 0 < i < j < n.

5 Sección final

Queremos recordar que hay una única familia de digráficas CKI semicompletas \vec{C}_3 y $\vec{C}(1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)$, para algún $m \ge 4$, donde el único torneo es \vec{C}_3 . En las familias de torneos generalizados esperábamos que en cada familia hubieran pocas digráficas CKI. Resumiendo los resultados tenemos que si una digráfica es CKI y pertenece a algunas de las siguientes generalizaciones de torneos: digráficas cuasi-transitivas, torneos multipartitos semicompletos, digráficas localmente semicompletas, H_i -libres tales que cada H_i trayectoria tiene al menos una diagonal para i = 1, 2, 3 y las H_4 -libres tales que cada H_4 -trayectoria tiene al menos dos diagonales, entonces tiene que ser un ciclo impar, $\vec{C}_7(1, 2)$ o de la familia de digráficas circulantes semicompletas $\vec{C}(1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm \lfloor \frac{m}{2} \rfloor)$, para algún $m \ge 4$.

- J. Bang-Jensen, Locally semicomplete digraphs: a generalization of tournaments, J. Graph Theory 14 (1990) 371–390.
- [2] Bang-Jensen, J., Gutin, G.: Generalizations of tournaments. A Survey, J. Graph Theory 28 (1998), 171–202.
- [3] Bang-Jensen, J.: The structure of strong arc-locally semicomplete digraphs, Discrete Math. 283 (2004), 1–6.
- [4] Berge, C., Duchet, P.: Recent problems and results about kernels in directed graphs, Discrete Math. 86 (1990), 27–31.
- [5] Boros, E., Gurvich, V.: Perfect graphs are kernel solvable, Discrete Math. 159 (1996), 35–55.
- [6] Chudnovsky, M., Robertson, N., Seymour, P., Thomas, P.: The strong perfect graph theorem, Ann. Math. 164 (2) (2006) 51–229.
- [7] Galeana-Sánchez, H., Neumann-Lara, V.: On kernels and semikernels of digraphs, Discrete Math. 48 (1984), 67–76.
- [8] Galeana-Sánchez, H., Neumann-Lara, V.: On Kernel-perfect critical digraphs, Discrete Math. 59 (1986), 257-265.
- [9] Haynes, T. W., Hedetniemi, T., Slater, P. J. (editores), Domination in Graphs, Advanced Topics, edición, Marcel Dekker Inc., Lugar 1998.

Gráficas y ajedrez

Adriana Hansberg*

Resumen

¿Cuántas reinas caben en un tablero de ajedrez sin que se ataquen entre ellas? ¿Cuántas se necesitan para que toda casilla del tablero no ocupada sea atacada por alguna de ellas? En esta comunicación, discutiremos este tipo de problemas para los distintos tipos de piezas del ajedrez. Presentaremos los resultados conocidos hasta hoy en día y concluiremos proponiendo variaciones y extensiones de estos problemas.

Palabras Clave. Gráfica. Ajedrez. Dominación. Independencia.

1 Introducción

En esta comunicación, consideraremos varios problemas de colocación de piezas en un tablero de ajedrez. Denotaremos con K, Q, T, A, C los tipos de piezas *rey*, *reina*, *torre*, *alfil* y *caballo*, respectivamente, las cuales efectuan los movimientos tal como en el juego del ajedrez. Así, decimos también que una pieza p de tipo $P \in \{K, Q, T, A, C\}$ *ataca* a todas las piezas que estén situadas en las casillas a las cuales p puede llegar tras efectuar un movimiento correspondiente a su tipo. Por ejemplo, si p es un alfil, todas las piezas colocadas sobre las casillas de las dos diagonales que se cruzan en la casilla de p son atacadas por esta. Los problemas que nos interesan son los siguientes. Sea $P \in \{K, Q, T, A, C\}$

Problema 1. ¿Cuál es el máximo número de piezas de tipo P que se puede colocar en un tablero de ajedrez de $n \times n$ casillas de tal forma que no se ataquen entre ellas?

Problema 2. ¿Cuál es el mínimo número de piezas de tipo P que se pueden colocar en un tablero de ajedrez de $n \times n$ casillas de tal forma que todos los campos no ocupados sean atacados por alguna de ellas?

Veremos que, dependiendo del tipo de pieza, los problemas pueden ser desde muy sencillos hasta impresionantemente complicados. En esta comunicación, daremos las soluciones y los resultados que se conocen sobre estos problemas para los diferentes tipos de piezas de ajedrez. Finalmente, daremos posibles variaciones y extensiones de estos problemas.

2 Traducción a gráficas

Los problemas 1 y 2 se pueden traducir, en términos de gráficas, a problemas de *independencia* y dominación. Para esto, construimos una gráfica que representa los posibles movimientos de las reinas sobre cada casilla del tablero. Así, obtenemos una gráfica de n^2 vértices (uno por casilla) y cada vértice es adyacente a todos los vértices correspondientes a las casillas atacadas. Denotaremos con G_P^n a la gráfica relativa a la figura $P \in \{K, Q, T, A, C\}$ en un tablero de $n \times n$. El conjunto de vértices de G_P^n será formado por todos los pares $(i, j), 1 \leq i, j \leq n$, en donde *i* marca el renglón y *j* la columna. En la Figura 1 damos las gráficas correspondientes a los caballos, a los reyes y a los alfiles en un tablero de 4x4.

^{*}Universidad Nacional Autónoma de México, ahansberg@im.unam.mx



Figura 1: Gráficas G_C^4 , G_A^4 y G_K^4 . Los vértices negros y grises forman, respectivamente, conjuntos dominantes e independientes.

De esta manera, los problemas 1 y 2 se traducen a los problemas de encontrar un conjunto independiente de máxima cardinalidad y un conjunto dominante de mínima cardinalidad en la gráfica asociada a la pieza. Formalmente, si G = (V, E) es una gráfica y $S, D \subseteq V$ son subconjuntos del conjunto de vértices tales que la gráfica inducida por S no tenga aristas y que todo vértice $v \in V \setminus D$ tenga al menos un vecino en D, diremos que S es un conjunto *independiente* y que D es un conjunto *dominante* en G. La cardinalidad de un conjunto independiente máximo y de un conjunto dominante mínimo en una gráfica G serán denotadas con $\alpha(G)$ y $\gamma(G)$, respectivamente.

3 Soluciones y resultados conocidos

3.1 Reyes

La solución de los Problemas 1 y 2 para el caso de los reyes es bastante sencilla. En el caso de un conjunto independiente, los reyes tienen que estar separados por al menos una casilla. La forma más compacta de colocarlos es como se ilustra a la izquierda en la Figura 2. Es fácil ver que entonces $\alpha(G_K^n) = \lceil n/2 \rceil^2$. Por otro lado, es claro que si colocamos $\lceil n/3 \rceil^2$ reyes distribuidos como se muestra a la derecha en la Figura 2, tendremos un conjunto dominante. Como por cada columna debe haber al menos $\lceil n/3 \rceil$ reyes situados ya sea sobre ella o en las columnas contiguas, necesitaremos al menos $\lceil n/3 \rceil^2$ reyes para cubrir el tablero entero. Por lo tanto, tenemos que $\gamma(G_K^n) = \lceil n/3 \rceil^2$.



Figura 2: Soluciones para los problemas de los reyes, n = 8

3.2 Torres

El caso de las torres es todavía más fácil. Notemos primero que n torres colocadas a lo largo de una de las diagonales del tablero forman tanto un conjunto dominante como uno independiente. Observemos ahora que para un conjunto dominante no podemos usar menos piezas, ya que, si no, existiría un renglón i y una columna j en la que no estuviera ninguna torre, por lo que la casilla (i, j) no estaría cubierta. Finalmente, para un conjunto independiente, tampoco podemos poner más de n torres, ya que entonces forzosamente tendría que haber dos torres en una columna o un renglón. Tenemos entonces que $\alpha(G_T^n) = \gamma(G_T^n) = n$.

3.3 Alfiles

En el caso de los alfiles, las soluciones a los problemas 1 y 2 son también relativamente fáciles. La Figura 3, nos muestra, para el caso n = 8, una configuración de 2n - 2 alfiles independientes y una con n alfiles dominantes. Estas configuraciones nos indican que $\alpha(G_A^n) \ge 2n - 2$ y $\gamma(G_A^n) \le n$. Mostraremos

ahora que estos dos números son óptimos. Notemos primero que el tablero de ajedrez tiene 2n - 1diagonales en una misma dirección, dos de las cuales están formadas por una sola casilla (las de la esquina). Podemos poner un alfil en a lo más una de cada una de estas diagonales a excepción de una de las esquinas (ya que las dos esquinas están ambas en una misma diagonal). Esto indica que a lo más se pueden poner 2n - 2 alfiles sin que se ataquen mutuamente, por lo que $\alpha(G_A^n) \leq 2n - 2$. Por otro lado, está claro que con una columna llena de alfiles tenemos un conjunto dominante. Para $n \leq 4$, es fácil ver que este n es el óptimo. Sea entonces $n \geq 5$. Observemos que un alfil en las casillas centrales del tablero cubre al menos n + 2 casillas mientras que en todos los otros lugares cubre menos casillas. Por otro lado, si ya hay dos alfiles colocados sobre el tablero, un tercer alfil podría cubrir a lo más ncasillas más. Esto implica que, si colocáramos n - 1 alfiles sobre el tablero, podríamos cubrir a lo más $2(n+2) + (n-3)n = n^2 - n + 4 < n^2$. Por lo tanto, n - 1 alfiles no bastan para dominar el tablero entero, con lo cual $\gamma(G_A^n) \geq n$ y hemos terminado.



Figura 3: Solución para los problemas de los alfiles, n = 8

3.4 Caballos

El caso de los caballos es bastante más interesante. Mientras que el Problema 1 tiene una solución relativamente sencilla, el problema del conjunto dominante no ha sido resuelto hasta la fecha: sólo se conocen soluciones óptimas para $n \leq 20$ y configuraciones de caballos dominantes para $n \leq 30$, n = 40, 45 y 50, de las cuales no se ha confirmado si son óptimas [6, 8].

Para el caso del conjunto independiente, podemos colocar todos los caballos sobre las casillas de un mismo color, como se muestra en la Figura 4, con lo que tenemos que $\alpha(G_C^n) \ge \lceil n^2/2 \rceil$. Debido a que el caballo sólo ataca casillas de distinto color al de la casilla en la que está situado, la gráfica de los caballos es bipartita (con los vértices de las casillas negras y los de las casillas blancas formando la bipartición). Para probar que $\alpha(G_C^n) = \lceil n^2/2 \rceil$, usaremos las siguientes dos afirmaciones, las cuales son sencillas de probar. Sea G es una gráfica bipartita con bipartición $V = A \cup B$ tal que $|A| \ge |B|$. Entonces

- 1. $\alpha(G) \ge |A|, y$
- 2. si G tiene un emparejamiento perfecto o semiperfecto, entonces $\alpha(G) = |A|$.

Se puede demostrar que G_C^n tiene un emparejamiento perfecto o semiperfecto, con lo cual $\alpha(G_C^n) = \lceil n^2/2 \rceil$. Nótese que en la literatura en donde se cita este resultado ([3]) no se da una prueba explícita de esta desigualdad.



Figura 4: Solución para los problemas de los caballos, n = 8.

3.5 Reinas

Los problemas concernientes a las reinas fueron muy populares entre los entusiastas del ajedrez y diversos matemáticos [1, 7] desde alrededor del año 1850. El del conjunto independiente ha sido resuelto enteramente. La solución se da mediante diferentes configuraciones según el resto de n módulo 3 [2]. En la Figura 5, mostramos las soluciones para n = 8,9 y 10. Sin embargo, el Problema 2 sigue siendo tema de investigación actual ya que no se tienen hasta hoy en día más que las soluciones para ciertas n's y resultados parciales (ver [7]).



Figura 5: Soluciones para el problema de las reinas independientes, n = 8, 9, 10.

4 Variaciones y extensiones de los problemas

Los problemas aquí presentados pueden variarse y extenderse de distintas maneras. Proponemos aquí varias de ellas, algunas de las cuales ya han sido en parte estudiadas. La página de internet [4] mantenida por George Jelliss sugiere otros problemas similares.

- 1. Usar otros tipos de piezas, con otros movimientos, como por ejemplo piezas que salten p casillas en horizontal y q en diagonal, para diversas p y q.
- 2. Permitir que las piezas den dos o más saltos, atacando todas las casillas que pueda llegar en uno de esos saltos.
- 3. Buscar un conjunto dominante mínimo de piezas tal que las mismas casillas ocupadas sean atacadas por otras piezas (conjuntos total-dominantes).
- 4. Buscar un conjunto dominante mínimo de piezas tal que ninguna ataque a la otra.
- 5. Proponer el problema con varios tipos de piezas.
- 6. Variar la topología del tablero: en vez del plano, tomar un toro, una banda de Moebius, etc.

- Bell, J., Stevens, B.: A survey of known results and research areas for n-queens., Discrete Math. 309 (1) (2009), 1 – 31.
- [2] Bernhardsson, B.: Explicit Solutions to the N-Queens Problem for all N, Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, Sweden (1991).
- [3] Dudeney, H. E.: Chessboard Problems, 84–109, 1970.
- [4] Jelliss, G: Chess-Piece Arrangement Problems, http://www.mayhematics.com/a/arrangements.htm
- [5] Madachy, J. S.: Chessboard Placement Problems., In: Madachy's Mathematical Recreations. 34–54, New York: Dover, 1979.
- [6] Morgenstern, L: Knight domination, http://home.earthlink.net/morgenstern/
- [7] Östergard, P. R. Weakley, W. D.: Values of domination numbers of the queen's graph., Electron. J. Combin. 8 (1) (2001), Research Paper 29, 19 pp.
- [8] Rubin,, F.: Knight coverings for large chessboards http://www.contestcen.com/knight.htm

La segunda capa convexa de todo dibujo rectilíneo óptimo de K_n es un triángulo

J. Leaños^{*} M. Lomelí-Haro[†] M. Ramírez-Ibáñez [‡] L. M. Rivera-Martínez[§]

Resumen

Un dibujo rectilíneo de una gráfica G es óptimo si tiene el menor número de cruces de sus aristas entre todos los dibujos rectilíneos de G. Mostraremos que si $n \ge 8$, entonces la segunda capa convexa de todo dibujo rectilíneo óptimo de K_n es un triángulo.

Palabras Clave. Gráfica completa. Número de Cruce Rectilíneo. Dibujo Óptimo. Cierre Convexo.

En este trabajo analizaremos la estructura de los dibujos óptimos de la gráfica completa con n vértices K_n .

Definición 1 Una gráfica G es un par ordenado (V, E), que consiste de un conjunto no vacío V de vértices y un conjunto $E \subseteq V \times V$ de aristas.

La gráfica completa de n vértices K_n tiene una arista por cada par de elementos distintos u y v de V. En la Figura 1 mostramos $K_4 y K_6$.

Dado que una gráfica es un objeto abstracto, estudiaremos sus representaciones en el plano mediante *dibujos*, o sea, un subconjunto de \mathbb{R}^2 donde a cada elemento de V le corresponde un elemento de \mathbb{R}^2 , y cada arista será representada mediante un segmento de línea recta, imagen de una función continua del intervalo (0, 1) a \mathbb{R}^2 .

Para evitar confusiones y ambigüedades, trabajaremos únicamente con dibujos en los que nunca habrá 3 vértices o mas sobre una misma línea recta.



Figura 1: Dibujos de K_4 y K_6 .

1 El problema a estudiar

En la Figura 1 podemos observar que en ambos dibujos hay pares de aristas intersectándose, formando *cruces*. Dichas intersecciones son el motivo central de este trabajo.

^{*}Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Zacatecas, jleanos@matematicas.reduaz.mx

[†]Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Tecnológica de la Mixteca, lomeli@mixteco.utm.mx

[‡]Instituto de Agroingeniería, Universidad del Papaloapan, mramirez@unpa.edu.mx

[§]Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Zacatecas, luismanuel.rivera@gmail.com

Definición 2 Dada una gráfica G y un dibujo \mathcal{D} de ella, el número de cruce del dibujo \mathcal{D} es el número pares de aristas intersectándose. Lo denotaremos como $cr(\mathcal{D})$.

Estamos interesados en la forma de colocar los vértices de tal manera que K_n tenga el menor número de cruces posible. Tenemos la siguiente definición:

Definición 3 El número de cruce (de la gráfica) K_n es el entero mínimo tomado sobre el número de cruce de todos los dibujos de K_n . Lo denotaremos como

 $\overline{cr}(K_n).$

A un dibujo de K_n que alcance el valor $\overline{cr}(K_n)$ le llamaremos dibujo óptimo.



Figura 2: Dibujos óptimos de K_7 y K_8 .

Está probado que en cualquier colección de 5 puntos en el plano (sin que haya 3 en una misma línea recta), siempre habrá 4 de ellos siendo los vértices de un cuadrilátero convexo. Este problema es interesante como primer antecedente, pues nos dice que todo dibujo de K_n siempre tendrá cruces para $n \ge 5$. Es fácil dibujar a K_4 sin que haya intersecciones en sus aristas.

Definición 4 Dado un conjunto P de puntos en el plano, el cierre convexo de P es el polígono convexo de menor tamaño que contiene a todos los elementos de P. Lo denotaremos como Conv(P). Si $C \subseteq P$ el conjunto de los vértices de Conv(P), entonces la segunda capa convexa de P es el polígono

$$Conv(P \setminus C).$$

El problema de calcular el valor exacto de $\overline{cr}(K_n)$, iniciado por R. K. Guy [14], ha sido muy estudiado por su belleza y por su complejidad [1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 15]. También se han estudiado las propiedades estructurales de los dibujos óptimos. O. Aichholzer, D. Orden y P. Ramos [7] prueban que el cierre convexo de todo dibujo óptimo de K_n es un triángulo. Posteriormente, J. Balogh, J. Leaños, S. Pan, R. B. Richter y G. Salazar verifican que ésto sigue siento válido para dibujos pseudolineales de K_n [10].

Respecto a la segunda capa convexa, probaremos lo siguiente.

Teorema 1 Sea P un conjunto de $n \ge 8$ puntos en el plano tal que el dibujo \mathcal{D} de K_n con vértices en P es óptimo. Entonces la segunda capa convexa de \mathcal{D} también es un triángulo.

En la Figura 2 mostramos dibujos óptimos de K_7 y K_8 . Obsérvese que la segunda capa convexa de K_7 es un cuadrilátero.

- [1] B. M. Ábrego, M. Cetina, S. Fernández-Merchant, J. Leaños and G. Salazar, On $\leq k$ -edges, crossings, and halving lines of geometric drawings of K_n . Discrete Comput. Geom. 48 (2012) 192–215.
- [2] B. M. Abrego, M. Cetina, S. Fernández-Merchant, J. Leaños and G. Salazar, 3-symmetric and 3-decomposable geometric drawings of K_n. Discrete Appl. Math. 158 (2010) no. 12, 1240–1258.
- [3] B. M. Abrego and S. Fernández-Merchant, A lower bound for the rectilinear crossing number, Graphs Combin. 21 (2005), no. 3, 293–300.
- [4] B. M. Abrego, S. Fernández-Merchant and G. Salzar, The rectilinear crossing number of K_n: closing in (or are we?), *Thirty essays in Geometric Graph Theory* (János Pach, Ed.). Springer (2013), pp. 5-18.
- [5] O. Aichholzer, http://www.ist.tugraz.at/staff/aichholzer/research/rp/triangulations/crossing/
- [6] O. Aichholzer, J. García, D. Orden and P. Ramos, New lower bounds for the number of $(\leq k)$ -edges and the rectilinear crossing number of K_n . Discrete Comput. Geom. **38** (2007), no. 1, 1–14.
- [7] O. Aichholzer, D. Orden and P. Ramos, On the structure of sets attaining the rectilinear crossing number, in Proc. 22th European Workshop on Computational Geometry EuroCG'06, pp. 43–46, Delphi, Greece, 2006.
- [8] O. Aichholzer, J. García, D. Orden and P. Ramos, New results on lower bounds for the number of $(\leq k)$ -facets, *Electron. Notes Discrete Math.* **29** (2007), 189–193.
- [9] O. Aichholzer and H. Krasser, Abstract order type extension and new results on the rectilinear crossing number. *Comput. Geom.* 36 (2007), no. 1, 2–15.
- [10] J. Balogh, J. Leaños, S. Pan, R. B. Richter and G. Salazar, The convex hull of every optimal pseudolinear drawing of K_n is a triangle, Australas. J. Combin. 38 (2007), 155–162.
- [11] J. Balogh and G. Salazar, k-sets, convex quadrilaterals, and the rectilinear crossing number of K_n , Discrete Comput. Geom. **35** (2006), no. 4, 671–690.
- [12] M. Cetina, C. Hernández-Vélez, J. Leaños, and C. Villalobos, Point sets that minimize ($\leq k$)-edges, 3-decomposable drawings, and the rectilinear crossing number of K_{30} , Discrete Math. **311** (2011), 1646–1657.
- [13] R. Fabila-Monroy and J. López, Computational search of small point sets with small rectilinear crossing number. arXiv:1403.1288v1 (March 2014).
- [14] R. K. Guy, A combinatorial problem, Nabla (Bull. Malayan Math. Soc.) 7 (1960), 68–72.
- [15] L. Lovász, K. Vesztergombi, U. Wagner and E. Welzl, Convex quadrilaterals and k-sets, Toward a Theory of Geometric Graphs, Contemp. Math., 342, Amer. Math. Soc. (2004), 139–148.
- [16] H. Krasser, Order types of points sets in the plane. PhD-Thesis, TU-Graz (2003).

Rumbo a transfiguraciones planas de gráficas en una cuadrícula^{*}

Fidel Barrera Cruz[†]

Resumen

Presentamos un algoritmo que encuentra una transfiguración entre dos dibujos de una misma triangulación planar, preservando planaridad rectilínea. El algoritmo produce una transfiguración que consiste de $O(n^2)$ pasos, donde cada paso es una transfiguración rectilínea en la que cada uno de los n vértices se mueve en trayectoria recta y a velocidad constante. Todos los dibujos intermedios, salvo 8(n-4) de ellos, yacen en una cuadrícula de tamaño $6n \times 6n$.

Palabras Clave. Teoría de Gráficas. Geometría Computacional. Teorema de Schnyder.

1 Introducción

Dada una gráfica maximalmente planar, o triangulación planar, en n vértices y dos dibujos rectilíneos de ella, Γ y Γ' , que tienen la misma cara exterior, es posible transfigurar Γ a Γ' mientras se preserva planaridad rectilínea. Esto fue demostrado por Cairns en 1944 [6]. La prueba de Cairns es algorítmica pero requiere una cantidad exponencial de pasos, donde cada paso es una transfiguración rectilínea que mueve cada vértice a lo largo de una línea recta y a velocidad constante. Floater y Gotsman [10] propusieron un algoritmo de tiempo polinomial usando el algoritmo para dibujar gráficas de Tutte [13] pero la transfiguración obtenida a partir de este método no resulta en trayectorias rectas así que las travectorias de los vértices son más complicadas, y no hay garantía de que tan próximos pueden llegar a estar los vértices y las aristas. Recientemente, Alamdari et al. [1] propusieron un algoritmo de tiempo polinomial basado en el método de Cairns que usa $O(n^2)$ transfiguraciones rectilíneas, esto ha sido mejorado a O(n) por Angelini et al. [2]. La idea de estos métodos consiste en contraer (o casi contraer) aristas. Con este método, perturbar vértices para prevenir que sus posiciones coincidan ya presenta una dificultad, y perturbarlos para mantenerlos en una cuadrícula de tamaño polinomial no es fácil. Otro método reciente considerado por Barrera Cruz et al. [5] produce una transfiguración que preserva planaridad rectilínea y usa $O(n^2)$ transfiguraciones rectilíneas donde cada dibujo intermedio yace en una cuadrícula de tamaño $6n \times 6n$. Sin embargo, éste último método sólo funciona para transfigurar entre cualesquiera dos dibujos de Schnyder con pesos (vea la Sección 2).

En esta nota describimos un algoritmo para encontrar una transfiguración que preserva planaridad rectilínea entre cualesquiera dos dibujos planos de una misma triangulación planar y que consiste de $O(n^2)$ pasos. De los $O(n^2)$ dibujos intermedios, todos salvo 8(n-4), yacen en una rejilla de tamaño $6n \times 6n$. Hacemos uso del resultado presentado en [5] así como una variante del método utilizado en [4, Sec. 3] que consiste en convertir una pseudo-transfiguración (vea la Sección 2) a una transfiguración sin incrementar el número de pasos. Con estas dos herramientas, el problema se reduce a encontrar una pseudo-transfiguración de cada uno de los dibujos iniciales a dibujos de Schnyder con pesos.

La idea para encontrar cada una de estas pseudo-transfiguraciones consiste de dos fases. Durante la primera fase se contraen sucesivamente aristas incidentes a algún vértice interno de grado a lo más 5 hasta obtener la gráfica completa K_4 . La segunda fase consiste en deshacer la contracciones que llevamos a cabo, pero en orden inverso, mientras se mantiene un dibujo de Schnyder con pesos.

Nuestra nota está organizada como sigue. En la Sección 2 introducimos las definiciones y notación necesarias. En la Sección 3 se presenta una manera de encontrar una transfiguración de un dibujo arbitrario a un dibujo de Schnyder con pesos. Nuestro resultado principal se presenta en la Sección 4. Finalmente, en la Sección 5 mencionamos algunos problemas abiertos.

^{*}Financiado parcialmente por Conacyt

[†]University of Waterloo, fbarrera@uwaterloo.ca

2 Definiciones y notación

Todas las gráficas consideradas en esta nota son gráficas simples, es decir, sin aristas múltiples ni lazos. En lo que resta de esta publicación consideramos una triangulación planar G. Todos los dibujos considerados en esta nota, son dibujos rectilíneos, es decir, una arista uv es representada en el dibujo por el segmento de recta de u a v. Consideremos dos dibujos $\Gamma \ y \ \Gamma'$ de G. Una transfiguración entre $\Gamma \ y \ \Gamma'$ es una familia continua de dibujos $\{\Gamma^t\}_{t\in[0,1]}$ tal que $\Gamma_0 = \Gamma \ y \ \Gamma_1 = \Gamma'$. Decimos que una transfiguración es planar si Γ^t es un dibujo plano de G para toda $t \in [0,1]$. Una transfiguración se dice *lineal* si todo vértice se mueve de su posición en Γ^0 a su posición en Γ^1 a lo largo de un segmento de recta y a velocidad constante. Note que vértices diferentes pudieran desplazarse a velocidades distintas.

Sean $u \neq v$ vértices de G tal que $u \neq v$ son adyacentes. Abusamos notación y decimos que *contraemos* u hacia v refiriéndonos a la contracción de la arista $uv \neq denotamos$ a la imagen de la arista uv en G/uv por v. Al contraer u hacia v en un dibujo de G, obtenemos un dibujo de G/uv al borrar $u \neq d$ dibujar las aristas faltantes entre los vecinos de u en $G \neq v$. Una *pseudo-transfiguración* se define como una sucesión del siguiente tipo de pasos.

- una transfiguración lineal
- la contracción de un vértice *u* hacia otro vértice, seguida de una pseudo-transfiguración entre los dibujos reducidos y finalmente la "decontracción" de *u*.

2.1 Dibujos de Schnyder con pesos

Una arboleda de Schnyder de una triangulación planar G con cara exterior a_1, a_2, a_3 es una asignación de direcciones y colores 1, 2 y 3 a las aristas internas de G tal que las siguientes dos condiciones se cumplen (véase la Figura 1(a)):

- Cada vértice interior v tiene tres aristas salientes y éstas tienen colores 1, 2 y 3 en orden cíclico de acuerdo a las manecillas del reloj. Todas las aristas entrantes a v en color i aparecen entre las dos aristas salientes en color i 1 e i + 1 (índices tomados módulo 3).
- En cada vértice exterior a_i todas las aristas internas son entrantes y de color i.



Figura 1: (a) Condiciones de la definición de arboleda de Schnyder.(b) Los caminos y regiones dadas por una arboleda de Schnyder.

Teorema 1 (Schnyder [11]) Para toda triangulación planar G y para toda cara f de G existe una arboleda de Schnyder con f como cara exterior.

Una propiedad básica de las arboledas de Schnyder establece que a cada vértice interior v corresponde una partición de las caras interiores de G en tres regiones disjuntas a pares $R_1(v)$, $R_2(v)$ y $R_3(v)$, ver Figura 1(b). A partir de las regiones pueden obtenerse dibujos planos como se enuncia a continuación. **Teorema 2 (Schnyder [11])** Sea G una triangulación planar con n vértices equipada con una arboleda de Schnyder S. Consideremos el mapeo $f: V(G) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $f(a_i) = (2n-5)e_i$, donde e_i denota el *i*-ésimo vector de la base estándar de \mathbb{R}^3 , y para cada vértice interior $v, f(v) = (v_1, v_2, v_3)$, donde v_i denota el número de caras contenidas en $R_i(v)$. Entonces f define un dibujo plano de G.

Dhandapani [7] observó que el resultado anterior se generaliza a caras con pesos positivos. Una distribución de pesos \mathbf{w} es una función que asigna pesos positivos a cada cara interior tal que la suma de los pesos es 2n - 5. Para cualquier distribución de pesos, la *i*-ésima coordenada v_i del vértice v esta definida como

$$v_i = \sum_{f \in R_i(v)} \mathbf{w}(f). \tag{1}$$

El Teorema 2 aun se cumple con las coordenadas definidas en (1). El dibujo resultante es llamado el dibujo de Schnyder con pesos obtenido a partir de \mathbf{w} y S.

3 Transfiguración hacia un dibujo de Schnyder

En esta sección consideramos el problema de transfigurar entre dibujo plano Γ de G y algún dibujo de Schnyder con pesos Γ' de G. El siguiente lema será utilizado en la demostración del resultado principal.

Lema 3 Existe una transfiguración plana M entre Γ y Γ' que consiste de 8(n-4) pasos.

La demostración del Lema 3 consiste de dos partes. En la Sección 3.1 se aborda la primera parte. Ahí describimos como encontrar una pseudo-transfiguración \mathcal{M} de Γ a Γ' . Para la segunda parte se aplica una variante del método presentado en [4, Sec. 3]. Este método convierte \mathcal{M} a una transfiguración plana sin incrementar el número de pasos, obteniendo así la transfiguración deseada entre Γ y Γ' .

3.1 Pseudo-transfiguración hacia un dibujo de Schnyder

En esta sección delineamos la demostración del siguiente lema (consúltese [3, Cap. 5] para detalles).

Lema 4 Existe una pseudo-transfiguración que consiste de 8(n-4) pasos entre Γ y Γ'

La demostración del Lema 4 es algorítmica y consiste de dos fases. La primera fase del algoritmo consiste en llevar a cabo una sucesión de contracciones de vértices de grado a lo más 5 hasta obtener la gráfica K_4 . Se puede demostrar que todo vértice de grado a lo más 5 se puede contraer hacia alguno de sus vecinos, obteniendo así una triangulación planar con un vértice menos y que el dibujo que resulta de la contracción es plano.

La segunda fase requiere de más cuidado. Aquí bosquejamos las ideas centrales. Es sencillo demostrar que todo dibujo de K_4 es un dibujo de Schnyder con pesos. Ahora, nuestro objetivo es deshacer cada una de las contracciones mientras se mantiene un dibujo de Schnyder con pesos de las correspondientes gráficas. Digamos que deseamos deshacer una contracción de u hacia x en el dibujo $\Gamma_{u,x}$ para obtener el dibujo Γ^* . Para este fin, habrá que considerar los pesos de las caras dentro del polígono P en $\Gamma_{u,x}$ y asignar variables a los pesos de las caras incidentes a u en Γ^* . Se puede demostrar que pesos apropiados para las caras incidentes a u en Γ^* pueden ser obtenidos mediante la solución de un sistema de ecuaciones lineales (después de posiblemente haber modificado localmente la arboleda de Schnyder en $\Gamma_{u,x}$). En conjunto, las dos fases prueban la existencia de la pseudo-transfiguración deseada.

4 Resultado principal

Teorema 5 Sea G una triangulación planar. Si Γ y Γ' son dos dibujos planos de G entonces existe una transfiguración planar \mathcal{M} entre Γ y Γ' que consiste de $O(n^2)$ transfiguraciones rectilíneas sucesivas. Más aun todos los dibujos intermedios, salvo 8(n-4) de ellos yacen en una cuadrícula de tamaño $6n \times 6n$.

Demostración. Del Lema 3 se sigue que existen transfiguraciones planares M_1 y M_2 de Γ a Γ_1 y de Γ' a Γ_2 respectivamente, donde Γ_i es un dibujo de Schnyder con pesos, $i \in \{1, 2\}$. Se sigue del resultado en [5] que existe una transfiguración M' entre $\overline{\Gamma}_1$ y $\overline{\Gamma}_2$, donde $\overline{\Gamma}_i$ denota el dibujo obtenido de la misma arboleda de Schnyder asociada a Γ_i pero con distribución de pesos uniforme. La transfiguración planar deseada resulta de concatenar M_1 , M' y \overline{M}_2 , donde \overline{M}_2 denota M_2 en orden inverso.

5 Conclusión

Se presentó un primer paso hacia la solución del problema de transfiguraciones para triangulaciones en una cuadrícula de tamaño polinomial. Esperamos que el Lema 3 pueda ser reemplazado por un algoritmo que transfigure mientras se tenga control del tamaño de la cuadrícula para los dibujos intermedios. Otro aspecto relacionado con problemas de transfiguración, es considerar la generalización de arboledas de Schnyder a gráficas 3-conexas, propuesta por Felsner [8, 9], para producir transfiguraciones planas que preservan convexidad. Hasta ahora solamente se sabe la existencia de éstas [12].

Agradecimientos

Agradezco a Penny Haxell y a Anna Lubiw por las discusiones acerca de este tema.

- S. Alamdari, P. Angelini, T. M. Chan, G. Di Battista, F. Frati, A. Lubiw, M. Patrignani, V. Roselli, S. Singla, and B. T. Wilkinson. Morphing planar graph drawings with a polynomial number of steps. In 24th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA '13), pages 1656–1667, 2013.
- [2] P. Angelini, G. Da Lozzo, G. Di Battista, F. Frati, M. Patrignani, and V. Roselli. Morphing planar graph drawings optimally. In Proc. forty-first International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP '14), pages 126–137, 2014.
- [3] F. Barrera-Cruz. Morphing planar triangulations. PhD thesis, University of Waterloo, 2014.
- [4] F. Barrera-Cruz, P. Haxell, and A. Lubiw. Morphing planar graph drawings with unidirectional moves. In Mexican Conference on Discrete Mathematics and Computational Geometry, pages 57–65, 2013.
- [5] F. Barrera-Cruz, P. Haxell, and A. Lubiw. Morphing schnyder drawings of planar triangulations. In Graph Drawing - 22nd International Symposium, GD 2014, Würzburg, Germany, September 24–26, 2014, Revised Selected Papers, to appear.
- [6] S. Cairns. Deformations of plane rectilinear complexes. The American Mathematical Monthly, 51(5):247-252, 1944.
- [7] R. Dhandapani. Greedy drawings of triangulations. Discrete & Computational Geometry, 43(2):375– 392, 2010.
- [8] S. Felsner. Convex drawings of planar graphs and the order dimension of 3-polytopes. Order, 18(1):19–37, 2001.
- [9] S. Felsner. Geodesic embeddings and planar graphs. Order, 20(2):135–150, 2003.
- [10] M. S. Floater and C. Gotsman. How to morph tilings injectively. Journal of Computational and Applied Mathematics, 101(1-2):117–129, 1999.
- [11] W. Schnyder. Embedding planar graphs on the grid. In Proceedings of the first annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms (SODA '90), pages 138–148. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1990.

- [12] C. Thomassen. Deformations of plane graphs. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 34(3):244–257, 1983.
- [13] W. T. Tutte. How to Draw a Graph. Proceedings of the London Mathematical Society, s3-13(1):743-767, 1963.

Una introducción al análisis topológico de datos [^]

Natalia García-Colín^{**}

Resumen

Uno de las nuevas técnicas desarrolladas para el ánalisis de grandes cúmulos de información $(Big \ Data)$ es el Análisis Topológico de Datos. Este se ha desarrollado con el propósito de inferir información de un sistema de datos a partir de muestras representadas como un espacio topológico combinatorio. En esta comunicación se presenta una introducción a algunas de las técnicas del análisis topológico de datos.

1. Introducción

La cantidad de datos recaudada por instituciones públicas y privadas ha explotado en los últimos 15 años gracias a la creciente cobertura de las redes de internet y la disminución del costo de almacenamiento de información [8]. En el año 2000 se almacenaron a nivel mundial 800 mil petabytes (PB) de datos y esta cantidad aumenta constantemente. En la actualidad, por ejemplo, Twitter genera siete terabytes (7 TB) de datos diariamente, Facebook 10 TB. Se calcula que la cantidad de datos almacenada anualmente alcance 35 zettabytes (ZB=un billon de terabytes) para el año 2020 [5].

Se denomina Big Data a un conjunto de información tan grande, complejo y, en la mayoría de casos, sin estructura, que resulta imposible estudiarlo con las herramientas usuales de manejo de base de datos. El estudio del manejo del Big Data incluye retos como la optimización de la captura, almacenamiento, búsqueda, trasferencia, análisis, visualización, etc.

Actualmente en muchísimas ramas de la ciencia y la industria se tiene acceso a bases de datos gigantescas con información cruda de la cual se pueden extraer patrones, relaciones y en un siguiente paso, teorías.

Uno de las nuevas técnicas desarrolladas es el Análisis Topológico de Datos (TDA, por sus siglas en inglés), éste se ha practicado con éxito en los últimos 15 años para estudiar como se puede inferir información de un sistema de datos a partir de muestras representadas como un espacio topológico combinatorio. En el TDA se construyen complejos simpliciales asociados a los datos y se infieren características cualitativas del conjunto a partir de la homología de dicho complejo [4].

El propósito de esta comunicación es presentar una introducción a algunas de las técnicas y resultados del análisis topológico de datos.

2. Preliminares

Usualmente, los datos recabados se pueden representar como nubes de puntos en \mathbb{R}^d , donde la dimensión es el número de parámetros que se está estudiando. Un modelo popular que ha surgido para representar dicho conjunto es el de las gráficas geométricas aleatorias y complejos geométricos aleatorios. [3]

Una gráfica geométrica aleatoria $\mathcal{G}(n, r)$ se construye escogiendo n puntos de manera independiente y distribuidos identicamente (i.i.d), de acuerdo con una medida de probabilidad en \mathbb{R}^d . Estos puntos corresponderán a los vértices de una gráfica. Dos vértices x y y se conectan por una arista si y sólo si la distancia entre x y y satisface d(x, y) < r. Normalmente se está interesado en las propiedades asintóticas de estas gráficas cuando $n \to \infty$; es por esto que se piensa a la distancia r como una función de n.

^{*}Trabajo realizado con apoyo de los proyectos CONACyT y PAPIIT IN

 $^{^{**} \}rm INFOTEC$ Centro de Investigación e Innovación en Tecnologias de la Información y Comunicación, natalia.garcia@infotec.com.mx

Algunas de las formas naturales de extender el concepto de una gráfica geométrica a un complejo simplicial son el complejo de Čech y el complejo de Vietoris-Rips.

Definición 1 [Complejo de Čech] Sea $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ una colección de puntos en \mathbb{R}^d , y sea r > 0. El complejo de Čech de X, $\mathcal{C}(X, r)$, es aquel que tiene como vértices a los puntos de X y cuyos k-simplejos $\{x_{i_0} \ldots x_{i_k}\}$ son aquellos tales que $\cap_{i=0}^k B_{\frac{r}{2}}(x_{i_j}) \neq \emptyset$.

Definición 2 [Complejo de Vietoris-Rips] Sea $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ una colección de puntos en \mathbb{R}^d , y sea r > 0. El complejo de Vietoris-Rips de X, $\mathcal{R}(X, r)$, es aquel que tiene como vértices a los puntos de X y cuyos k-simplejos $\{x_{i_0} \ldots x_{i_k}\}$ son aquellos tales que $||x_{i_i} - x_{i_l}|| \leq r$ para toda pareja $1 \leq j, l \leq k$.

A continuación, se usarán $\mathcal{C}(n,r)$ y $\mathcal{R}(n,r)$ para denotar a los complejos de Čech y de Vietoris-Rips, respectivamente, generados aleatoriamente por conjuntos de puntos distribuidos independiente e idénticamente (i.i.d) en \mathbb{R}^d , con función de densidad f, medible y acotada.

Un problema de particular interés dentro del contexto del TDA es estudiar la homología de los complejos de Čech y Vietoris-Rips.

Recuérdese que dado un espacio topológico T, su *i*-homología, denotada $H_i(T)$ es un espacio vectorial, que dim $H_0(T)$ indica el número de componentes conexas del espacio, que cuando i > 1, $H_i(T)$ da información sobre los hoyos de tamaño i y que se le llama dim $H_i(T) = \beta_i(T)$ al *i*-ésimo número de Betti.

Nótese que la conectividad de un complejo simplicial depende únicamente de su 1-esqueleto, es decir de su gráfica subyacente. En el caso de los complejos de Čech y Vietoris-Rips dicha gráfica es, en ambos casos, precisamente la gráfica geométrica aleatoria de sus vértices generadores.

3. Gráficas geométricas aleatorias

La conectividad de las gráficas aleatorias se ha estudiado ampliamente [9]. Aquí presentamos algunos resultados que conciernen precisamente a la conectividad de dichas gráficas, es decir, resultados sobre la 0-homología de los complejos de Čech y Vietoris-Rips.

Teorema 1 Si $nr^d \to 0$ entonces $\mathbb{E}[\beta_0(n, r)] \approx n$

Teorema 2 Si $nr^d \to \lambda \in (0, \infty)$ entonces $\mathbb{E}[\beta_0(n, r)] \approx Cn$ para una constante $C(\lambda) < 1$.

Teorema 3 Sea $c \in \mathbb{R}$ un número fijo, y sea $r = (\frac{\log n + c}{\omega_d n})^{\frac{1}{d}}$. Entonces $\mathbb{P}(\mathcal{G}(n, r) \text{ sea conexa }) \to e^{-e^{-c}}$ cuando $n \to \infty$.

Teorema 4 Para d = 2 existe C > 0, tal que si $A \le nr^2 \le B \log n$, entonces asintóticamente casi seguramente (a. a. s.) $\beta_0(n,r) \le \frac{1}{r^2}e^{-Cnr^2}$, donde las constantes $A \neq B$ solamente dependen de la función densidad f.

4. Complejos gráficos aleatorios

Los números de Betti de los complejos geométricos aleatorios fueron estudiados en sus inicios por Robins [10] y después por [1, 2, 6, 7]. A diferencia de la conectividad en gráficas, que corresponde a la homología cero, en general $H_i(\mathcal{C}(n,r))$, con $i \ge 1$ no es monótona en respecto a r. A continuación presentamos algunos resultados recientes en este respecto.

Teorema 5 Sea $nr^d \to 0, i \ge 1$ y $d \ge 2$. Entonces $\mathbb{E}[\beta_i(n,r)] \sim n^{i+2}r^{(i+1)d}$.

Teorema 6 Sea $d \ge 2$ y $1 \le i \le d-1$ fijo. Supóngase que $nr^d \to 0$.

• $si nr^d \ll n^{\frac{-1}{i+1}}$, entonces a.a.s. $H_i(\mathcal{C}(n,r)) = 0$ y 156 • si $nr^d \gg n^{\frac{-1}{i+1}}$, entonces a.a.s. $H_i(\mathcal{C}(n,r)) \neq 0$.

Teorema 7 Sea $d \ge 2$ y $1 \le i$ fijo. Supóngase que $nr^d \to 0$.

- si $nr^d \ll n^{\frac{-1}{2i+1}}$, entonces a.a.s. $H_i(\mathcal{R}(n,r)) = 0$ y
- si $nr^d \gg n^{\frac{-1}{2i+1}}$, entonces a.a.s. $H_i(\mathcal{R}(n,r)) \neq 0$.

El estudio de los números de Betti es mucho más complicado cuando $nr^d \to \lambda \in (0, \infty)$.

Teorema 8 Sea $d \ge 2$ y $0 \le i \le d-1$ fijo y $nr^d \to \lambda \in (0,\infty)$. Entonces $\mathbb{E}[\beta_i(n,r)] \sim n$.

En el caso cuando $nr^d \to \infty$ el orden de magnitud correcto de los números de Betti no es conocido, pero existen cotas. En particular se tienen los siguientes resultados:

Teorema 9 Sea $\mathcal{R}(n,r)$ complejo de Vietoris-Rips aleatorio generado por una distribución uniforme en un convexo de volumen unitario en \mathbb{R}^d . Entonces, $\mathbb{E}[\beta_i(n,r)] = O(ne^{-c_d nr^d}(nr^d)^i)$, para una constante independiente de $i, c_d \geq 0$.

Corolario 10 Sea $C > \frac{1}{c_d}$ una constante. Si $nr^d \ge C \log n$ entonces a.a.s $H_k(\mathcal{R}(n,r)) = 0$.

Teorema 11 Sea $d \ge 2$ fijo, y supóngase que se tiene una distribución subyacente uniforme sobre un convexo. Entonces existen A, B tales que:

- si $nr^d \ll \frac{1}{n^{\frac{1}{2i+1}}}$, entonces a.a.s. $H_i(\mathcal{R}(n,r)) = 0$,
- si $\frac{1}{n^{\frac{1}{2i+1}}} \ll nr^d \le A \log n$, entonces a.a.s. $H_i(\mathcal{R}(n,r)) \ne 0$,
- $y \operatorname{si} nr^d \ge B \log n$, entonces a.a.s. $H_i(\mathcal{R}(n,r)) = 0$,

En el caso del complejo de Čech aleatorio no se conoce una cota superior para los números de Betti, pero sí se conoce el orden de magnitud para el desvanecimiento de la homología:

Teorema 12 Sea $d \ge 2$ y $1 \le i \le d - 1$ fijo, y supóngase que se tiene una distribución subyacente uniforme sobre un convexo. Entonces existen A, B tales que:

- si $nr^d \ll \frac{1}{n^{\frac{1}{i+1}}}$, entonces a.a.s. $H_i(\mathcal{C}(n,r)) = 0$,
- $si \frac{1}{n^{\frac{1}{i+1}}} \ll nr^d \le A \log n$, entonces a.a.s. $H_i(\mathcal{C}(n,r)) \ne 0$,
- $y \ si \ nr^d \ge B \log n$, entonces a.a.s. $H_i(\mathcal{C}(n,r)) = 0$,

5. Observaciones finales y conclusiones

Existen generalizaciones de los teoremas anteriores a casos donde los puntos se encuentran sobre variedades o superficies de Riemman.

Adicionalmente también dentro del TDA hay otras técnicas que se estudian, como la homología persistente, aplicaciones de la teoría de Morse, etc.

Entre las direcciones poco exploradas e interesantes se encuentra la teoría extremal para hipergráficas aplicada al análisis de datos, además de los aspectos algorítmicos derivados de la teoría existente.

- Bobrowski, O., Adler, R.J.: Distance functions, critical points, and the topology of random Čech complexes, arXiv:1107.4775 (2011),
- [2] Bobrowski, O., Mukherjee, S.: The topology of probability distributions on manifolds, to appear., Probability theory and related fields (2014).
- Bobrowski, O., Kahle, M.: Topology of random geometric complexes: a survey, arXiv:1409.4734v1 (2014).
- [4] Carlsson, G.: Topology and Data., Bulletin of the American Mathematical Society no. 46 (2009) 255–308.
- [5] Eaton, C., Deroos, D., Deutsch, T., Lapis, G., Zikopoulos, P.: Understanding Big Data. Analytics for enterprise class Hadoop and Streaming Data, The McGraw Hill Companies, 2012.
- [6] Kahle, M.: Random geometric complexes., Discrete and Computational Geometry 45 no. 3 (2011).
- [7] Kahle, M. Meckes, E.: Linit theorems for Betti numbers of random simplicial complexes., Homology and homotopy Appl. 15 no. 1 (2013).
- [8] Manyika, J., Chui, M., Brown, B., Bughin, J., Dobbs, R., Roxburgh, C., Hung-Byers, A.: Big data: The next frontier for innovation, competition, and productivity, http://www.mckinsey.com/insights/business_technology/big_data_the_next_frontier_for_ innovation, 2011.
- [9] Penrose, M.: Random Geometric Graphs. Oxford Studies in Probability, vol. 5, Oxford University Press, UK 2003.
- [10] Robins, V.: Betti number signatures of homogeneous poisson point processes, Physical Review E, 74 no. 6 2006,

Conexidad promedio*

Diego González-Moreno[†]

Mucuy-kak Guevara[‡]

Mika Olsen[§]

Resumen

La conexidad promedio, $\overline{\kappa}(G)$, de una gráfica conexa G es la suma del máximo número de uvtrayectorias internamente disjuntas, sobre todas las parejas de vértices $u \neq v$, entre el número de parejas de vértices, es decir, el promedio del número máximo de las uv-trayectorias. En este trabajo mostraremos cotas superiores e inferiores de la conexidad promedio en términos del orden, tamaño, cuello y conexidad. También se dan cotas de la conexidad promedio de las gráficas bipartitas y de las gráficas permutación, mientras que se da el valor de la conexidad promedio de las gráficas composición y de los k-árboles.

Palabras Clave. Conexidad. Conexidad Promedio. Teorema de Menger.

1 Introducción

Consideremos una gráfica conexa G = (V, E). Un conjunto de vértices, $S \subset V(G)$, es llamado *conjunto* de corte si al removerlo la gráfica resultante, G - S, es disconexa. Decimos que una gráfica conexa es t-conexa, si cada conjunto de corte tiene cardinalidad al menos t. La conexidad, $\kappa(G)$, de una gráfica conexa G es definida como el máximo número t tal que G es t-conexa. El famoso teorema de Menger [6] caracteriza la conexidad de una gráfica en términos de el mínimo número de trayectorias internamente disjuntas que pueden encontrarse entre cualquier pareja de vértices:

Teorema 1 (Menger) Una gráfica es k-conexa si y sólo si contiene k trayectorias internamente disjuntas entre cualesquiera dos vértices.

Si para dos vértices u, v de G definimos a $\kappa_G(u, v)$ como el número máximo de trayectorias de u a vinternamente disjuntas a pares, entonces en vista del Teorema de Menger podemos definir a la conexidad de una gráfica como $\kappa(G) = \min\{\kappa_G(u, v) : u, v \in V(G)\}$. Basados en el teorema de Menger, Beineke, Ollerman y Pippert definieron en [1] un nuevo parámetro para medir la conexidad global de una gráfica, el cual da una idea más precisa de la conexión de la gráfica.

La conexidad promedio, $\overline{\kappa}(G)$, de una gráfica finita conexa G está definida como el promedio, sobre todas las parejas de vértices $u \neq v$, del máximo número de uv-trayectorias internamente ajenas, esto es,

$$\overline{\kappa}(G) = \frac{\sum_{u,v \in V(G)} \kappa_G(u,v)}{\binom{n}{2}}$$

La conexidad promedio, $\overline{\kappa}(G)$, de una gráfica G es una medida del número esperado de vértices que deben *atacarse* para desconectar a G.

Es claro que $\overline{\kappa}(G) \ge \kappa(G)$ para toda gráfica G, más aun $\overline{\kappa}(G) = 1$ si y sólo si G es un árbol. Algunas cotas para la conexidad promedio han sido dadas:

Teorema 2 ([1]) Sea G una gráfica de orden n y tamaño m. Entonces

$$\overline{\kappa}(G) \le \frac{2m}{n} - \frac{r(n-r)}{n(n-1)}$$

^{*}Proyecto Conacyt

[†]Universidad Autónoma Metropolitana Cuajimalpa, dgonzalez@correo.cua.uam.mx

[‡]Facultad de Ciencias, UNAM, mucuy-kak.guevara@ciencias.unam.mx

 $^{^{\}S}$ Universidad Autónoma Metropolitana Cuajimalpa, <code>olsen@correo.cua.uam.mx</code>

donde $r = 2m - n\lfloor 2m/n \rfloor$. Además, la igualdad se cumple si y sólo si para cada pareja de vértices $u \neq v \text{ de } G$,

- a) $|d(u) d(v)| \le 1 y$
- b) $\overline{\kappa}(u,v) = \min\{d(u), d(v)\}.$

Teorema 3 ([3]) Sea G una gráfica de orden n y grado promedio \overline{d} . Entonces

$$\frac{\overline{d}^2}{n-1} \le \overline{\kappa}(G) \le \overline{d}.$$

2 Algunas cotas para la conexidad promedio

Se obtuvieron cotas superiores de la conexidad promedio en términos del orden, tamaño y cuello con la condición de que la conexidad en vértices de G fuera al menos 2.

Teorema 4 Sea G una gráfica de orden n, tamaño m y cuello g. Si $\kappa(G) \geq 2$, entonces

$$\overline{\kappa}(G) \leq \frac{2(n-2)}{g-2} + \frac{m}{\frac{n(n-1)}{2}} \left(1 - \frac{n-2}{g-2}\right).$$

Corolario 5 Sea G una gráfica r-regular de orden n y cuello g. Si $\kappa(G) \ge 2$, entonces

$$\overline{\kappa}(G) < \frac{2(n-2)}{g-2} + \frac{r}{n-1}(1 - \frac{n-2}{g-2}).$$

Corolario 6 Sea G una gráfica, la cual no es completa, de orden n y cuello g. Si $\kappa(G) \geq 2$, entonces

$$\overline{\kappa}(G) < 1 + \frac{n-2}{g-2}.$$

Se obtuvieron también cotas inferiores de la conexidad promedio a partir de su conexidad y un conjunto de corte minimal.

Teorema 7 Sea G una gráfica conexa con $\kappa(G) = \kappa$. Si $S \subset V$ es un conjunto de corte minimal y H_1, H_2, \ldots, H_r son las componentes conexas de G - S, con $|V(H_i)| = h_i, i = 1, 2, \ldots, r$, entonces

$$\overline{\kappa}(G) \ge \frac{\kappa \sum_{i < j} h_i h_j + \kappa \sum_{i=1}^r \binom{h_i}{2} + \kappa |S| |V(G) \setminus S| + h\binom{|S|}{2}}{\binom{n}{2}}$$

donde $h = \max\{\kappa, r\}.$

Corolario 8 Sea G una gráfica de orden $n \operatorname{con} \kappa(G) = \kappa$. Entonces

$$\overline{\kappa}(G) \ge \frac{2\kappa(n-2+\kappa(n-\kappa))}{n(n-1)}$$

Si G es un árbol, la igualdad en el teorema 7 se cumple, así que la cota es justa. Denotamos por κ_0 la cota inferior obtenida en el teorema 7.

Proposición 9 Sea G una gráfica conexa con m aristas, $\kappa(G) = \kappa \ y \ v \in V(G)$ tal que N(v) es un conjunto de corte minimal de G y G - N[v] es conexa, con d(v) = t.

1. Si $\kappa = 1$ y $m < \frac{1}{2}\sqrt{n(n^2 - n + t^2 - t)}$; y 2. si $\kappa \ge 2$ y $m < \frac{n}{2}\sqrt{\kappa(n-1)}$, entonces

$$\frac{\overline{d}^2}{n-1} < \kappa_0$$

De manera similar a como se demostró el teorema 7 se buscó un teorema que diera una cota superior para la conexidad promedio:

Teorema 10 Sea G una gráfica conexa con $\kappa(G) = \kappa$. Si $S \subset V$ es un conjunto de corte minimal y H_1, H_2, \ldots, H_r son las componentes conexas de G - S, con $|V(H_i)| = h_i, i = 1, 2, \ldots, r$, entonces

$$\overline{\kappa}(G) \le \frac{\kappa \sum_{i < j} h_i h_j + \sum_{i=1}^r \binom{h_i}{2} (h_i - 1 + \kappa) + \binom{\kappa}{2} (n-1) + \sum_{i=1}^r (h_i \kappa) (h_i - 1 + \kappa)}{\binom{n}{2}}.$$

3 Conexidad promedio en algunas familias de gráficas

Se estudiaron resultados de la conexidad promedio de las gráficas bipartitas, composición de gráficas , gráficas permutación y k-árboles.

3.1 Gráficas bipartitas

Para las gráficas bipartitas se dio una cota superior, la cual se alcanza cuando es bipartita completa.

Teorema 11 Sea G una gráfica bipartita con partición (A, B). Entonces

$$\overline{\kappa}(G) \le \frac{b\binom{a}{2} + a\binom{b}{2} + a^2b}{\binom{a+b}{2}},$$

donde |A| = a, $|B| = b \operatorname{con} a \leq b$. Más aún, la cota es justa si y sólo si G es la gráfica bipartita completa.

3.2 Composición de gráficas

Definición 1 Dadas dos gráficas $G \ y \ H$, la composición [5] de las gráficas $G \ y \ H$ es la gráfica G[H]con conjunto de vértices $V(G) \times V(H) \ y \ (u, v)(u', v')$ es una arista en G[H] si $uu' \in E(G)$, o $u = u' \ y$ $vv' \in E(H)$.

Se logró establecer la conexidad promedio en la composición de gráficas.

Teorema 12 Sea G una gráfica con n vértices y m aristas y sea H una gráfica con p vértices, entonces

$$K(G[H]) = nK(H) + mp^{2}(p-1) + p^{3}K(G).$$

3.3 Gráficas permutación

Definición 2 Dados una gráfica G y una permutación π de V(G), la gráfica permutación G^{π} es la gráfica que contiene dos copias disjuntas de G y añadimos un apareamiento cuyas arista unen a cada vértice v de la primera copia de G con el vértice $\pi(v)$ en la segunda copia de G.

Piazza dio las siguientes cotas para la conexidad en vértices de las gráficas permutación:

Teorema 13 [7] Sean G una gráfica y π una permutación de V(G), entonces

$$\min\{2\kappa(G), \delta(G) + 1\} \le \kappa(G^{\pi}) \le \delta(G) + 1$$

Con la ayuda del teorema de Piazza se dan cotas para la conexidad promedio de una gráfica permutación. **Teorema 14** Sea G una gráfica de orden $n \neq \pi$ una permutación de V(G). Entonces

$$\min\left\{\frac{(n-1)^2\overline{\kappa}(G) + (n-1)^2 + 2\alpha n(n-1)}{3n-2}, \overline{d} + 1\right\} \le \overline{\kappa}(G^{\pi}) \le \overline{d} + 1,$$

 $\operatorname{con} \alpha = \min\{2\kappa(G), \delta(G) + 1\}.$

3.4 k-árboles

Un k-árbol es una generalización del concepto de árboles y está definido recursivamente como sigue [2]:

Definición 3 1. La gráfica completa K_k es un k-árbol.

2. Si G es un k-árbol y H es una subgráfica completa de G con k vértices, entonces la gráfica obtenida de aãdir un nuevo vértice adyacente a todos los vértices de H es también un k-árbol.

También fue posible establecer la conexidad promedio de los k-árboles.

Teorema 15 Sea T un k-árbol con n vértices, entonces

$$\overline{\kappa}(T) = \frac{k[k(n-k) + (n-1)^2]}{n(n-1)}.$$

- Beineke, L. W., Oellermann, O. R., Pippert, R. E.: The average connectivity of a graph, Discrete Math. 253 (2002), 31–45.
- [2] Beineke, L. W., Pippert R. E.: Properties and characterization of k-tees, Mathematika 18 (1971), 141–151.
- [3] Dankelmann, P., Oellerman, O. R.: Bounds on the average connectivity, Discrete Appl. Math. 129 (2003), 305–318.
- [4] Elmallah E. S., Colbourn C. J.: Partitioning the edges of a planar graph into two partial k-trees, Combinatorics, graph theory, and computing, Proc. 19th Southeast. Conf. Congr. Numer., 66 (1988), 69–80.
- [5] Imrich, W., Klavžar, S.: Product graphs, in: Structure and Recognition, in: Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, Wiley-Interscience, New York 2000.
- [6] Menger, K.: Zur allgemeinen Kurventheorie, Fund. Math. 10 (1927) 96–115.
- [7] Piazza, B.: Edge-connectivity of permutation graphs, Congr. Numer., 65 (1988), 7–16.
- [8] Parekh O.: Forestation in hypergraphs: linear k-trees. Electron. J. Combin., 10 (2003) #N12.

Turán proporcional y cotas para el número cromático*

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval[†]

Luis Montejano Peimbert[‡]

Resumen

El teorema de Turán da condiciones para encontrar subgráficas completas grandes de un tamaño fijo en una gráfica a partir de pedir que la gráfica tenga muchas aristas. En este trabajo buscamos familias de gráficas en las que haya un resultado similar, pero que nos permita encontrar gráficas completas *más grandes*. La motivación de esta pregunta es un resultado geométrico de Katchalski y Liu que garantiza la existencia de un teorema de Helly proporcional.

Se tienen resultados en dos direcciones. Por un lado, se caracteriza aquellas familias en las que existe una constante β tal que una proporción de α aristas garantiza una subgráfica completa que usa $\alpha\beta$ de los vértices. Por otro lado, se da un criterio para garantizar que en una familia de gráficas una proporción de aristas garantice que el número de clan se vaya a infinito conforme el número de vértices se va a infinito. Estos resultados están fuertemente relacionados con acotar el número cromático y por lo tanto probamos una cota superior que usa el número de clan y una proporción arbitrariamente pequeña de los vértices.

Palabras Clave. Teoría de gráficas extremal. Coloraciones. Clanes. Teorema de Turán

1 Introducción

Este trabajo forma parte de una investigación de doctorado en teoría de gráficas. El trabajo consiste en relacionar dos temas clásicos: la coloración de gráficas y la búsqueda de subgráficas completas grandes. Esta relación se da naturalmente al estudiar la siguiente pregunta: ¿qué se necesita pedirle a una gráfica para tener una subgráfica completa *proporcionalmente* grande? Como más adelante veremos, la pregunta está motivada por un contexto geométrico.

Al estudiar esta pregunta se encuentran relaciones con varios temas de teoría de gráficas. En esta comunicación haremos un breve repaso de estos temas e indicaremos cómo se conectan con la pregunta original. También enunciaremos resultados precisos con respecto a:

- Cotas del número cromático de una gráfica en términos de su número de vértices y su número de clan.
- Caracterizaciones de familias de gráficas en los que una proporción de aristas garantiza un clan proporcionalmente grande.
- Caracterización de familias de gráficas en los que una proporción de aristas garantiza que el clan se va infinito conforme la cantidad de vértices se va a infinito.

En la Sección 2 daremos un breve repaso de teoría de gráficas y de clanes. Plantearemos con más precisión la pregunta de estudio. En la Sección 3 recordaremos qué es una coloración de una gráfica y hablaremos de algunas cotas superiores e inferiores. En la Sección 4 se dan los resultados del trabajo.

^{*} Trabajo realizado con el apoyo de la beca doctoral Conacy
t277462y del proyecto Conacyt166306

[†]Instituto de Matemáticas - UNAM, I3M - Université Montpellier leomtz@im.unam.mx

[‡]Instituto de Matemáticas - UNAM, luismontej@gmail.com

2 Gráficas, clanes y clanes proporcionales

Recordemos que una gráfica G consiste de un conjunto V(G) de vértices y de un conjunto E(G) de parejas de vértices a las que llamamos aristas. En este trabajo estudiaremos únicamente gráficas con una cantidad finita de vértices. Además, las gráficas serán simples, es decir, entre cada par de vértices hay a lo más una arista y no hay aristas de un vértice a sí mismo. Diremos que dos vértices u y v son adyacentes si $\{u, v\}$ es una arista.

A un subconjunto de vértices de una gráfica en el cual no haya dos de ellos que sean adyacentes le llamaremos un conjunto *independiente*. El *número de independencia* de G se define como el mayor tamaño que tiene un conjunto independiente de G y lo denotamos como $\alpha(G)$. De manera similar, un *clan* es un subconjunto de vértices en el cual cualesquiera dos de ellos son adyacentes. El tamaño de un clan con la mayor cantidad de elementos se denota con $\omega(G)$ y se le conoce como el *número de clan* de la gráfica.

Intuitivamente, una gráfica con una cantidad fija de vértices y muchas aristas debe tener un número de clan grande. El teorema de Turán [5] es un resultado en teoría de gráficas extremal que hace más precisa esta observación.

Teorema 1 Sea G una gráfica con n vértices y r un entero positivo. Si G tiene más de

$$\left(1 - \frac{1}{r-1}\right) \cdot \frac{n^2}{2}$$

aristas, entonces $\omega(G) \ge r$.

Notemos que asintóticamente la expresión $\left(1 - \frac{1}{r-1}\right) \cdot \frac{n^2}{2}$ es una proporción de las aristas. De esta manera, lo que el teorema de Turán nos garantiza es que una proporción de las aristas asegura la existencia de una gráfica completa grande de un tamaño *fijo*. ¿Será posible mejorar este resultado para que el tamaño de la gráfica completa sea *mayor*? Por ejemplo, ¿será posible que una proporción grande de aristas nos garantice que una proporción grande de vértices forma una subgráfica completa? La respuesta en general es no.

Proposición 2 Existen gráficas que tienen el 99.99% de la máxima cantidad posible de aristas, pero que no tienen subgráficas completas que usen el 0.001% de los vértices.

Sin embargo, hay algunas familias de gráficas en las cuales sí se tiene un teorema de Turán más fuerte. Consideremos un ejemplo que viene de un contexto geométrico. Una gráfica de intersección de intervalos se construye como sigue. Tomamos como vértices una cantidad finita de intervalos acotados en \mathbb{R} . Si tenemos dos vértices, pondremos una arista si los intervalos correspondientes se intersectan. A la familia de todas las gráficas de intersecciones de intervalos la denotaremos por \mathcal{G}_I . Un resultado clásico de convexidad de Katchalski y Liu [3] se puede enunciar en los siguientes términos:

Teorema 3 Sea $G \in \mathcal{G}_I$ una gráfica de intersección de intervalos con n vértices y $\alpha \in [0, 1]$ un número real. Si G tiene más de

$$\alpha \cdot \binom{n}{2}$$

aristas, entonces $\omega(G) \geq \frac{\alpha}{2} \cdot n$.

Esto es una versión más fuerte del teorema Turán para la familia \mathcal{G}_I , pues por ejemplo con la mitad de las aristas el teorema de Turán nos da únicamente la existencia de un triángulo, pero el teorema de Katchalski y Liu nos da una completa con $\frac{n}{4}$ vértices. En particular esta expresión se va infinito cuando n se va a infinito. Además, α y $\frac{\alpha}{2}$ varían únicamente en un factor constante. A partir de estas observaciones surgen las siguientes dos preguntas que hacen más precisa la tarea de encontrar un *mejor* teorema de Turán.

- ¿Qué hay que pedirle a una familia de gráficas para que exista $\beta \in (0,1)$ de modo que una proporción $\alpha \in (0,1)$ de aristas garantice que $\omega(G) \ge \alpha \beta n$?
- ¿Qué hay que pedirle a una familia de gráficas para que una proporción α de aristas garantice que $\omega(G) \to \infty$ conforme $|V(G)| \to \infty$?

Tenemos resultados que responden estas preguntas. Las respuestas están intimamente relacionadas con las gráficas bipartitas de la familia y con los números de coloración de la familia. Por esta razón, antes de enunciar los resultados recordaremos algunos resultados de teoría cromática de gráficas.

3 Coloraciones y cotas del número cromático

Sea G una gráfica. Para un entero positivo c denotamos $[c] = \{1, 2, ..., c\}$. Una c-coloración de una gráfica G es una función $f: G \to [c]$ tal que para cualquier par de vértices adyacentes $v_1 y v_2$ tenemos que $f(v_1) \neq f(v_2)$. Intuitivamente esto corresponde a colorear los vértices con a lo más c colores de manera propia, es decir, de modo que vértices adyacentes sean de diferente color. El número cromático $\chi(G)$ de una gráfica es la mínima cantidad de colores que necesitamos para hacer esta tarea, es decir, la mínima c para la cual existe una c-coloración. A cada conjunto de la forma $f^{-1}(i)$ se le llama clase cromática. Una gráfica es bipartita si admite una 2-coloración.

En una coloración propia todos los vértices de un clan deben recibir colores distintos y por lo tanto $\chi(G) \ge \omega(G)$. Una pregunta clásica en la teoría de gráficas cromática es determinar si es posible acotar superiormente $\chi(G)$ por una función de $\omega(G)$. La respuesta es negativa. Hay pruebas probabilísticas (Erdős, [1]) y constructivas (Micielski, [4]) que muestran que incluso una gráfica sin triángulos puede tener número cromático arbitrariamente grande. En consecuencia, las familias de gráficas para las cuales existe una función f tal que $\chi(G) \le f(\omega(G))$ resultan ser interesantes y han sido estudiadas con anterioridad. Una excelente referencia al respecto es el trabajo de Gyárfás [2].

Por otro lado, sí es posible acotar $\chi(G)$ superiormente con una función que dependa de |V(G)| y de $\omega(G)$. Una cota trivial es $\chi(G) \leq |V(G)|$. Una mejor cota es la siguiente

Proposición 4 Sea G una gráfica. Entonces:

$$\chi(G) \le \frac{1}{2} \cdot |V(G)| + \frac{1}{2} \cdot \omega(G).$$

Este es un ejercicio clásico. Notemos que baja el coeficiente de |V(G)|. En la cota trivial este coeficiente es 1. En este resultado el coeficiente es $\frac{1}{2}$. Una pregunta que se desprende de esta observación es ¿qué tanto tenemos que utilizar |V(G)|? Más precisamente, ¿qué tanto podemos bajar el coeficiente? Como veremos en la siguiente sección, este coeficiente puede acercarse a cero tanto como queramos y aún así completar la cota con una función de $\chi(G)$.

Otra pregunta interesante es saber si se pueden obtener mejores cotas si trabajamos dentro de una familia de gráficas particular. Los resultados de la siguiente sección muestran que este problema y el problema enunciado en la sección anterior están fuertemente relacionados.

4 Resultados

Con respecto a acotar el número cromático tenemos el siguiente resultado.

Proposición 5 Sea $\epsilon > 0$ un número real. Entonces existe una función f_{ϵ} tal que para cualquier gráfica *G* se tiene

$$\chi(G) \le \epsilon \cdot |V(G)| + f_{\epsilon}(\omega(G)).$$

Con respecto a encontrar mejores versiones del teorema de Turán en familias tenemos dos resultados principales. El primero es una caraterización de cuándo una proporción de aristas garantiza una gráfica completa de un múltiplo constante de esa proporción.

Teorema 6 Sea \mathfrak{G} una familia de gráficas cerrada bajo gráficas inducidas. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- Existen reales c y d tales que
 - para toda $G \in \mathfrak{G}$ se tiene $\chi(G) \leq c\omega(G)$ y
 - para toda $B \in \mathfrak{G}$, B bipartita, se tiene $|E(G)| \leq d|V(G)|$.
- & tiene teorema de Turán proporcional lineal, es decir
 - Existe β tal que para $G \in \mathfrak{G}$ si $|E(G)| \ge \alpha |V(G)|$, entonces $\omega(G) \ge \alpha \beta n$.
- Existe una constante C tal que
 - Si G es una gráfica en n vértices con $\omega(G) \leq k$, entonces $|E(G)| \leq Cnk$.

El segundo resultado es un criterio para que el número de clan se vaya a infinito conforme el número de vértices se va a infinito.

Teorema 7 Sea \mathfrak{G} una familia de gráficas cerrada bajo gráficas inducidas en la que existe una constante C tal que para cualquier gráfica bipartita B de la familia se tiene $|E(B)| \leq C|V(B)|$. Entonces para cualquier $\alpha > 0$, una proporción de α aristas en las gráficas de \mathfrak{G} garantiza que $\omega(G)$ se va a infinito conforme |V(G)| se va a infinito.

Para probar estos resultados se pasa por algunos otros resulados intermedios. Actualmente está en preparación un artículo en el cual se demuestran estos teoremas. Aún queda más trabajo por hacer para seguir entendiendo la relación entre cotas para el número cromático y versiones más fuertes del teorema de Turán. Específicamente estamos trabajando en

- Clasificar las familias de gráficas con Turán proporcional.
- Completar el criterio del Teorema 7 a una caraterización.

- [1] Erdős, P.: Graph theory and probability, Canad. J. Math 1 (1959), 34–38.
- [2] Gyárfás, A.: Problems from the world surrounding perfect graphs, Applicationes Mathematicae 3–4 (1987), 413–441.
- [3] Katchalski, M., Liu, A.: A problem of geometry in \mathbb{R}^n , Proc. Amer. Math. Soc. 75 (1979), 284–288.
- [4] Mycielski, J.: Sur le coloriage des graphes, Colloq. Math 3 (1955), 161–162.
- [5] Turán, P.: On an extremal problem in graph theory, Matematikai es Fizikai Lapok 48 (1941), 436–452.

Coloraciones completas de gráficas planas

Sara Murillo Garcia^{*} M. Gabriela Araujo-Pardo^{**} Christian Rubio-Montiel^{***}

Esteban Contreras ****

Andrea Tort *****

Resumen

En este trabajo abordamos una clase especial de coloraciones denominadas coloraciones completas. Más específicamente, trabajamos con el número acromático y pesudoacromático en gráficas planas.

Palabras Clave. Número pseudoacromático. Número acromático. Coloraciones completas.

1. Introducción

En la primera sección definiremos coloración completa, número acromático y pesudoacromático y cuándo fueron introducidos. En la segunda sección hablaremos del grosor de una gráfica. En la última introduciremos la pregunta que motivó a desarrollar este trabajo. Se utilizó un resultado referente al grosor de una gráfica para resolver un problema de coloraciones completas para gráficas planas.

2. Número acromático y pseudoacromático

Dada una gráfica G, una coloración de los vértices $\{1, ..., c\}$ se dice que es *completa*, si cualquier par de colores (i, j) están representados en una arista. El *número pseudoacromático* es el máximo c para el cual G admite una coloración completa; y se denota como $\psi(G)$. El número acromático es el máximo c para el cual G admite una coloración completa y propia; y se denota como $\alpha(G)$. El número pseudoacromático fue introducido por Gupta en 1969 [8] y el número acromático por Harary, Hedetniemi y Prins en 1967 [9].

Recordemos que el número cromático de una gráfica G, $\chi(G)$, es el mínimo número de colores que se necesitan para colorear los vértices de una gráfica de tal manera que dos vértices adyacentes no reciban el mismo color. Se puede observar que toda coloración propia de G que alcance el número acromático es completa, ya que si no lo fuera, podríamos recolorear dos clases cromáticas que no tengan una arista en común con el mismo color y disminuir el número cromático, lo cual sería una contradicción.

Observado esto no es difícil probar la siguiente desigualdad:

$$\chi(G) \le \alpha(G) \le \psi(G).$$

Dada una gráfica G, se tienen las siguientes cotas superiores para el número pseudoacrómático:

^{*}Instituto de Matemáticas, UNAM. jani.murillo@ciencias.unam.mx

^{**}Instituto de Matemáticas, UNAM. garaujo@math.unam.mx

^{***} Instituto de Matemáticas, UNAM. tchristian@math.unam.mx

^{*****}Facultad de Ciencias, UNAM. flamealchemist@comunidad.unam.mx

^{*****} Facultad de Ciencias, UNAM. ramostort@hotmail.com

$$\begin{pmatrix} \psi \\ 2 \end{pmatrix} \le e$$
$$\frac{\psi^2 - \psi}{2} \le e$$
$$\psi \le \frac{1 + \sqrt{1 + 8e}}{2}$$

3. Grosor

Dada un gráfica G, el grosor de la gráfica es el mínimo número de subgráficas planas de G tal que su unión es G y se denota como t(G). El problema del grosor se remonta a 1961 cuando Harary conjeturó lo siguiente:

Conjectura 1 "Dada una gráfica G de orden 9, se tiene que G no es plana o \overline{G} no es plana."

La conjetura se traduce en determinar si K_9 es la unión de 2 gráficas planas, y fue resuelta por Battle et al. [4] y Tutte [5], que determinaron que $t(K_9) = 3$ (y por ello la conjetura de Harary es cierta). A raíz de este problema, Tutte en 1963 generalizó el problema al definir el concepto de grosor [6]. Uno de los problemas que estuvo abierto durante varios años fue el de determinar $t(K_n)$. Fue hasta 1976 que Alekseev y Gonoakov [3] lograron demostrar que:

Teorema 1 (Alekseev, Gonoakov) $t(K_N) = (N+7)/6$ para $p \neq 9, 10$ pues $t(K_9) = t(K_{10}) = 3$.

4. Coloraciones completas en gráficas planas

Recordemos que la característica de Euler para la esfera, y por consiguiente para el plano, de cualquier encaje 2-celular de una gráfica es n - e + f = 2 (donde *n* es el número de vértices, *e* el número de aristas y *f* el número de caras). De ahí se tiene que si *G* es una gráfica plana, entonces e = 3n - 6. Así que el número pseudoacromático para gráficas planas queda acotado superiormente por:

$$\begin{split} \psi &\leq \frac{1 + \sqrt{1 + 8(3n - 6)}}{2}, \quad \mathbf{y} \\ \psi &\leq \frac{1 + \sqrt{24n - 47}}{2} \end{split}$$

La pregunta que nos ocupa en este artículo es la siguiente: dados c colores, ¿cuál es la gráfica plana de menor orden tal que $\psi(G) = c$? Por ejemplo, si c = 3, es claro que la gráfica plana más pequeña que tiene número pseudoacromático 3 es K_3 . En general, las gráficas planas que nos sirven son aquellas que maximizan el número de triángulos. Lo que se expone a continuación es la construcción de una familia infinita de gráficas que alcanza la cota superior. Esta construcción se basa esencialmente en la dada originalmente por Beineke y Harary en [7], para determinar el grosor de una gráfica completa.

La base de esta construcción es una matriz a de $k \ge k$ descrita de la siguiente manera. La primera fila son los números $1, 2, \ldots, k$; la segunda fila se obtiene de sumarle a la primera +1 (mod k). La tercera fila se obtiene de sumarle -1 (mod k) a la primera, la cuarta +2; la quinta -2, etc. La última fila viene de sumarle a la primera k/2 si k es par, y (k-1)/2 si k es impar. De manera más formal, la matriz atienen como entradas:

$$a_{ij} \equiv j + (-1)^i \left[\frac{i}{2}\right], \, (\text{mod } \mathbf{k}), \, (i, j = 1, ..., k)$$

$$168$$

A partir de la matriz a, construiremos la matriz a' que consiste simplemente en primar las entradas de la matriz a siguiendo la siguiente regla: a_{ij} se prima si y sólo si $a_{ij} > j$

Por ejemplo, si k = 3, las matrices $a \ge a'$ correspondientes serían

	(1)	2	3		(1)	2	3
a =	2	3	1	a' =	2'	3'	1
	$\sqrt{3}$	1	2/		$\sqrt{3'}$	1	2/

Las matrices a y a' tienen las siguientes propiedades que son relativamente fáciles de probar:

Lema 2 Sean a y a' las matrices definidas anteriormente:

- 1. En cada renglón y en cada columna de a, los elementos 1, ..., k aparecen sólo una vez.
- 2. En a', el elemento $l = a_{ij}$, $(j \neq l)$, está primado si y sólo si el elemento j en la columna l no lo está.
- 3. Dos elementos distintos r y s, son adyacentes en precisamente dos columnas de a. Más aún, en una de las columnas de a', r y s comparten una prima, mientras que en la otra columna tanto r y s tienen prima o no.

Utilizando la matriz a' construiremos una gráfica plana que tiene $N = 6k^2 + 3k + 1$ vértices y que tiene número pseudoacromático 6k + 1. Primero vamos a construir k gráficas planas $G_1, G_2, ..., G_k$. Cada una de estas gráficas tendrá 6k vértices que denotaremos como $u_i, u'_i, v_i, v'_i, w_i, w'_i$. Para construir G_r utilizaremos la columna r de la matriz a'. Primero vamos a construir 6 cadenas $C_{r,u}, C_{r,v}, C_{r,w}$, $C_{r,u'}, C_{r,v'}$ y $C_{r,w'}$, y cada cadena tendrá k vértices. Los vértices de la cadena $C_{r,u}$ estarán denotados con el símbolo u y tendrán como subíndice los elementos de la columna r de la matriz a' en ese orden (respetando las primas). Las cadenas $C_{r,v}$ y $C_{r,w}$ se obtienen de $C_{r,u}$ cambiando el símbolo u por v y por w respectivamente. Las cadenas $C_{r,u'}, C_{r,v'}$ y $C_{r,w'}$ se obtienen poniendo (con el mismo orden) los mismos vértices de $C_{r,u}, C_{r,v}$ y $C_{r,w}$ respectivamente, pero intercambiando las primas.

Por ejemplo, para k = 3, utilizando la matriz a' de 3 x 3 mencionada anteriormente tenemos que:

$$\begin{array}{lll} C_{1,u} &= \left\{ u_1, u_2', u_3' \right\} & & C_{1,u'} = \left\{ u_1', u_2, u_3 \right\} \\ C_{1,v} &= \left\{ v_1, v_2', v_3' \right\} & & C_{1,v'} = \left\{ v_1', v_2, v_3 \right\} \\ C_{1,w} &= \left\{ w_1, w_2', w_3' \right\} & & C_{1,w'} = \left\{ w_1', w_2, w_3 \right\} \end{array}$$

Consideremos ahora la figura 1. Colocamos cada cadena en el triángulo que lleva su etiqueta con la siguiente regla. La cadena $C_{1,u}$ se coloca en el triángulo que le corresponde de tal manera que empiece con el vértice u_r y cada vértice de la cadena se hace adyacente a los vértices v'_r y w'_r . De manera similar se colocan las demás cadenas. En la figura 1 se muestra la construcción de G_1 , con base en la matriz a' de 3 x 3.

Utilizando el lema 2, se puede demostrar lo siguiente:

Lema 3 La unión de todas las gráficas G_r es una gráfica que tiene 6k vertices u_i , u'_i , v_i , v'_i , w_i , w'_i y que tiene todas las adyacencias excepto por (u_i, u'_i) , (v_i, v'_i) y (w_i, w'_i) .

Ahora a cada gráfica G_r se le hace la siguiente modificación. Se le insertan los vértices u'_r , v'_r y w'_r (lo cual le suma 3 vértices a cada componente G_r), junto con las aristas (u_r, u'_r) , (v_r, v'_r) y (w_r, w'_r) . Por último, para conectar todas las componentes G_r se coloca un vértice x y se hace adyacente a todos los vértices u_i , u'_i , v_i , v'_i , w_i , w'_i que se encuentran en la parte exterior de cada G_r . Ver figura 2. Lo que acabamos de construir es una gráfica plana con k(6k + 3) + 1 vértices (pues cada una de las kcomponentes tiene 6k + 3 vértices, más el vértice x) y que además tiene todas las adyacencias entre los vértices u_i , u'_i , v_i , w_i , w'_i . Si consideramos a u_i , u'_i , v_i , w_i , w'_i , con i = 1, ..., k, como las clases cromáticas, tenemos 6k + 1 colores. Además notemos que ninguna clase cromática es adyacente consigo misma, por lo que $\alpha(G) = 6k + 1$.



Figura 1: En la izquierda tenemos un diagrama que indica cómo acomodar las cadenas. En la derecha tenemos el ejemplo de G_1 para la matriz de 3 x 3.



Figura 2: La gráfica plana, construida con base en la matriz de 3 x 3 con $n = 6(3^2) + 3(3) + 1 = 64$ vértices, tiene número acromático y pseudoacromático $\psi(G) = \alpha(G) = 6(3) + 1 = 19$.

Resumiendo lo anterior, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 4 Para toda $n = 6k^2 + 3k + 1$, $k \ge 1$ existe una gráfica plana G, tal que $\psi(G) = 6k + 1$ y más aún, alcanza la cota superior para el número pseudoacromático, es decir, $\psi(G) = 6k + 1$

- [1] A. Bondy; U.S.R. Murty.: Graph Theory, Springer (2008).
- [2] Harary, F.: A research problem, Bulletin of the American Mathematical Society, 67:542, (1961).
- [3] Alekseev, V. B.; Gončakov, V. S.: The thickness of an arbitrary complete graph, Mat. USSR Sbornik, (N.S.) 101(143), Number 2, 212–230, (1976).
- [4] Battle, J.; Harary, F.; Kodoma, Y.: Every planar graph with nine points has a non-planar complement, Bulletin of the american Mathematical Society, 68:569–571, (1962).
- [5] Tutte, W.T.: The non-biplanar character of the complete 9-graph, Canadian Mathematical Bulletin, 6:319–330, (1963).
- [6] Tutte, W.T.: The Thickness of a Graph, Indagationes Mathematicae, 25:567–577, (1963).
- [7] Beineke, L. W.; Harary, F.: The Thickness of the Complete Graph, Canadian Journal Math., 17:850-859, (1965).
- [8] Gupta, R. P.: Bounds on the chromatic and achromatic numbers of complementary graphs, Recent Progress in Combinatorics, Proceedings of Third Waterloo Conference on Combinatorics, Waterloo; academic Press, New York, 229-235, (1969).
- [9] Harary, F.; Hedetniemi, S.; Prins, G.: An interpolation theorem for graphical homomorphisms, Portugaliae Mathematica, 26:453-462, (1967).

Gráficas mixtas de Moore

Gabriela Araujo-Pardo^{*}

Camino Balbuena[†]

Mirka Miller[‡]

Maria Ždímalová §

Resumen

Una gráfica G es una (z, r, k)-gráfica mixta regular si desde cada vértice salen z flechas (y entran z flechas), r aristas y tiene diametro k. Claramente existe una cota superior para el orden de G, conocida como la cota de Moore. Decimos que G es una gráfica mixta de Moore si alcanza la cota de Moore, densa si su orden está cerca de la cota de Moore y óptima si no existe una gráfica mixta con los mismos parámetros y orden mayor.

En nuestro trabajo construimos familias de $(\frac{q-1}{2}, q, 2)$ -gráficas mixtas densas de orden $2q^2$. Como la cota de Moore para gráficas con estos parámetros es igual a $\frac{9q^2-4q+3}{4}$, el defecto de estas gráficas mixtas es $(\frac{q-2}{2})^2 - \frac{1}{4}$.

En particular construimos la (1,3,2)-gráfica mixta de orden 18, llamada la Gráfica de Bosák y la (2,5,7)-gráfica mixta de orden 50, que resulta ser óptima.

Palabras Clave. Gráfica de Moore Mixta, Planos Proyectivos.

1 Introducción

Sea G una gráfica con conjunto de vértices V(G), de aristas E(G) y de flechas A(G). Como siempre, la distancia de un vértice u a un vértice v es la longitud de la trayectoria mínima entre los dos; como en este caso la gráfica tiene aristas y flechas, si un camino entre dos vérices involucra flechas, éstas tienen que aparecer todas en la misma dirección. El diámetro de G es la mayor distancia entre todas las parejas distintas de vértices de G.

Una gráfica mixta regular es una gráfica simple y finita G, donde de cada vértice v de G salen z flechas (y entran también z flechas) e inciden r aristas; z es el grado dirigido y r el grado no dirigido y d = r + zes el grado de v (donde r, z y d son independientes de la elección de v). Si además G tiene diámetro igual a k, decimos que G es una (z, r, k)-gráfica mixta regular.

Las gráficas de Moore (no dirigidas, admiten solamente aristas) con grado máximo d y diámetro k con el máximo número de vértices $M_{d,k} = 1 + d + d(d-1) + \cdots + d(d-1)^{k-1}$ (cota de Moore) han sido ampliamente estudiadas. Se sabe que no existen gráficas de Moore de grado $d \ge 3$ y diámetro $k \ge 3$; para k = 1 y $d \ge 1$ las gráficas completas K_{d+1} son las únicas gráficas de Moore y para $k \ge 3$ y d = 2 las únicas son los ciclos C_{2k+1} . Finalmente para k = 2, además de C_5 (d = 2), las gráficas de Moore existen solo para d = 3 (Gráfica de Petersen), d = 7 (Gráfica de Hoffman-Singleton), y posiblemente para d = 57.

En el caso de gráficas de Moore dirigidas (que admiten solamente flechas) y tienen exgrado máximo d y diametro k, la cota de Moore es igual a $M_{d,k}^* = 1 + d + d^2 + \cdots + d^k$ (cota de Moore dirigida). En 1980 Bridges y Toueg probaron que estas digráficas no existen para d > 1 y k > 1. Las únicas gráficas de Moore dirigidas son los ciclos de longitud k + 1 denotados por Z_{k+1} , y las gráficas completas con d + 1 vértices.

En ambos casos la investigación ha sido dirigida a encontrar gráficas (o digráficas) de grado máximo fijo, diámero fijo y orden máximo. A este problema se le conoce como el Problema (Δ, d) (con o sin dirección) y hay mucho trabajo al respecto (ver por ejemplo [3] y [4]).

[‡]School of Mathematical and Physical Sciences, University of Newcastle, Australia, Mirka.Miller@newcastle.edu.au [§]Department of Mathematics and Descriptive Geometry, Slovak University of Technology in Bratislava, zdimalova@math.sk

^{*}Instituto de Matemáticas, UNAM, garaujo@matem.unam.mx

[†]Departament de Matemàtica Aplicada III, Universitat Politècnica de Catalunya, m.camino.balbuena@upc.edu

Las gráficas de Moore mixtas fueron introducidas por Bosák in [1]. Claramente las gráficas de Moore dirigidas y no dirigidas son casos especiales de las Gráficas de Moore mixtas. Una gráfica mixta se llama *propia* si contiene al menos una arista y una flecha.

Si $M_{z,r,k}$ denota la cota superior para el orden de una (z, r, k)-gráfica de Moore mixta. Una gráfica mixta que alcanza esta cota se llama una (z, r, k)-gráfica mixta de Moore de diámetro k. Notemos que $M_{z,r,k} = M_{d,k}$ para z = 0 y $M_{z,r,k} = M_{d,k}^*$ para r = 0 (d = z + r).

La siguiente conjetura la formuló Bosák en 1979 y la probaron Nguyen, Miller y Gimbert en 2007 (ver [2]).

Conjetura 1 [1]. Sean $d \ y \ k$ dos enteros, $d \ge 1, k \ge 3$. Una gráfica finita G es una gráfica mixta de Moore de grado $d \ y$ diámetro k si y solo si $d = 1 \ y \ G$ es Z_{k+1} (el ciclo dirigido de orden k+1) o $d = 2 \ y \ G$ es C_{k+1} .

Debido al resultado anterior el problema consiste en encontrar gráficas mixtas de Moore de diámetro k = 2 cuyo orden es:

$$M_{z,r,2} = 1 + r + z + r(r - 1 + z) + z(r + z) = (r + z)^2 + z + 1.$$
(1)

También en [1], Bosák da conditiones de divisibilidad para la existence de gráficas mixtas de Moore de diámetro 2 relacionadas con la distribución de los arcos y las flechas. El demuestra que si G tiene z flechas y r aristas entonces deben satisfacerse las siguientes condiciones aritméticas:

Además de los casos triviales r = 0 y z = 1 (el ciclo dirigido Z_3) y r = 2 y z = 0 (el ciclo C_5), para que exista la (z, r, 2)-gráfica mixta de Moore debe existir un entero positivo impar c tal que:

$$c|(4z-3)(4z+5) ext{ y } r = \frac{1}{4}(c^2+3).$$
 (2)

En el mismo artículo dió una construcción para algunas gráficas mixtas de Moore, excepto la Gráfica de Bosák de orden n = 18, la cual es isomorfa a la Gráfica de Kautz $K_a(d, 2)$ en la cual todos los 2-ciclos se consideran como aristas.

En 2007, Nguyen, Miller y Gimbert (ver [2]) prueban que todas las gráficas mixtas de Moore de diámetro 2 que se conocían hasta ese momento son únicas. Sin embargo eso no es cierto en general. En 2013, Jorgensen encontró dos gráficas mixtas de Moore no isomorfas de diámetro 2, exgrado 7, grado 3 y orden 108.

En la tabla 1 aparecen los valores que se conocen (y no se conocen) para $n \leq 200$ cuando z y r tienen los parámetros requeridos por el análisis de Bosák.

2 Nuestro trabajo

En este trabajo utilizamos los planos proyectivos para dar una contrucción de gráficas mixtas de diámetro 2, grado dirigído (q-1)/2 - 2t y grado no dirigido q + 2t y orden $2q^2$; cuando q es impar y es una potencia de primo y $t \in \{0, \dots, \frac{q-1}{4}\}$ si $q \equiv 1 \pmod{4}$, o $t \in \{0, \dots, \frac{q-3}{4}\}$ si $q \equiv 3 \pmod{4}$. En particular, cuando $t = \frac{q-1}{4}$ y $q \equiv 1 \pmod{4}$ es impar y una potencia de primo, estas gráficas no

En particular, cuando $t = \frac{q-1}{4}$ y $q \equiv 1 \pmod{4}$ es impar y una potencia de primo, estas gráficas no dirigidas fueron construidas por McKay, Miller y Širáň en 1998, y son las más grandes que se conocen hasta este momento (ver [3]); además son vérice transitivas.

Para gráficas mixtas, cuando t = 0, nuestra construcción nos da una familia de $(\frac{q-1}{2}, q)$ -gráficas mixtas densas de diámetro 2. Como la cota de Moore para estos parámetros es igual a $\frac{9q^2-4q+3}{4}$, el defecto de estas gráficas es igual a $(\frac{q-2}{2})^2 - \frac{1}{4}$.

n	d	Z	r	existencia	unicidad
3	1	1	0	Z_3	SI
5	2	0	2	C_5	SI
6	2	1	1	Ka(2,2)	SI
10	3	0	3	Gráfica de Petersen	SI
12	3	2	1	Ka(3,2)	SI
18	4	1	3	Gráfica de Bosák	SI
20	4	3	1	Ka(4,2)	SI
30	5	4	1	Ka(5,2)	SI
40	6	3	3	desconocida	desconocido
42	6	5	1	Ka(6,2)	SI
50	7	0	7	Gráfica de Hoffman-Singleton	SI
54	7	4	3	desconocida	desconocido
56	7	6	1	Ka(7,2)	SI
72	8	7	1	Ka(8,2)	SI
84	9	2	7	desconocida	desconocido
88	9	6	3	desconocida	desconocido
90	9	8	1	Ka(9,2)	SI
108	10	7	3	Gráfica de Jorgensen	NO
110	10	9	1	Ka(10,2)	SI
132	11	10	1	Ka(11,2)	SI
150	12	5	7	desconocida	desconocido
156	12	11	1	Ka(12,2)	SI
180	13	10	3	desconocida	desconocido
182	13	12	1	Ka(13,2)	SI

Tabla 1: Valores posibles para los parámetros de gráficas mixtas de Moore de orden menor a 200.

En particular construimos para q = 3 la (1, 3; 2)-gráfica mixta de Moore de orden 18 llamada la Gráfica de Bosák y la (2, 5; 2)-gráfica mixta de orden 50 que es óptima (En la figura 1 se muestra parte de esta gráfica, las flechas están completas sin embargo faltan "muchas" aristas; explicaremos las incidencias detalladamente en la presentación). Para el resto de los valores nuestra construcción nos da buenas cotas superiores.



Figura 1: La (2, 5, 2)-gráfica mixta óptima

- [1] Bosák, J.: Partially directed Moore graphs, Math. Slovaca, 29 (2), (1979) 181–196.
- [2] Nguyen, M.H., Miller, M., Gimbert, J.: On Mixed Moore Graphs, Discrete Mathematics, 307. (2007) 964–970.
- [3] Web-page: http://www-ma4.upc.es/ comellas/delta-d/taula_delta_d.html
- [4] Web-page:http://www-ma4.upc.es/ comellas/delta-d//taula_vsd.html

Explorando el concepto de perfección en 3-hipergráficas

Natalia García-Colín*

Amanda Montejano[†]

Deborah Oliveros[‡]

Resumen

Una manera natural de extender el concepto de perfección de gráficas a hipergráficas es la siguiente: dada H una m-hipergráfica uniforme, decimos que H es perfecta si para toda m-subhipergráfica H' de H se satisface que $\chi(H') = \left\lceil \frac{\omega(H')}{m-1} \right\rceil$, donde $\chi(H')$ y $\omega(H')$ son el número cromático y el número de clan de H' respectivamente.

Una gráfica (2-hipergráfica uniforme) de *comparabilidad* es una gráfica que se pueden orientar transitivamente. Es bien sabido que la familia de gráficas de comparabilidad es una familia de gráficas perfectas. En este trabajo estudiamos la familia de las 3-hipergráficas de comparabilidad en relación con el concepto de perfección arriba descrito. En particular, presentamos tres subfamilias de 3-hipergráficas de comparabilidad, exhibiendo tres comportamientos distintos en la relación entre el número cromático y el número de clan de tales hipergráficas.

Palabras Clave. Transitividad en 3-hipergráficas. Perfección en 3-hipergráficas. Permutaciones Cíclicas.

1 Introducción

Estudiaremos hipergráficas uniformes, es decir, hipergráficas cuyas aristas tienen todas el mismo número de vértices. Así, una *m*-hipergráfica uniforme H (que llamaremos por simplicidad *m*-gráfica) es una pareja H = (V(H), E(H)) donde V(H) es el conjunto de vértices y $E(H) \subseteq \binom{V(H)}{m}$ es el conjunto de aristas. Dada una *m*-gráfica H, el número cromático de H, denotado por $\chi(H)$, se define como el mínimo k tal que V(H) se puede partir en k partes, llamadas clases cromáticas, de tal manera que ninguna arista esté contenida en una clase cromática. El número de clan de H, denotado por $\omega(H)$, es la cardinalidad máxima de un subconjunto de V(H) que induce una *m*-gráfica completa.

Denotemos por K_n^m a la *m*-gráfica completa con *n* vértices. Dado que $\chi(K_n^m) = \left\lceil \frac{n}{m-1} \right\rceil$, entonces cualquier *m*-gráfica *H* satisface:

$$\left\lceil \frac{\omega(H)}{m-1} \right\rceil \le \chi(H). \tag{1}$$

En particular, toda 2-gráfica (gráfica simple) G satisface $\omega(G) \leq \chi(G)$. En 1961, Claude Berge [1] introduce el concepto de perfección al definir una gráfica G como *perfecta*, si tanto ella como todas sus subgráficas inducidas, $G' \subseteq G$, satisfacen $\omega(G') = \chi(G')$ (para más información sobre gráficas perfectas, consultar [9]).

La noción de perfección para hipergráficas se ha estudiado en pocas ocasiones (ver [5, 6]) y ciertamente la definición para hipergráfica perfecta permanece, hasta donde sabemos, sin ser consensuada. Naturalmente, en el contexto de *m*-hipergráficas uniformes, resulta tentador definir una *m*-gráfica *H* como *perfecta*, si tanto ella como todas sus *m*-subgráficas inducidas, $H' \subseteq H$, satisfacen la igualdad en (1).

Con el objeto de explorar el concepto de perfección arriba descrito, en este trabajo nos centraremos en estudiar una familia particular de 3-gráficas, llamadas 3-gráficas de comparabilidad. Las 3-gráficas de comparabilidad, en analogía con las gráficas de comprarabilidad, son aquellas que se pueden orientar transitivamente (ver definiciones precisas en la siguiente sección). En el contexto de gráficas simples,

^{*}Instituto de Matemáticas, UNAM, natalia.garciacolin@im.unam.mx

[†]UMDI Facultad de Ciencias, UNAM, amandamontejano@ciencias.unam.mx

[‡]Instituto de Matemáticas, UNAM, dolivero@matem.unam.mx



Figura 1: Una 3-gráfica orientada, no transitiva, cuya 3-gráfica subyacente es de comparabilidad pues se puede orientar transitivamente.

las gráficas de comparabilidad son una importante familia de gráficas perfectas [9]. En este artículo presentamos tres subfamilias de 3-gráficas de comparabilidad, exhibiendo tres comportamientos distintos con respecto a la desigualdad en (1).

En primer lugar veremos una subfamilia de 3-gráficas de comparabilidad para las cuales la diferencia $\chi(H) - \left\lceil \frac{\omega(H)}{2} \right\rceil$ es arbitrariamente grande. En segundo lugar, exhibiremos una interesante subclase de 3-gráficas de comparabilidad, llamadas 3-gráficas de permutación cíclica (análogas a las conocidas gráficas de permutación), para las cuales el número cromático está acotado por una función lineal del número de clan. Finalmente mostraremos otra subclase de 3-gráficas de comparabilidad (asociada a la familias de intervalos cerrados en una circunferencia) para las cuales la igualdad en (1) siempre se satisface, es decir, su número cromático es tan pequeño como puede ser en función de su número de clan.

2 Las 3-gráficas de comparabilidad

En [3] los autores introducen los conceptos de 3-gráfica orientada, 3-gráfica orientada transitiva, y definen la clase de 3-gráficas de comparabilidad. Estas 3-gráficas constituyen una interesante familia que, en principio, parece una buena candidata para ser un ejemplo de 3-gráficas perfectas.

Sea X un conjunto de orden n. Un orden lineal de X es una biyección $\phi : \{1, 2, ..., n\} \to X$. Un orden cíclico de X es una clase de equivalencia del conjunto de órdenes lineales con respecto a la relación de equivalencia cíclica definida por: $\phi \sim \psi$, si y sólo si existe $k \leq n$, tal que $\phi(i) = \psi(i+k)$ para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$ donde i + k se toma módulo n. Denotaremos cada orden cíclico, $[\phi]$, con la notación de permutaciones cíclicas, $(\phi(1) \phi(2) \dots \phi(n))$. Por ejemplo, para una terna $\{u, v, w\}$ existen exactamente dos órdenes cíclicos: (u v w) y (u w v), donde (u v w) = (v w u) = (w u v) y (u w v) = (v u w) = (w v u).

Definición 1 Una 3-gráfica orientada es una 3-gráfica H en la cual se le ha asignado a cada arista exactamente uno de los dos posibles órdenes cíclicos. Dada una orientación de H, al conjunto de órdenes cíclicos de las aristas de H, lo denotamos por O(H).

Por ejemplo, sea H con $V(H) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ y $E(H) = \{\{a_1, a_2, a_3\}, \{a_1, a_3, a_4\}, \{a_1, a_3, a_5\}\}$. Una posible orientación de H es $O(H) = \{(a_1 a_2 a_3), (a_1 a_4 a_3), (a_1 a_3 a_5)\}$. En la figura 1 se muestra una ilustración de dicha 3-gráfica orientada.

Definición 2 Una 3-gráfica orientada H se dice transitiva si siempre que $(u v z) y (z v w) \in O(H)$, entonces $(u v w) \in O(H)$ (lo cual implica también $(u w z) \in O(H)$).

Definición 3 Una 3-gráfica (no orientada) se dice 3-gráfica de comparabilidad si admite una orientación transitiva.

La 3-gráfica orientada definida en el párrafo anterior (figura 1) no es transitiva. Sin embargo, la 3-gráfica subyacente de ésta, es una 3-gráfica de comparabilidad ya que se puede orientar transitivamente, por ejemplo con $O'(H) = \{(a_1 a_3 a_2), (a_1 a_3 a_4), (a_1 a_3 a_5)\}$. En contraste, una 3-gráfica con 4 vértices y 3 aristas, no es de comparabilidad.

Una 3-gráfica orientada cuya 3-gráfica subyacente es una 3-gráfica completa, se llama un 3-torneo. Así como en el caso de gráficas orientadas, en el caso de 3-gráficas orientadas existe (salvo isomorfismos) un único 3-torneo transitivo con n vértices, que denotaremos por TT_n^3 .

A continuación definiremos dos subclases sobresalientes dentro de la clase de 3-gráficas de comparabilidad.

2.1 Las 3-gráficas de permutación cíclica

Una permutación cíclica es un órden cíclico del conjunto $\{1, 2, ..., n\}$. Es decir, una clase de equivalencia $[\phi]$ del conjunto de biyecciones $\phi : \{1, 2, ..., n\} \rightarrow \{1, 2, ..., n\}$ con respecto a la relación de equivalencia cíclica descrita al inicio de esta sección. Sea $[\phi]$ una permutación cíclica. Tres elementos $i, j, k \in \{1, 2, ..., n\}$, con i < j < k, están en el orden de las manecillas del reloj con respecto a $[\phi]$, si existe $\psi \in [\phi]$, tal que $\psi^{-1}(i) < \psi^{-1}(j) < \psi^{-1}(k)$. En otro caso, decimos que los elementos i, j, k están en contra de las manecillas del reloj con respecto a $[\phi]$.

Definición 4 Dada una permutación cíclica $[\phi]$, la 3-gráfica orientada $H_{[\phi]}$ asociada a la permutación cíclica $[\phi]$ es la 3-gráfica con $V(H_{[\phi]}) = \{1, 2, ..., n\}$ donde las aristas son ternas de la forma $\{i, j, k\}$ con i < j < k que están en el orden de las manecillas del reloj con respecto a $[\phi]$, y con la orientación inducida por $[\phi]$.

Por ejemplo, consideremos la permutación cíclica identidad, $(12 \dots n)$, y su permutación cíclica reversa $(n \dots 21)$. Entonces, las 3-gráficas asociadas son, respectivamente, el 3-torneo transitivo de nvérices, TT_n^3 , y la 3-gráfica nula con n vértices.

No es difícil ver que una 3-gráfica orientada $H_{[\phi]}$ asociada a una permutación cíclica es transitiva, y por lo tanto su 3-gráfica subyacente es una 3-gráfica de comparabilidad.

2.2 Las 3-gráficas de intervalos en una circunferencia

Una gráfica simple G es una gráfica de intervalos si G es la gráfica de intersección de un conjunto de intervalos cerrados en la recta real. Tanto la familia de gráficas de intervalo, como la familia de complementos de gráficas de intervalo, son familias bien estudiadas de gráficas perfectas [9].

En analogía con estos conceptos, estudiaremos aquí la clase de 3-gráficas asociadas a un conjunto finito de intervalos cerrados en una circunferencia S^1 .

Definición 5 La 3-gráfica $H_{\mathcal{F}}$ asociada a una familia finita de intervalos cerrados en una circunferencia \mathcal{F} , es la 3-gráfica con $V(H_{\mathcal{F}}) = \mathcal{F}$ cuyas aristas son las ternas de vértices con la propiedad de que sus intervalos correspondientes son disjuntos por parejas.

Por ejemplo, si \mathcal{F} es una familia de *n* intervalos cerrados disjuntos en S^1 , entonces $H_{\mathcal{F}}$ es la 3-gráfica completa K_n^3 .

No es difícil ver que toda 3-gráfica asociada a una familia finita de intervalos cerrados en una circunferencia, es una 3-gráfica de comparabilidad.

3 Resultados

Como mencionamos anteriormente, en este trabajo exhibimos tres comportamientos distintos, dentro de la familia de 3-gráficas de comparabilidad, con respecto a la relación entre el número cromático y el número de clan de estas hipergráficas.

Teorema 1 Para cualesquiera enteros positivos $w \ y \ k$ tales que $\left\lceil \frac{w}{2} \right\rceil \leq k$, existe una 3-gráfica de comparabilidad con número de clan $w \ y$ número cromático al menos k.

La prueba de este teorema es constructiva. La contrucción de las 3-gráficas de comparabilidad que satisfacen tener número de clan fijo y número cromático arbitrariamente grande se puede consultar en [7].

Teorema 2 Sea *H* es una 3-gráfica de permutación cíclica. Entonces $\chi(H) \le \omega(H) - 1$. Más aún, esta cota es justa.

Teorema 3 Si H una 3-gráficas de intervalos en una circunferencia, entonces $\chi(H) = \left\lceil \frac{\omega(H)}{2} \right\rceil$.

Las pruebas de estos tres teoremas se pueden consultar en la versión larga de este artículo [4].

- C. Berge. F\u00e4rbung von Graphen, deren s\u00e4mtliche bzw. deren ungerade Kreise starr sind, Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg Math.-Natur., Vol. 10, (1961).
- [2] M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour, R. Thomas. The strong perfect graph theorem, Annals of Mathematics, Vol. 164 (1), 51–229, (2006).
- [3] N. Garcia-Colin, A. Montejano, L. Montejano and D. Oliveros. Transitive Oriented 3-Hypergraphs of Cyclic Orders, Order, A Journal on the Theory of Ordered Sets and its Applications, Vol.30 (13), 869–875, (2013).
- [4] N. Garcia-Colin, A. Montejano, and D. Oliveros. Exploring the concept of perfection in 3-hypergraphs, Discrete Applied Mathematics, (to appear).
- [5] P. Hansen, M. Las Vergnas. On a property of hypergraphs with no cycle of length greater than two, C Berge, D.K Ray-Chaudhuri (Eds.), Hypergraph Seminar, Springer, Berlin, 99–101 (1974).
- [6] L. Lovász. Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture, Discrete Mathematics, Vol. 2 (3), 253-267, (1972).
- [7] J. Luviano, A. Montejano, L. Montejano and D. Oliveros. Mycielski Type Constructions for Hypergraphs Associated With Fractional Colorings Bolletín de la Sociedad Matemática Mexicana, Vol. 20 (1), 1–16, (2014).
- [8] A.Pnueli, A. Lempel and S. Even. Transitive orientation of graphs and identification of permutation graphs, Canadian Journal of Mathematics, Vol. 23, 160–175, (1971).
- [9] J.L. Ramírez-Alfonsín and B.A. Reed. Perfect Graphs, Wiley Series in Discrete Mathematics & Optimization, Wiley, (2001).

Resultados extremales en gráficas de intersección de cajas en \mathbb{R}^d .

A. Martínez-Pérez^{*}

L. Montejano[†]

D. Oliveros,[‡]

Resumen

En este trabajo daremos una versión fraccional del Teorema de Helly para familias de cajas en \mathbb{R}^d (paralelográmos con lados paralelos a los ejes coordenados). Para esto, utilisaremos además de geometría, herramientas de teoría de gráficas extremales, obteniendo así la familia de cajas con el mayor número de parejas que se intersectan sin que existan d + 1 cajas con un punto en común.

1 Introducción

El teorema clásico de Helly [2] dice que si cada d+1-elementos de una familia finita de conjuntos convexos en \mathbb{R}^d tiene intersección no vacía, entonces toda la familia tiene intersección no vacia. Este número d+1es usualmente llamado el número de Helly, y es en general lo mas pequeño posible. Sin embargo, existen algunas familias especiales de conjuntos convexos donde este número puede ser reducido, por ejemplo, si cada dos elementos de una familia de cajas (paralelogramos con lados paralelos a los ejes) en \mathbb{R}^d se intersectan, entonces toda la familia se intersecta cf. [3].

El Teorema de Helly tiene multiples generalizaciones y aplicaciones y es probablemente uno de los teoremas más conocidos y citados en geometría discreta. En 1979 Katchalski y Liu [6] probaron una generalización que dice lo siguiente: Suponga que no todas las subfamilias de tamaño d + 1 tienen un punto en común pero sí cierto porcentaje de las d+1-adas de la familia, entonces existe cierto porcentaje de los elementos de la familia que tienen un punto en común. Más precisamente:

Teorema 1 (Katchalski and Liu [6]) Suponga que $\alpha \in (0, 1]$ es un número real y que \mathcal{F} es una familia de conjuntos convexos en \mathbb{R}^d . Si al menos $\alpha \binom{n}{d+1}$ de las (d+1)-tupletas de \mathcal{F} se intersectan, entonces \mathcal{F} contiene una subfamilia intersectante de cardinalidad $\frac{\alpha}{d+1}n$.

Más tarde, esta cota fue mejorada por Kalai [5] de $\frac{\alpha}{d+1}n$ a $(1 - (1 - \alpha)^{1/(d+1)})n$, y esta cota resulta ser lo mejor posible.

El siguiente ejemplo, muestra que un teorema completamente análogo al anterior para el caso de la familia de cajas no es cierto.

Ejemplo

Sean $n \ge d+1$ y $m, k \ge 0$ enteros tales que n = md + k y $0 \le k \le d-1$. Sea n_1, \ldots, n_d enteros positivos con $n = n_1 + \cdots + n_d$ y $n_i = \lceil \frac{n}{d} \rceil$ para $1 \le i \le k, n_i = \lfloor \frac{n}{d} \rfloor$ con $k+1 \le i \le d$. Para $1 \le i \le d$, considere $n_i - 1$ hiperplanos ortogonales en la *i*-esima coordenada. Estos hiperplanos cortan \mathbb{R}^d en n_i bandas disjuntas dos a dos $B'_{ij}, j = 1, \ldots, n_i$. Considere una caja grande C con lados paralelos a los ejes y que intersecte a cada una de estas bandas. De esta manera obtenemos una familia \mathcal{F}_i que consiste en cajas de la forma $B_{ij} = C \cap B'_{ij}$. Así definimos \mathcal{F} como la unión de todas las \mathcal{F}_i .

Para el caso d = 2, la siguiente figura muestra una familia de cajas con la propiedad que la mitad de las parejas tienen un punto en común pero no hay un punto en común en 3 de ellas. En general, observe que esta familia \mathcal{F} de *n* cajas tiene la propiedad de que cada dos elementos de \mathcal{F} se intersectan si están en diferentes \mathcal{F}_i . Sin embargo, no hay ningún punto en la intersección de d + 1-elementos de \mathcal{F} .

^{*}Universidad de Castilla-La Mancha. alvaro.martinezperez@uclm.esaorreo

[†]Instituto de Matemáticas, UNAMluis@matem.unam.mx

[‡]Instituto de Matematicas, UNAMdolivero@matem.unam.mx



Figura 1: Cada dos cajas se intercectan pero no hay tres que tengan un punto en común.

Observe que esta familia \mathcal{F} de n cajas tiene la propiedad de que cada dos elementos de \mathcal{F} se intersectan

si están en diferentes \mathcal{F}_i sin embargo, no hay ningún punto en la intersección de d + 1-elementos de \mathcal{F} . La idea central de este trabajo, es ver el comportamiento fraccional de la familia de cajas con la intención de probar un teorema similar al Teorema 1. Utilizamos herramientas de teoría de gráficas extremales.

2 Gráficas de Turán

En 1941 Paul Turán se propuso encontrar el número máximo de aristas de entre todas aquellas gráficas con n vértices que no contengan subgráficas completas de tamaño m + 1 con $n \ge m \ge 1$. Resulta ser que la gráfica que tiene justo este número de aristas es la gráfica m-partita completa con n vértices en donde cada partición tiene más o menos los mismos elementos. Esta gráfica se llama la gráfica de Turán y se denota por $\mathcal{T}(n,m)$. Si denotamos por t(n,m) el número de aristas de esta grafíca, se sabe que $t(n,m) \le (1-\frac{1}{m})\frac{n^2}{2}$, y que la igualdad se da si m divide a n.

Para el caso m = 2, $t(n, 2) = 1 + \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ es el máximo número de aristas que una gráfica puede tener sin que contenga ningún triángulo y la gráfica de Turan $\mathcal{T}(n, 2)$ es la gráfica bipartita completa con $\frac{n}{2}$ vértices en cada partición.

Más aún, la siguiente ecuación se satisface:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{t(n,m)}{\frac{n^2}{2}} = 1 - \frac{1}{m}.$$
(1)

Recomendamos ver el libro de Diestel [4] que contiene todos los detalles de este famoso teorema.

Regresando a la geometría consideremos un familia finita de cajas \mathcal{F} la gráfica de intersección $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ de esta familia, es la gráfica que tiene como conjunto de vértices los elementos de F y dos vértices tienen una arista en común si las correspondientes cajas tienen intersección no vacía. Este tipo de gráficas han sido estudiadas en varios contextos. Las gráficas de intersección de intervalos, por ejemplo, es un caso especial de estas en \mathbb{R}^1 donde las cajas son intervalos y se sabe entre otras cosas, que son perfectas.

Si de entre todas las familias \mathcal{F} de n cajas en \mathbb{R}^d , con $n \ge k \ge d$ encontramos a la familia extremal en el sentido de que contiene el máximo número de parejas intersectantes en \mathcal{F} y de tal manera que ningún punto esté en la intersección de d + 1 elementos de la familia, podemos denotar por T(n, k, d) a la gráfica de intersección correspondiente y por t(n, k, d) a su número de aristas.

El siguiente resultado determina exactamente el "número de Turán" de estas gráficas de intersección.

Teorema 2 Para todo $n \ge k > d \ge 1$,

$$t(n, k, d) = t(n - k + d, d) + t(n, k - d + 1, 1).$$

Donde t(n,m) denota el número de aristas de la gráfica de Turán $\mathcal{T}(n,m)$. $y t(n,k,1) = (k-1)n - {k \choose 2}$.

De hecho, no es difícil convencerse que en el caso d = 1 la gráfica extremal es la gráfica con n vértices que se obtiene de tomar el complemento de la gráfica completa con n - k + 1 vértices, y la familia de intervalos que realizan esta gráfica se obtiene de tomar k copias de un intervalo y n - k + 1 copias disjuntas dos a dos encima de las primeras.

Para casos más generales, resulta un poco más complicado describir la gráfica extremal, pero resulta ser única. Más aún, el siguiente corolario es cierto:

Corolario 3 Para $n \ge k > d \ge 1$,

$$t(n,k,d) \leq \frac{d-1}{2d}n^2 + (\frac{k}{d}-1)n + \frac{k}{2}(1-\frac{k}{d}) < \frac{d-1}{2d}n^2 + \frac{2k+d}{2d}n.$$

У

$$\mid t(n,k,d) - (\frac{d-1}{2d}n^2 + (\frac{k}{d}-1)n) \mid$$

está acotado por una constante cuando n tiende a infinito.

3 Helly fraccional para familias de cajas

Como ya mencionamos en la sección anterior, el máximo número de parejas intersectantes en una familia de cajas \mathcal{F} de tal manera que ningún punto esté en la intersección de d+1 elementos de la familia está dado por t(n,k,d). Así el siguiente corolario es cierto.

Corolario 4 Sea $\varepsilon > 0$ un número real y sea \mathcal{F} una familia de n cajas en \mathbb{R}^d . Si al menos $\left(\frac{d-1}{2d} + \varepsilon\right) n^2$ de las parejas de \mathcal{F} se intersectan, \mathcal{F} contiene una subfamilia intersectante de tamaño $dn\varepsilon - \frac{d}{2} + 1$.

Demostración. Suponga que no hay un punto en \mathbb{R}^d que esté en $dn\varepsilon - \frac{d}{2} + 1$ elementos de \mathcal{F} . Entonces por el Teorema 2 y el Corolario 3 el número de parejas intersectantes de \mathcal{F} debe ser menor que

$$\frac{d-1}{2d}n^2 + \frac{2(dn\varepsilon - \frac{d}{2}) + d}{2d}n = \left(\frac{d-1}{2d} + \varepsilon\right)n^2,$$

lo que causa una contradicción.

De esta manera podemos concluir el siguiente teorema fraccional:

Teorema 5 (Teorema Fraccional de Helly para Cajas.) [1] Para $\alpha \in (1 - \frac{1}{d}, 1]$ existe un número real $\beta(\alpha) > 0$ tal que, para toda familia \mathcal{F} de n cajas en \mathbb{R}^d , si una fracción α de las parejas se intersectan en \mathcal{F} , entonces \mathcal{F} tiene una subfamilia intersectante de por lo menos βn .

De hecho se puede demostrar que si $\alpha \to 1$, entonces $\beta(\alpha) \to 1$ y se puede dar el siguiente teorema más refinado.

Teorema 6 [1] Sea \mathcal{F} una familia de n cajas en \mathbb{R}^d , y sea $\alpha \in (1 - \frac{1}{d^2}, 1]$ un número real. Si al menos $\alpha\binom{n}{2}$ de las parejas de cajas se intersectan, entonces existe un punto en la intersección de $(1 - d\sqrt{1 - \alpha})n$ elementos de \mathcal{F} .

- Bárány, I., Fodor, F., Martínez-Pérez, A., Montejano, L., Oliveros, D., Pór, A. A fractional Helly theorem for boxes, Computational Geometry Theory and Applications. Vol. 48, III (2015) 221–224.
- [2] Danzer, L., Grünbaum, B., Klee, V., Helly's theorem and its relatives, Proc. Sympos. Pure Math. Vol. VII (1963) 101–180.
- [3] Danzer, L., Grünbaum, B., Intersection properties of boxes in \mathbb{R}^d , Combinatorica, Vol. 2, 3 (1982) 237–246.
- [4] Diestel, R., Graph Theory Graduate Texts in Mathematics 173, Springer, Heidelberg (2010).
- [5] Kalai, G., Intersection patterns of convex sets, Israel J. Math. Vol. 48, 2-3 (1984) 161–174.
- [6] Katchalski, M., Liu, A., A problem of geometry in \mathbb{R}^n , Proc. Amer. Math. Soc. Vol.75, 2 (1979) 284–288.

Algoritmos locales para detectar conjuntos de corte

D. Flores-Peñaloza^{*} J. Rivera[†] M. Soriano[†]

iano† J. Urrutia†

C. Velarde[‡]

Resumen

Consideramos un problema clásico de teoría de gráficas. Dada una gráfica simple plana conexa G de n vértices, se desean conocer los conjuntos de aristas de cardinalidad mínima que desconecten a G. Existen diversos algoritmos que dan solución a este problema, sin embargo, todas estas soluciones requieren de que se conozca en todo momento la topología de la gráfica. Estas soluciones globales (denominadas así porque es necesario conocer la gráfica en su totalidad) son deficientes cuando se intentan modelar redes dinámicas (redes donde los nodos están en constante movimiento). En su lugar se utilizan algoritmos donde no es necesario tener el conocimiento pleno de la topología de la red (denominados algoritmos locales). En este trabajo presentamos una solución local al problema de la identificación de los conjuntos de corte de cardinalidad mínima, el cual presenta una complejidad de $O(n^6)$. También presentamos un algoritmo de enumeración efectiva; este algoritmo local reporta cada vértice y arista de G en tiempo $O(n \log n)$.

1 Introducción

En años recientes se ha observado que las gráficas geométricas son ideales para modelar redes de computadoras en las que la posición es conocida, tal como redes *ad-hoc*, redes celulares y redes de sensores [6]. Estas redes se caracterizan por tener un alto grado de movilidad, por lo que normalmente se catalogan como redes naturalmente dinámicas. Como consecuencia, la aplicación de algoritmos con conocimiento global de la red empiezan a ser ineficientes para este tipo de escenarios [6]. Muchos algoritmos trabajan bajo la suposición de que se cuenta con información global y centralizada sobre la topología de una red [7], lo cual no es conveniente al tratarse de redes dinámicas, ya que el uso de memoria y el mantenimiento de información es muy costoso. La construcción y mantenimiento distribuido (local por nodo) es preferible debido a los recursos limitados (redes de sensores) y a la movilidad de los nodos [7]

Un algoritmo local se modela como un agente con memoria constante, que tiene la capacidad de migrar de un nodo a otro, y que toma decisiones basado sólo en la información que contiene en su memoria, y la ubicación y conectividad del nodo en el que se encuentra. Los algoritmos locales son algoritmos distribuidos, los cuales son altamente escalables, además de ser tolerantes a fallas y cambios sobre la topología de la red [5].

En esta investigación presentamos una propuesta de solución al problema de detección de conjuntos de aristas de corte en una gráfica, mediante la utilización de algoritmos locales. Con ésto se intenta dar una solución distribuida y altamente escalable a este problema tan bien conocido. Los resultados de esta investigación están restringidos para gráficas (redes) geométricas planas simples y conexas.

2 Preliminares

Un algoritmo local se modela como un agente con memoria constante, que tiene la capacidad de migrar de un nodo a otro, y que toma decisiones basado sólo en la información que contiene en su memoria, y la ubicación y conectividad del nodo en el que se encuentra. Por lo tanto, todo nodo o vértice de una gráfica sólo tiene información de vértices que se encuentran a un salto de distancia de él [6].

^{*}Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, México. Investigación parcialmente apoyada por los proyectos 168277 (CONACYT, México) y IA102513 (PAPIIT, UNAM, México).

[†]Instituto de Matemáticas, UNAM, México.

[‡]Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas, UNAM, México.

En [6], se plantea el modelo de algoritmos locales en redes de la siguiente manera. Sea G una gráfica plana. Suponga que cada vértice v en G conoce su posición en la gráfica (sus coordenadas) y la posición de sus vecinos. Existe un algoritmo determinístico que permitirá a un agente A colocado en un vértice u viajar a un vértice v bajo las siguientes condiciones:

- A tiene memoria constante. En todo momento A conoce sólo la posición de $u \neq v$, y la posición de un número constante de nodos.
- Cuando el agente visita un vértice w, éste puede usar la lista de vértices adyacentes a él (sus posiciones).
- A no deja marcas en su recorrido.

La primera restricción trae como consecuencia que el agente A no tenga conocimiento pleno de la topología de G [6]. Podría parecer que algunas de las restricciones anteriores son innecesarias; sin embargo, si consideramos el comportamiento de redes tan grandes como Internet, entonces éstas se convierten claramente en condiciones relevantes. Bajo este modelo, muchos problemas clásicos de teoría de gráficas han sido resueltos, tales como la construcción de gráficas planas [8], problemas de ruteo [3], construcción de árboles generadores [1], así como problemas de elección de líder [2].

Uno de los algoritmos referencia para el recorrido de gráficas planas es el algoritmo de recorrido de caras siguiendo la regla de la mano derecha [4], el cual fue inspirado en el recorrido de laberintos. El algoritmo es simple, indica que si un jugador en un laberinto camina por éste colocando su mano derecha sobre el muro siempre cuidando de no despegarla, entonces el jugador eventualmente visitará cada muro del laberinto; si el laberinto es la cara de una gráfica plana, el jugador visitará cada arista y cada vértice de la cara.

3 Algoritmo de Enumeración Efectiva

Una gráfica geométrica plana conexa divide el plano en cierto número de regiones conexas, las cerraduras de estas regiones se denominan caras. Si se elimina una de las aristas frontera de una de las regiones, esta se mezclará y formará una nueva región (cara) con la región colindante a la arista que se eliminó. Si este procedimiento se realiza con todas las caras internas, al final quedará sólo una cara en la gráfica, que será la externa. Además, si durante el procedimiento se cuida de no romper la conexidad de la gráfica (no formar más componentes conexas) entonces al final del procedimiento la gráfica resultante será un árbol. Por tanto, para reportar todos los elementos de una gráfica basta con hacer un recorrido sobre ese árbol y mediante un conjunto de restricciones sencillas decidir cuándo reportar un elemento.

El Algoritmo 1, al ejecutarse sobre una gráfica, reporta exáctamente una vez cada vértice y cada arista de G. A continuación presentamos algunas definiciones relevantes a este algoritmo.

Definición 1 Diremos que una arista $e = \{u, v\}$ es dominante sobre el vértice u si, al trazar una semirecta vertical a partir de u en la dirección (0, 1), e forma el ángulo menor con esta semirecta.

Definición 2 Sea $e = \{u, v\}$ con $e \in E$ y $u, v \in V$, cuyas coordenadas de los vértices en el plano son $u = (x_1, y_1)$ y $v = (x_2, y_2)$. Se dirá que la arista e está siendo revisada por la izquierda si durante el algoritmo, al estar posicionado el agente sobre el vértice $u, x_2 > x_1$. Para el caso donde $x_1 = x_2$, se dirá que la arista e está siendo revisada por la izquierda si $y_2 > y_1$.

Definición 3 Sea f una cara de G y u el vértice con abscisa mayor en f (en caso de empate, u tendrá la ordenada menor de los vértices empatados). La arista de entrada en f será aquella arista de f que sea adyacente a u y que, al trazar una semirecta vertical a partir de u en la dirección (0, -1) y medir los ángulos en sentido negativo, forme el ángulo menor en valor absoluto con la semirecta.

Sea G = (V, E) una gráfica geométrica plana conexa, donde V denota el conjunto de los vértices pertenecientes a G y E el conjunto de las aristas. El Algoritmo 1 describe el procedimiento para reportar cada arista y vértice de G exactamente una vez, a través de un recorrido completo de la gráfica.

Algoritmo 1 Algoritmo de enumeración efectiva
Entrada: Gráfica geométrica plana conexa $G = (V, E)$, u tal que $u \in V$
Salida: Reporta una vez cada vértice y arista de G
1: Sea $e_u = \{u, v\}$ la arista dominante de u
2: Sea $a = (u, v)$ una dirección sobre e_u
3: La arista de inicio del recorrido será e_u
4: La dirección de inicio del recorrido será a
5: repetir
6: Sea $a = (u, v)$
7: si e_u es la arista dominante de u entonces
8: Reportar el vértice u
9: fin si
10: si e_u está siendo revisada por la izquierda entonces
11: Reportar la arista e_u
12: fin si
13: si e_u es una arista de entrada entonces
14: Ahora e_u será la arista siguiente en el recorrido de la cara siguiendo la regla de la mano derecha y sin tomar en cuenta la arista $\{u, v\}$
15: Sea $e_u = \{u, w\}$, ahora $a = (u, w)$
16: si no
17: Ahora e_u será la arista siguiente en el recorrido de la cara siguiendo la regla de la mano derecha
18: Sea $e_u = \{v, w\}$, ahora $a = (v, w)$
19: fin si
20: hasta que e_u y a sean los valores de inicio

Al realizar el recorrido de la gráfica se evita recorrer todas aquellas aristas que sean de entrada, por lo que el recorrido realizado sobre G será equivalente al recorrido sobre un árbol generador en la gráfica. Por ésto, cada arista será revisada dos veces, una en cada sentido, incluso las aristas de entrada, ya que antes de ser descartadas en el recorrido tendrán que ser evaluadas para ver si son aristas dominantes de algún vértice o verificar si deben ser reportadas o no.

Un vértice será reportado sólo cuando él ha sido elegido como vértice u y la arista que se está revisando (e_u) es su arista dominante, lo cual sólo pasa una vez. Por otro lado, una arista sólo será reportada cuando sea revisada en un sentido, en particular, cuando u sea el vértice con coordenada menor.

Se puede demostrar que el algoritmo de enumeración efectiva (Algoritmo 1) tiene un costo total de tiempo $O(n \log n)$.

4 Detección de conjuntos de corte de cardinalidad m

Una arista e es una arista de corte en G si al eliminarla, la subgráfica obtenida tiene más componentes conexas que G. Asimismo, un conjunto de corte c es un conjunto de aristas de G tal que $G \setminus c$ incrementa el número de componentes conexas en la subgráfica restante, mientras que la eliminación de cualquier subconjunto propio no lo hace.

Siguiendo estas definiciones, podemos obtener los siguientes lemas, cuyas demostraciones omitimos.

Lema 1 Una arista $e \in G$ es de corte si pertenece sólo a una cara.

Lema 2 Sea G una gráfica plana conexa, c un conjunto de corte de cardinalidad $k \ge 2$ y sea e_j un elemento de c. Al realizar $G \setminus e_j$, en la gráfica resultante, $c \setminus e_j$ sigue siendo un conjunto de corte de cardinalidad k - 1 en $G \setminus e_j$.

Lema 3 Sea c un conjunto de corte y c_f el conjunto de caras a las que pertenecen las aristas de c. El conjunto c y el conjunto c_f tienen la misma cardinalidad.

Lema 4 Sea c un conjunto de corte de cardinalidad $k \ge 2$ y c_f el conjunto de las caras a las que pertenece c. En la gráfica dual, los elementos de c_f forman un ciclo.

Por el Lema 4 sabemos que, para encontrar un conjunto de aristas de corte de tamaño m es necesario buscar una secuencia de m aristas que formen un ciclo de tamaño m con las caras a las que pertenecen.

La siguiente operación nos permite comparar dos aristas dadas. Dadas $e = \{u, v\}$, con las coordenadas de u lexicográficamente menores que las de v, y $f = \{p, q\}$, con las coordenadas de p lexicográficamente menores que las de p, decimos que e < f si $(u, v) <_{\text{lex}} (p, q)$.

Se puede verificar que cada cara de una gráfica plana G tiene una arista de entrada distinta. Dada una arista (orientada) e, podemos determinar en tiempo O(n) qué caras tiene a su izquierda y a su derecha, recorriendo esas caras e identificando sus aristas de entrada.

El Algoritmo 2 reporta, dada una arista e, todos los conjuntos de aristas de corte de cardinalidad m a los que pertenece e, tales que e es la arista mayor del conjunto de corte.

Es fácil ver que, según el tamaño del conjunto de corte es el número de caras que se deben recorrer, pues un conjunto de corte de tamaño m forma un ciclo de tamaño m en la gráfica dual. Por lo tanto la complejidad del algoritmo estará dada por el tamaño del conjunto de corte que se desea obtener.

Algoritmo	2 Repor	rtar los	conjuntos	de corte	de	cardinalidad	m a	los que	pertenece	una	arista
-----------	---------	----------	-----------	----------	----	--------------	-----	---------	-----------	-----	--------

Entrada: Gráfica geométrica plana conexa G = (V, E), arista $e = \{u, v\}$ tal que $e \in E$, lista F de aristas a ignorar, vacía por defecto.

Salida: Reporta todos los conjuntos de corte de cardinalidad m que forma e con las demás aristas de la gráfica menores que e.

1: Sean $Cara_e$ y $Cara_{inv(e)}$ las caras a las que pertenece e, ignorando las aristas de F.

2: si m = 1 entonces

3: si $Cara_e = Cara_{inv(e)}$ entonces

4: reporta a $\{e\}$ como un conjunto de corte de cardinalidad 1.

- 5: devolver $\{\{e\}\}$
- 6: **si no**
- 7: No hay ningún conjunto de corte.
- 8: devolver {}
- 9: **fin si**
- 10: **si no**
- 11: Realizar el recorrido de una de las caras, ignorando las aristas de F, en este caso el recorrido se hará sobre $Cara_e$
- 12: **para** cada arista f de $Cara_e$, tal que $f \notin F$ y f < e hacer
- 13: Sea $F' = F \cup \{e\}$

```
14: Sean C = \{c_i\} los conjuntos de corte de tamaño m - 1, calculados recursivamente con parámetros G, f \neq F'.
```

- 15: Reporta cada conjunto de corte de tamaño m-1, aumentado con la arista e.
- 16: **devolver** $\{\{e\} \cup c_i | c_i \in C\}$
- 17: fin para
- 18: **fin si**

Así como ejemplo tenemos que, dada una arista e, para encontrar un conjunto de aristas de corte de cardinalidad 2 a los que pertenece e sólo es necesario encontrar a que caras pertenece e, y hacer un recorrido sobre una de esas caras y por cada arista menor que e revisar a que caras pertenece. Si se encuentra una arista f de corte en $G \setminus \{e\}$, entonces se reporta a $\{e, f\}$ como un conjunto de corte de cardinalidad 2. La complejidad temporal del algoritmo para encontrar un conjunto de corte de cardinalidad m, que contiene a e como su arista mayor, es $O(n^m)$.

5 Detección de conjuntos de corte de cardinalidad mínima

El algoritmo tomará como entrada una gráfica geométrica plana conexa y para cada una de las aristas de la gráfica revisará si es arista de corte; si es así, las aristas de corte serán reportadas y el algoritmo terminará. De lo contrario, para cada una de las aristas de la gráfica se reportarán (si es que existen) los conjuntos de corte de cardinalidad 2 a los que pertenecen (como arista mayor). Este procedimiento se seguirá hasta encontrar por lo menos un conjunto de corte, que para el peor de los casos, será un conjunto de corte de cardinalidad 5 (por tratarse de gráficas planas).

Algoritmo 3 Algoritmo que reporta los conjuntos de corte de cardinalidad mínima
Entrada: Gráfica geométrica plana conexa $G = (V, E)$, u tal que $u \in V$.
Salida: Reporta el o los conjuntos de corte de cardinalidad mínima en G .
1: $m \leftarrow 1$; continuar \leftarrow true
2: mientras continuar hacer
3: recorremos cada una de las aristas de G utilizando el algoritmo 1 de enumeración efectiva
4: para cada arista $e \in E$ hacer
5: devolver los conjuntos de corte de cardinalidad <i>m</i> a los que pertenece <i>e</i> como arista mayor, utilizando
para calcularlos al algoritmo 2
6: si se reportó algún conjunto de corte entonces
7: $\operatorname{continuar} \leftarrow \operatorname{false}$
8: fin si
9: fin para

10: fin mientras

Para verificar los conjuntos de corte de cardinalidad k en la gráfica, se debe realizar un recorrido completo de la misma. El recorrido de la gráfica tiene una complejidad de $O(n \log n)$. En el peor de los casos, se deberán buscar conjuntos de corte de cardinalidad 1, 2, 3, 4 y 5 para cada arista. Por lo tanto, la complejidad total del algoritmo queda de la siguiente forma

 $O(n \log n) + n(O(n)) + n(O(n^2)) + \ldots + n(O(n^5))$

lo cual resulta en la complejidad de $O(n^6)$.

6 Conclusiones

A lo largo de la presente investigación, se estudió un problema muy conocido en gráficas como es la identificación de conjuntos de corte, y se ha presentado una propuesta de solución al problema de encontrar el o los conjuntos de corte de cardinalidad mínima en una gráfica geométrica plana conexa, de manera local. Como una propuesta de trabajo a futuro, se tiene la implementación de estos algoritmos locales en redes físicas que necesiten de algoritmos de este tipo, como las redes de sensores o las redes *ad-hoc*. Otra propuesta es la mejora en la complejidad temporal de los algoritmos, o en su defecto, la demostración de que estas cotas son justas para este problema en particular.

- [1] M. Berg, M.V. Kreveld, R.V. Oostrum, and M. Overmars. Simple traversal of a subdivision without extra storage. *International Journal of Geographical Information Science*, pages 359–373, 1997.
- [2] D.S. Hirschberg and J.B. Sinclair. Decentralized extrema-finding in circular configurations of processors. Technical Note Operating Systems, Communications of the ACM, 1980.
- [3] E. Kranakis, H. Singh, and J. Urrutia. Compass routing on geometric networks. IN PROC. 11 TH Canadian Conference on Computational Geometry, pages 51–54, 1999.
- [4] F.P. Preparata and M.I. Shamos. Computational Geometry, An introduction. Springer-Verlag, 1985.
- [5] J. Suomela. Survey of local algorithms. ACM Computing Surveys (CSUR), 2013.
- [6] J. Urrutia. Local solutions for global problems in wireless networks. Journal of Discrete Algorithms, 5:395–407, 2007.
- [7] D. Wagner and R. Wattenhofer. Algorithms for Sensor and Ad HocNetworks. Springer, 2007.
- [8] D. Wagner and R. Wattenhofer. Local algorithms. Springer, 2007.

Indice de autores

Araujo-Pardo, Gabriela Arredondo, Alexander	97, 115, 167, 173 19
Balbuena, Camino	11, 173
Barrera-Cruz, Fidel	149
Benavides, Fernando A.	101
Bermudo, Sergio	69,125
Borja, Enrique F.	7
Cano, Ma. del Pilar	73
Carballosa, Walter	125
Castañeda Rojano, Armando	27
Cedillo, Carmen	87
Contreras, Esteban	167
Cordero-Michel, Narda	57
Fetter, Hans L.	105
Figueroa, Ana Paulina	15, 109
Flores-Peñaloza, David	185
Fresán Figueroa, Julián	15
Galeana-Sánchez, Hortensia	57, 73, 129, 137
García-Colín, Natalia	117, 133, 155 177
Goldfeder, Ilán A.	57, 73
Gómez Aíza, Ricardo	31
González Moreno, Diego	23, 159
Grima, Clara	7
Guevara, Mucuy-kak	23, 159
Hansberg, Adriana	141
Hernández Cruz, César	115
Hernández Gómez, Juan C.	65, 69
Hernández T., Bertín	77
Juan García, Gabriela	51
Larrión, Paco	37
Leaños, J.,	145
Lomelí-Haro, M.	145
López Bracho, Rafael	43
Luviano, Johana	47
Márquez, Alberto	7
Martinez-Pérez, A.	181
Martinez Sandoval, Leonardo Ignacio	163
Miller, Mirka Montoione, Amenda	173
Montejano, Amanda Montejano, Luig	93, 177
Montellano Ballesteros, Juan José	93, 103, 181 93, 100, 115
Morales Avalos. Edgar	23, 109, 113 133
	100

Murillo García, Sara	167
Oliveros B., Déborah Olsen, Mika	$\begin{array}{c} 77,\ 177,\ 181\\ 109,\ 137,\ 159 \end{array}$
Pizaña, Miguel	37, 87, 117
Rajsbaum, Sergio Ramírez Alfonsín, Jorge Luis Ramírez-Ibáñez, M. Ramírez Maluendas, Camilo Rivera Campo, Eduardo Rivera, J. Rivera-Martínez, L. M. Rodríguez, José M. Rodríguez Martínez, José de Jesús Rodríguez Sánchez, Ma. Guadalupe Rodríguez Villalobos, Cynthia A. Rojas Monroy, Rocío Roldán-Pensado, E.	$ \begin{array}{c} 101\\ 1\\ 145\\ 19\\ 15\\ 185\\ 145\\ 65, 121\\ 81\\ 81\\ 43\\ 129\\ 93\\ \end{array} $
	97.107
Salas, Julián Sigarreta, José M. Soberón, P. Soriano, M.	$ \begin{array}{c} 11\\ 65, 69, 121, 125\\ 93\\ 185\end{array} $
Salas, Julián Sigarreta, José M. Soberón, P. Soriano, M. Tey Carrera, Joaquín Torres-Nuñez, Yadira Tort, Andrea	$ \begin{array}{c} 11\\ 65, 69, 121, 125\\ 93\\ 185\\ 51\\ 121\\ 167\\ \end{array} $
Salas, Julián Sigarreta, José M. Soberón, P. Soriano, M. Tey Carrera, Joaquín Torres-Nuñez, Yadira Tort, Andrea Urbán Rivero, Luis E. Urrutia, Jorge	$ \begin{array}{c} 11\\ 65, 69, 121, 125\\ 93\\ 185\\ 51\\ 121\\ 167\\ 43\\ 185\\ \end{array} $
Salas, Julián Sigarreta, José M. Soberón, P. Soriano, M. Tey Carrera, Joaquín Torres-Nuñez, Yadira Tort, Andrea Urbán Rivero, Luis E. Urrutia, Jorge Valdez, Ferrán Velarde, Carlos Villarroel Flores, Rafael	1165, 69, 121, 1259318551121167431851918537, 61, 117