

Teoría Matemática de la Computación

Problemario

Prof. Miguel A. Pizaña
28 de Mayo de 2006

I Modelos vs Realidad

1. Explique las diferencias y similitudes entre modelo (matemático) y realidad.
2. ¿Cómo hace uno para medir qué tan bien aproxima un modelo matemático a la realidad?
3. La “ley de conservación de la materia y la energía”, ¿Es parte de un modelo, o parte de la realidad? ¿Qué tan cierta es esta ley?
4. ¿Qué tan cierto es el teorema de Pitágoras? Explique con detalle. Proporcione una prueba del teorema de Pitágoras.
5. Suponga que lanza usted una moneda un millón de veces y en todas esas ocasiones usted ve a la moneda caer hasta el suelo en un lindo arco parabólico. ¿Eso es garantía de que la siguiente vez que usted lance la moneda, ésta no se va a convertir en un monstruo de espagueti volador? Explique.
6. Suponga que usted juega al *melate* un millón de veces y en todas esas ocasiones usted NO se saca el premio. ¿Eso es garantía de que la siguiente vez que usted juegue *melate* tampoco se va a sacar el premio? Explique.
7. ¿Cuáles son los 3 principales modelos matemáticos que se usan para aproximar las nociones de “algoritmo” y “computadora”? ¿Cuáles son las principales características de estos modelos? ¿Qué ventajas y desventajas relativas tienen? ¿Para qué se usa cada uno de estos modelos?

II Autómatas Finitos Deterministas

1. ¿Qué es un Autómata Finito Determinista? ¿Cómo se define? ¿Cuáles son sus principales características? ¿Para qué sirve? ¿Cómo se define el *lenguaje reconocido* por un AFD? ¿Cuáles aspectos de la realidad aproxima bien este modelo? ¿Cuáles aproxima mal?
2. Para cada uno de los siguientes lenguajes, proporcione un AFD que los reconozca (suponga que $\Sigma = \{0, 1\}$).
 - (a) Cadenas que terminen en 00.
 - (b) Cadenas que contengan tres (o más) ceros consecutivos.
 - (c) Cadenas que contengan tres (pero no más de tres) ceros consecutivos.
 - (d) Cadenas que contengan la subcadena 000 exactamente una vez.
 - (e) Cadenas que tengan un 0 en la décima posición contando desde la izquierda.
 - (f) Lo mismo que el anterior, pero contando desde la derecha.
 - (g) Cadenas que contengan a 0101 como subcadena.
 - (h) Cadenas que NO contengan a 0101 como subcadena.
 - (i) Cadenas tal que en cada subcadena de longitud 5 haya al menos 2 ceros.
 - (j) Cadenas tal que en cada prefijo el valor absoluto de la diferencia entre el número de 1's y el número de 0's sea menor o igual a 5.
 - (k) Cadenas como en el inciso anterior en donde además el número total de ceros es igual al número total de unos.
3. Haga un lista completa de todos los AFD con alfabeto binario que tengan uno o dos estados (son 66, pero muchos de ellos son equivalentes). ¿Qué lenguaje reconoce cada uno de ellos?
4. Sea $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$. Demuestre que no existe ningún AFD que reconozca a L .
5. Demuestre que si permitimos que el conjunto de estados en un Autómata Determinista sea infinito, entonces, dado cualquier lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$ existe un Autómata Determinista (posiblemente infinito) M tal que $L = L(M)$.

6. Demuestre que dado cualquier lenguaje **finito** L existe un AFD que lo reconoce.
7. ¿Existe un AFD que dada cualquier matriz de $n \times n$ ($n < 50$) de números de punto flotante de doble precisión (todo ello codificado como una cadena binaria) decida si es invertible? Explique.
8. Los AFD sólo modelan algoritmos de decisión. Desarrolle usted su propio modelo matemático basado en el del AFD (memoria finita) que modele **cualquier** procesamiento de información $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ “computable con memoria finita”. Por ejemplo, su modelo debería poder transformar cualquier cadena $w \in \Sigma^*$ de ceros y unos en la cadena w' que consta del doble de unos que w y no tiene ceros.
9. Modifique su modelo anterior para que sea capaz de percibir el paso del tiempo y actuar en respuesta a ello. Por ejemplo, su modelo debería poder mostrar el comportamiento del teclado: Si oprimes y sueltas (rápidamente) una tecla aparece la correspondiente letra en pantalla, pero si oprimes y mantienes oprimida la tecla aparecerá la tecla correspondiente con un número de repeticiones que depende del tiempo transcurrido.
10. ¿Puede usted hacer un programa de computadora que lea un número natural n expresado en binario y regrese $n + 1$ también expresado en binario? ¿Y si el número debe ser leído y escrito al revés (es decir en formato *bigendian*)? ¿Puede hacer un programa que regrese $2n$? $2n + 1$? n^2 ?

III Máquinas de Acceso Aleatorio.

1. ¿Qué es un a Máquina de Acceso Aleatorio? ¿Cómo se define? ¿Cuáles son sus principales características? ¿para que sirve? ¿Cuáles son sus operaciones elementales? ¿Cuánto tiempo tarda en realizar un operación elemental? ¿Qué almacena en cada celda de memoria? ¿cuántas celdas tiene? ¿Cuáles son las principales variaciones del modelo RAM básico? ¿Cuáles aspectos de la realidad aproxima bien este modelo? ¿Cuáles aproxima mal? ¿Qué paradojas produce este modelo de la computación?
2. Muestre que el algoritmo usual para multiplicar matrices tarda un tiempo del orden de n^3 .

3. El mejor algoritmo conocido para calcular matrices tarda un tiempo del orden de n^α . ¿Cuánto vale α ? ¿Quién o quienes descubrieron ese algoritmo?
4. Muestre que es físicamente imposible tener una computadora con memoria arbitrariamente grande (aunque finita) en donde se pueda tener acceso a cualquiera de sus celdas en menos de un milise-gundo.
5. La “Ley de Moore” afirma que la cantidad de transistores que se pueden poner en un chip se duplica cada 18 meses. Muestre que es físicamente imposible que esto pueda ocurrir por siempre.

IV Máquinas de Turing.

1. ¿Qué es una Máquina de Turing? ¿Cómo se define? ¿Cuáles son sus principales características? ¿para que sirve? ¿Cuánta memoria tiene? ¿Qué operaciones básicas sabe realizar una MT? ¿Cuáles aspectos de la realidad aproxima bien este modelo? ¿Cuáles aproxima mal? ¿Cuándo se dice que una MT acepta a una palabra? ¿Cuándo la rechaza? ¿Ante que situaciones una MT decide detenerse? ¿Hay alguna correlación entre la acción de “reconocer una palabra” y la acción de “detenerse”?
2. En este contexto ¿Qué es un Algoritmo? ¿Qué es un Procedimiento? ¿Cuál es la diferencia esencial?
3. Sea $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$. Proporcione una MT que reconozca a L
4. Proporcione una MT que reconozca palíndromos de 0's y 1's.
5. Proporcione una MT que inserte un símbolo “ ϵ ” al inicio de su cinta.
6. Proporcione una Máquina de Turing que sume 1. Suponga que la celda inicial de su cinta está marcada con un signo “ ϵ ”.
7. Demuestre que dado cualquier Autómata Finito Determinista A , existe una Máquina de Turing M tal que $L(A) = L(M)$.
8. ¿Es cierto que dada cualquier MT M existe un AFD A tal que $L(A) = L(M)$?