Análisis Combinatorio
Segundo Problemario

Prof. Miguel A. Pizaña

23 de Junio de 2006

Casi completamente extraído de los problemas de
R. Brualdi. *Introductory Combinatorics*. North Holland, 1979

I Principio de Inclusión y Exclusión

1. Demuestre el principio de inclusión y exclusión.
2. Use el principio de inclusión y exclusión para dar una fórmula para los desarreglos D_n.
3. ¿Cuántas 10-combinaciones tiene el multiconjunto $\{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$?
4. ¿Cuántas 12-combinaciones tiene el multiconjunto $\{4\cdot a, 3\cdot b, 4\cdot c, 5\cdot d\}$?
5. ¿Cuántas 10-combinaciones tiene $\{\infty \cdot a, 3 \cdot b, 5 \cdot c, 7 \cdot d\}$?
6. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. ¿Cuántas funciones biyectivas $f : X \to X$ hay que satisfagan $x + f(x) \neq 6$ para toda $x \in X$?
7. ¿Cuantos números entre 1 y $10,000$ (inclusive) no son divisibles entre $4, 6, 7, 10$?
8. ¿Cuántos números entre 1 y $10,000$ (inclusive) no son cuadrados perfectos ni cubos perfectos?
9. Determine una fórmula para el número de permutaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tal que exactamente k números están en su posición natural.
10. Use un argumento combinatorio para mostrar que:

$$n! = \binom{n}{0} D_n + \binom{n}{1} D_{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} D_1 + \binom{n}{n} D_0$$

    (Aquí, defina $D_0 = 1$)
11. Use el principio de inclusión y exclusión para probar que:

$$\binom{n}{k} = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j}$$

II Relaciones de Recurrencia

1. Demuestre que si $f(n)$ y $g(n)$ son soluciones de una relación de recurrencia lineal y homogénea de orden k entonces $af(n)+bg(n)$ también es solución de la recurrencia para cualesquiera constantes a y b.

2. Suponga que q es una raíz triple de la ecuación característica de una relación de recurrencia lineal y homogénea de orden k. Demuestre que q^n, nq^n y n^2q^n son soluciones de la recurrencia.

3. Proporcione una fórmula cerrada para los números de Fibonacci.

4. Proporcione una fórmula cerrada para el número de movimientos requeridos para resolver el problema de las torres de Hanoi.

5. Sea $h(n)$ el número de maneras en que se puede colorear un tablero de $1 \times n$ casillas con los colores de la bandera mexicana de tal manera que no haya dos cuadros adyacentes coloreados de rojo. Encuentre y resuelva una relación de recurrencia para $h(n)$.

6. Resuelva las siguientes relaciones de recurrencia con las condiciones iniciales dadas:

   (a) $H(n) = 4H(n-2)$,
   $H(0) = 0, H(1) = 1$.

   (b) $H(n) = H(n-1) + 9H(n-2) - 9H(n-3)$,
   $H(0) = 0, H(1) = 1, H(2) = 2$.

   (c) $H(n) = 8H(n-1) - 16H(n-2)$,
   $H(0) = -1, H(1) = 0$.

   (d) $H(n) = 3H(n-2) - 2H(n-3)$,
   $H(0) = 1, H(1) = 0, H(2) = 0$.

   (e) $H(n) = 5H(n-1) - 6H(n-2) - 4H(n-3) + 8H(n-4)$,
   $H(0) = 0, H(1) = 1, H(2) = 1, H(3) = 2$.

7. Resuelva las siguientes relaciones de recurrencia con las condiciones iniciales dadas:

   (a) $H(n) = (n+2)H(n-1)$; $H(0) = 2$.

   (b) $H(n) = \frac{n}{n+1}H(n-1)$; $H(0) = 1$.

   (c) $H(n) = H(n-1) + H(n-2) + \cdots + H(0)$; $H(0) = 1$.

   (d) $H(n) = 2H(\lfloor n/2 \rfloor)$; $H(0) = 1$.

   (e) $H(n) = n + H(n-1)$; $H(0) = 0$.

8. ¿Cuánto tiempo tarda en ejecutarse el algoritmo `mergesort`?

9. ¿Cuánto tiempo tarda en ejecutarse el algoritmo `quicksort` en los casos: peor, promedio y mejor?

10. ¿Cuánto tiempo tarda en ejecutarse el algoritmo recursivo para calcular números de Fibonacci? ¿El algoritmo iterativo? ¿El algoritmo que usa la solución explícita de la relación de recurrencia?

11. Muestre que el conjunto de todas las tablas de diferencias que tienen primera diagonal finita (es decir $= c_0, c_1, \ldots, c_k, 0, 0, 0, \ldots$) es un espacio vectorial.

12. Muestre que una tabla de diferencias está determinada por su primera diagonal.

13. Dada una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sea T_f su tabla de diferencias. Muestre que $T_{\alpha f + \beta g} = \alpha T_f + \beta T_g$.
14. Muestre que $f(n) = \binom{n}{k}$ es una función cuya tabla de diferencias T_f tiene primera diagonal igual a cero en todas sus entradas excepto en la entrada k-ésima en donde vale 1.
15. Muestre que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es un polinomio si y sólo si su tabla de diferencias T_f se anula a partir de cierto renglón. Muestre existen funciones $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que g no es un polinomio, pero su tabla de diferencias T_g sí se anula a partir de cierto renglón.
16. Proporcione una relación de recurrencia para el número de regiones en que se divide el espacio con n planos en posición general. Resuelva esa recurrencia.

III Funciones Generadoras

1. Sea c un número real. Determinar la función generadora para la secuencia de números: $c^0 = 1, c^1, c^2, \ldots, c^n, \ldots$
2. Determinar la función generadora de cada una de las siguientes secuencias de números:
   (a) $1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots$
   (b) $\binom{\alpha}{0}, -\binom{\alpha}{1}, \binom{\alpha}{2}, \ldots, (-1)^n\binom{\alpha}{n}, \ldots$
   (c) $0, 0, 0, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$
   (d) $5, 6, 7, \ldots, n+5, \ldots$
   (e) $1/0!, 1/1!, 1/2!, \ldots, 1/n!, \ldots$
   (f) $1/0!, -1/1!, 1/2!, \ldots, (-1)^n/n!, \ldots$
3. Resuelva las siguientes relaciones de recurrencia usando funciones generadoras:
   (a) $a_n = 4a_{n-2}$; $a_0 = 0, a_1 = 1$.
   (b) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$; $a_0 = 1, a_1 = 3$.
   (c) $a_n = a_{n-1} + 9a_{n-2} - 9a_{n-3}$; $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2$.
   (d) $a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2}$; $a_0 = -1, a_1 = 0$.
   (e) $a_n = 3a_{n-2} - 2a_{n-3}$; $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 0$.
   (f) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} - 4a_{n-3} + 8a_{n-4}$;
   $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2$.
   (g) $a_n = 2a_{n-1} - 4a_{n-2} + 8a_{n-3} + 16a_{n-4}$;
   $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 2$.
4. Calcule los primeros 6 términos de las sucesiones que tienen por función generadora a:
   (a) $\frac{1+2x}{1+3x+x^2}$
   (b) $\frac{1+3x^2}{1+2x+x^2+5x^4}$
   (c) $\frac{2+3x+x^2}{3+x+x^4}$

5. Determine la función generadora de la sucesión de cubos: $0, 1, 8, 27, \ldots, n^3, \ldots$
6. Una *partición* de un entero positivo n es una representación de n como una suma de enteros positivos. El orden de los sumandos no se considera al contar particiones, por ejemplo el 4 tiene exactamente cinco particiones: 4, $3+1$, $2+2$, $2+1+1$ y $1+1+1+1$. Denotamos por $p(n)$ el número de particiones de n (por ejemplo $p(4) = 5$). Defina $p(0) = 1$. Entonces:
   (a) Muestre que $p(n)$ es el número de maneras de distribuir n objetos idénticos entre un número indeterminado (arbitrariamente grande) de cajas idénticas.
   (b) Muestre que $p(n)$ es igual al número de soluciones (en enteros no negativos) de la ecuación $n = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + \cdots + n \cdot x_n$
   (c) Muestre que la función generadora de la sucesión $p(0), p(1), p(2), \ldots, p(n), \ldots$ está dada por el producto infinito:
   $$\prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^k)^{-1}$$
   (d) Sean $t_1, t_2, \ldots, t_m$ enteros positivos distintos. Sea $q(n)$ el número de particiones de n en donde los sumandos son tomados del conjunto $\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$. Define $q(0) = 1$. Muestre que la función generadora para $q(0), q(1), q(2), \ldots, q(n), \ldots$ es:
   $$\prod_{k=1}^{m}(1 - x^{t_k})^{-1}$$

IV Teoría de las gráficas

1. Enuncie y explique tres aplicaciones de Teoría de las Gráficas.
2. Muestre que en toda gráfica, el número de vértices de grado impar es par.
3. Muestre que $K_{3,3}$ no se puede dibujar en el plano sin cruces.
4. Sea A la matriz de adyacencia de una gráfica. ¿Que información nos da A^d? Demuéstrelo.
5. Muestre que en todo árbol, cada par de vértices está conectado por una única trayectoria.
6. Muestre que en todo árbol, el número de aristas es igual al número de vértices menos uno.
7. Muestre que todo árbol tiene al menos dos vértices de grado 2.
8. Muestre que si un árbol T tiene un vértice de grado k, entonces también tiene al menos k vértices de grado 1.

9. Sea G una gráfica con n vértices y $n-1$ aristas. Muestre que son equivalentes:
   (a) G es conexa.
   (b) G no tiene ciclos.
   (c) G es un árbol.
10. Muestre que una gráfica conexa es árbol si y sólo si toda arista es una arista de corte.
11. Muestre que toda gráfica tiene un subárbol generador.
12. Muestre que toda gráfica conexa de n vértices tiene al menos $n-1$ aristas.
13. Si T es un subárbol generador de una gráfica G y e es una arista que no está en T entonces $T+e$ tiene un único ciclo.
14. Demuestre la fórmula de Cayley: $\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G/e)$. (Aquí, $\tau(G)$ es el número de árboles de G).
15. Muestre que $\tau(K_n) = n^{n-2}$.
16. Muestre que si e es una arista de K_n, entonces $\tau(K_n - e) = (n-2)n^{n-3}$.
17. Describa el algoritmo de Kruskal. Demuestre que es correcto.
18. Asegúrese de saber usar el algoritmo de Kruskal.
19. Pruebe que una gráfica G posee un camino Euleriano si y sólo si G tiene cuando mucho dos vértices de grado impar.
20. Muestre que G es Euleriana si y sólo si $L(G)$ es Hamiltoniana.
21. ¿Por qué no se puede usar el ejercicio anterior para verificar la Hamiltoneidad de una gráfica dada de manera eficiente?
22. Pruebe que si G tiene al menos 3 vértices y el grado mínimo es al menos $\frac{1}{2}|G|$, entonces G es Hamiltoniana.
23. Un apareamiento M de G es máximo si y sólo si G no tiene una trayectoria M-aumentadora.
24. Sea G una gráfica bipartita con partición $\{X, Y\}$. Entonces G contiene un apareamiento que satura a X si y sólo si $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq X$.
25. Tome un tablero de ajedrez y serruche dos esquinas opuestas. Muestre que lo que resta del tablero no se puede cubrir de manera exacta con dominós.
26. Describa el método húngaro. Muestre que es correcto.
27. Asegúrese de saber usar el método húngaro.