# Análisis Combinatorio
# Problemario

Prof. Miguel A. Pizaña

28 de Mayo de 2006

Fuertemente basado en los problemas de
R. Brualdi. *Introductory Combinatorics.* North Holland, 1979

I Principio de las Casillas.

1. Enuncie el Principio de las Casillas y el Principio de las Casillas Mejorado.
2. Muestre que en un conjunto de $n$ personas siempre hay al menos 2 que tienen la misma cantidad de amigos en ese conjunto de personas (Suponga que la relación de amistad es simétrica ).
3. Muestre que si escoge 101 números de entre $1, 2, \ldots, 200$, al menos uno de ellos que divide a otro.
4. Suponga que `A` es un algoritmo de compresión *sin pérdida* de información tal que para cada archivo de entrada `F` el archivo comprimido `A(F)` *siempre* tiene longitud (=número de bytes) menor o igual al archivo original `F`. Demuestre entonces que ¡la longitud de `F` es exactamente igual a la longitud de `A(F)` para todo archivo `F`!
5. En vista del problema anterior ¿cómo hacen los algoritmos de compresión para funcionar?
6. Sea $x_0, x_1, x_2, \ldots$ una sucesión de bits generada por algún algoritmo corriendo en alguna computadora real (por contraposición a una computadora "ideal"). Demuestre que existen dos números naturales $n \neq m$ tal que $x_{n+t} = x_{m+t}$ para todo número natural $t$.
7. Demuestre que no es posible generar números (genuinamente) aleatorios corriendo un algoritmo en una computadora real. ¿Cómo hacen los algoritmos "generadores de números aleatorios" entonces para funcionar?
8. Demuestre que para toda $\varepsilon$ existe una $N$ tal que cualquier conjunto de al menos $N$ rectas en el plano contiene al menos 2 que forman un ángulo menor que $\varepsilon$.
9. Demuestre que dados cualesquiera 5 puntos en un cuadrado de 2 cm de lado hay al menos 2 de ellos que están a distancia a lo más $\sqrt{2}$. ¿Cuántos puntos necesita poner en el mismo cuadrado para garantizar haya al menos 2 a una distancia menor o igual que $\frac{2\sqrt{2}}{3}$? ¿y para garantizar una distancia de $10^{-6}$ cm?

II Combinaciones y Permutaciones.

1. Enuncie el principio de la suma y el del producto.
2. ¿Cuántos números entre 1000 y 9999 tienen todos sus dígitos distintos?
3. ¿Cuántos números de 7 dígitos (tomados entre 1 y 9) hay tal que ... ?
   (a) ¡sean números!
   (b) sean pares.
   (c) sean divisibles entre 3.
   (d) tengan todos sus dígitos diferentes.
   (e) el 3 y el 7 no aparezcan contiguos.
   (f) cumplan las dos propiedades anteriores.
4. ¿Cuántas 5-permutaciones de $\{\infty \cdot 0, \infty \cdot 1\}$ hay? ¿Cuántas de ellas tienen la propiedad de que todo cero que aparezca en la permutación tiene al menos un uno contiguo?
5. Sea $M = \{\infty \cdot x_1, \ldots, \infty \cdot x_k\}$. Muestre que hay una biyección entre los conjuntos: $\mathcal{C}(M, n)$ y $\mathcal{P}(\{n \cdot 1, (k-1) \cdot \ddagger\}, n+k-1)$. Muestre que $|\mathcal{C}(M, n)| = \binom{n+k-1}{n}$.
6. Sea $M = \{\infty \cdot x_1, \ldots, \infty \cdot x_k\}$. Muestre que el número de $n$-combinaciones de $M$ es $\binom{n+k-1}{n}$.
7. Muestre que dado un multiconjunto de $n$ elementos iguales, existen $\binom{n+k-1}{n}$ maneras diferentes de acomodar estos elementos en $k$ cajas.
8. ¿De cuántas maneras (justas o injustas) se pueden repartir 10 dulces iguales entre 4 niños?
9. Sean $n$ y $a_1, a_2, \ldots, a_k$ constantes no negativas. ¿Cuántas soluciones tiene cada uno de los sistema de ecuaciones/desigualdades siguientes?
   (a) $\begin{cases} n & \geq & x_1 + x_2 + \cdots + x_k \\ x_i & \geq & 0 \text{ para toda } i. \end{cases}$
   (b) $\begin{cases} n & = & x_1 + x_2 + \cdots + x_k \\ x_i & \geq & 0 \text{ para toda } i. \end{cases}$
   (c) $\begin{cases} n & \geq & x_1 + x_2 + \cdots + x_k \\ x_i & \geq & a_i \text{ para toda } i. \end{cases}$
10. Sin tomar en cuenta la legalidad o validez de las configuraciones consideradas, ¿cuántas configuraciones posibles hay en el ... ?
    (a) Gato.
    (b) Juego del 15.
    (c) Cubo de Rubik.
    (d) Tablero de ajedrez.

11. En un conjunto de $n$ personas, ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 2 de ellas tengan la misma fecha de cumpleaños (sin contar el año)? Calcule explícitamente la probabilidad para $n = 10, 20, \ldots, 100$, y para 365 y 400. ¿Cuántas personas se requieren para que la probabilidad sea (casi igual a) 1/2?
12. Si le dan 5 cartas al azar (de una baraja sin comodines), ¿Cuál es la probabilidad de obtener un par? ¿dos pares? ¿tercia? ¿flor? ¿full? ¿corrida? ¿flor y corrida? ¿póker? ¿flor imperial?
13. En el juego del *melate* usted escoge 6 números entre 1 al 51. Los organizadores del sorteo escogen 6 número denominados *naturales* y uno más denominado *adicional*. Para obtener el primer lugar usted necesita 6 aciertos (sus 6 números escogidos coinciden con los 6 naturales), para el segundo lugar necesita $5+1$ aciertos (5 de los números que usted escogió son naturales y el otro es el adicional). Para los lugares del 3 al 8 necesita usted obtener 5, $4+1$, 4, $3+1$, 3 ó $2+1$ aciertos (respectivamente). ¿Cuál es la probabilidad de obtener cada uno de los posibles premios?.
14. Demuestre que $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$, $C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$
15. Sea $M = \{n_1 \cdot x_1, \ldots, n_k \cdot x_k\}$ y $n = n_1 + \cdots + n_k$. Demuestre que $P(M,n) = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$
16. Un sistema operativo está ejecutando 5 procesos concurrentemente: $P_1, P_2, \ldots, P_5$. Cada Proceso $P_i$ requiere $t_i$ "rebanadas de tiempo" para ser completado y $t_1 = 4$, $t_2 = 3$, $t_3 = 1$, $t_4 = 2$, $t_5 = 3$. ¿De cuántas maneras se pueden asignar las 13 rebanadas necesarias entre los 5 procesos?

III Identidades Combinatorias.

1. De interpretaciones combinatorias de las siguientes identidades.
   (a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
   (b) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
   (c) $\binom{n}{k}\binom{n-k}{l} = \binom{n}{k+l}\binom{k+l}{l}$
   (d) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^n\binom{n}{k} = 0$
   (e) $2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$
   (f) $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$
   (g) $\binom{n+m}{k} = \sum_{a+b=k}\binom{n}{a}\binom{m}{b}$
   (h) $\binom{n}{k} = \sum_{a=0}^{s}\binom{s}{a}\binom{n-s}{k-a}$
   (i) $\binom{n}{k}^2 = \sum_{a=0}^{k}\binom{n}{a}\binom{n-a}{k-a}\binom{n-k}{k-a}$
   (j) $2^{2n} = \sum_{0\le a+b+c\le n}\binom{n}{a}\binom{n-a}{b}\binom{n-a-b}{c}$
   (k) $\binom{n}{k_1\,k_2\,\cdots\,k_r} = \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3}\cdots\binom{n-k_1-\cdots-k_{r-1}}{k_r}$
   (l) $2^{2n} = \sum\binom{n}{k_1\,k_2\,k_3\,k_4}$

(m) $2^{rn} = \sum \binom{n}{k_1\, k_2 \cdots k_{2r}}$

2. Proporcione una prueba combinatoria de: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$
3. Proporcione una prueba combinatoria de:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_r=n} \binom{n}{k_1\, k_2\, \cdots\, k_r} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_r^{k_r}$$

4. Demuestre las siguientes identidades:
   (a) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$
   (b) $\sum_{r=0}^{k} \binom{n-k+r}{r} = \binom{n+1}{k}$
   (c) $\sum_{r=0}^{n} \binom{r}{k} = \binom{n+1}{k+1}$
   (d) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$
   (e) $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$
   (f) $\sum_{k=0}^{n} k^3\binom{n}{k} = n^2(n+3)2^{n-3}$