Teoría Matemática de la Computación
Primer Problemario

Prof. Miguel A. Pizaña

11 de Octubre de 2006

I Tareas

1. Dudar de todo, al menos una vez en la vida.
2. Revisar sus apuntes todos los días en la tarde o noche.
3. ¿Ver el documental "la marcha de los pingüinos"?
4. ¿Cómo se llama la teoría del conocimiento que afirma que lo que no se puede observar (medir) no existe? ¿Qué es el realismo platónico? ¿el positivismo lógico? ¿el empirismo?
5. ¿Que es el principio de incertidumbre de Heisemberg? ¿el gato de Schrödinger? ¿la ecuación de Schrödinger? ¿estados superpuestos? ¿el problema de la medida (en física cuántica)?
6. ¿Qué emociones le produce el teorema de Cantor, la inexistencia del conjunto universo, la iresolubilidad de la mayoría de los problemas? (esta tarea es para entregar).
7. ¿Quién es Noam Chomsky?
8. ¿Puede el cerebro humano ser modelado por una computadora? ¿Pueden (o podrán un día) las máquinas pensar?

II Modelos vs Realidad

1. Explique las diferencias y similitudes entre modelo (matemático) y realidad.
2. ¿Cómo hace uno para medir qué tan bien aproxima un modelo matemático a la realidad?
3. La "ley de conservación de la materia y la energía", ¿Es parte de un modelo, o parte de la realidad? ¿Qué tan cierta es esta ley?

4. ¿Qué tan cierto es el teorema de Pitágoras? Explique con detalle. Proporcione una prueba del teorema de Pitágoras.
5. ¿Que dice el teorema de Banach-Tarski ? ¿Es cierto el teorema de Banach-Tarski?
6. Muestre que el teorema de Pitágoras y la idea de una longitud mínima (= longitud de Planck) son mutuamente contradictorias. ¿Cuál de ellas es verdadera? Explique.
7. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
   (a) La siguiente afirmación es falsa.
   (b) La afirmación anterior es verdadera.
   (c) Las dos afirmaciones anteriores son falsas.
   (d) Las dos primeras afirmaciones son verdaderas.
   (e) Ninguna de las anteriores es verdadera.
8. ¿Es verdadera la afirmación: "Esta afirmación es falsa"?.
9. ¿Cuál es el más pequeño de los números reales positivos?
10. ¿Es el modelo matemático una aproximación a la realidad o al revés? ¿Qué es la realidad? ¿Qué es la verdad?
11. Suponga que lanza usted una moneda un millón de veces y en todas esas ocasiones usted ve a la moneda caer hasta el suelo en un lindo arco parabólico. ¿Eso es garantía de que la siguiente vez que usted lance la moneda, ésta no se va a convertir en un monstruo de espagueti volador? Explique.
12. Suponga que usted juega al *melate* un millón de veces y en todas esas ocasiones usted NO se saca el premio. ¿Eso es garantía de que la siguiente vez que usted juegue *melate* tampoco se va a sacar el premio? Explique.
13. Pruebe el teorema de Schröder-Bernstein: Para cualesquiera dos conjuntos A y B tenemos que $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |A|$ implican $|A| = |B|$
14. Pruebe el teorema de Cantor: para todo conjunto X, tenemos que $|X| < |\mathscr{P}(X)|$.
15. Suponga que Σ es cualquier conjunto finito no vacío. Pruebe que: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}| = |\Sigma^*| = |\{programas\}|$.

16. Pruebe que: $|\mathbb{R}| = |(0,1)| = |[0,1]| = |\mathbb{C}| = |\mathbb{R}^n| = |\mathscr{P}(\mathbb{N})| = |\mathscr{P}(\Sigma^*)| = |\{problemas\}|$.
17. Pruebe que $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.
18. Pruebe que el universo no existe.
19. Pruebe que el problema del paro es irresoluble. Pruebe también que es irresoluble el problema de decidir si un programa dado P, con una entrada dada E:
    (a) Va alguna vez a escribir algo en pantalla.
    (b) Va alguna vez a accesar al disco duro.
    (c) Va a enviar un email.
    (d) Va a formatear el disco duro.
    (e) Es viral (va a hacer copias de sí mismo).
20. Pruebe que la mayoría de los problemas son irresolubles.
21. ¿Cuáles son los 3 principales modelos matemáticos que se usan para aproximar las nociones de "algoritmo" y "computadora"? ¿Cuáles son las principales características de estos modelos? ¿Qué ventajas y desventajas relativas tienen? ¿Para qué se usa cada uno de estos modelos?

III Autómatas Finitos Deterministas

1. ¿Qué es un Autómata Finito Determinista? ¿Cómo se define? ¿Cuáles son sus principales características? ¿Para qué sirve? ¿Cómo se define el *lenguaje reconocido* por un AFD? ¿Cuáles aspectos de la realidad aproxima bien este modelo? ¿Cuáles aproxima mal?
2. Para cada uno de los siguientes lenguajes, proporcione un AFD que los reconozca (suponga que $\Sigma = \{0, 1\}$).
    (a) Cadenas que terminen en 00.
    (b) Cadenas que contengan tres (o más) ceros consecutivos.
    (c) Cadenas que contengan tres (pero no más de tres) ceros consecutivos.
    (d) Cadenas que contengan la subcadena 000 exactamente una vez.
    (e) Cadenas que representen números enteros divisibles entre 3.

(f) Cadenas que representen números enteros divisibles entre 7.

(g) Cadenas que tengan un 0 en la décima posición contando desde la izquierda.

(h) Lo mismo que el anterior, pero contando desde la derecha.

(i) Cadenas que contengan a 0101 como subcadena.

(j) Cadenas que NO contengan a 0101 como subcadena.

(k) Cadenas tal que en cada subcadena de longitud 5 haya al menos 2 ceros.

(l) Cadenas tal que en cada prefijo el valor absoluto de la diferencia entre el número de 1's y el número de 0's sea menor o igual a 5.

(m) Cadenas como en el inciso anterior en donde además el número total de ceros es igual al número total de unos.

3. Determinar si los siguientes lenguajes son regulares o no (Encuentre un AFD que lo reconozca o use el lema alfa).

(a) $\{\omega \in \{a, b, c, d\}^* : \omega$ contiene a la palabra $abcd$ como subcadena $\}$

(b) $\{\omega \in \{a, b, c, d\}^* : \omega$ **NO** contiene a la palabra $abcd$ como subcadena $\}$

(c) $L_m = \{0^{n+m}1^n : n \geq 0\} \cup \{0^n 1^{n+m} : n \geq 0\}$

(d) $\bigcup_{m=0}^{\infty} L_m$ (Aquí L_m es como en el problema anterior)

(e) $\{0^{n^2} : n \geq 1\}$

(f) {Sonetos en español} (suponga que el conjunto de cadenas del "español" está bien definido)

(g) {Paréntesis balanceados} =
$= \{(), (()), ()(), ((())), (())(), ()(()), ()()(), (((()))), ((()())), \ldots, ((()))(), \ldots\}$

(h) Cadenas de paréntesis balanceados que no tengan más de un trillón de paréntesis.

(i) {Expresiones aritméticas} =
$= \{\omega \in \{+, -, *, /, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}^* :$ etcétera $\}$
(considerar a "$-$" y "$+$" únicamente como operadores binarios).

(j) {Expresiones aritméticas con paréntesis} =
$= \{\omega \in \{+, -, *, /, (,), 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}^* :$ etcétera $\}$

(k) {Declaraciones de variables en C}

(l) {Programas en C}

4. ¿Qué dice el lema del bombeo ("lema del sondeo", "pumping lemma")? ¿para qué se usa?
5. Haga un lista completa de todos los AFD con alfabeto binario que tengan uno o dos estados (son 66, pero muchos de ellos son equivalentes). ¿Qué lenguaje reconoce cada uno de ellos?
6. Demuestre que si permitimos que el conjunto de estados en un Autómata Determinista sea infinito, entonces, dado cualquier lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$ existe un Autómata Determinista (posiblemente infinito) M tal que $L = L(M)$.
7. Demuestre que dado cualquier lenguaje **finito** L existe un AFD que lo reconoce.
8. Probar que los lenguajes regulares son cerrados bajo: complemento, unión, intersección.
9. ¿Existe un AFD que dada cualquier matriz de $n \times n$ ($n < 50$) de números de punto flotante de doble precisión (todo ello codificado como una cadena binaria) decida si es invertible? Explique.
10. Los AFD sólo modelan algoritmos de decisión. Desarrolle usted su propio modelo matemático basado en el del AFD (memoria finita) que modele **cualquier** procesamiento de información $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ "computable con memoria finita". Por ejemplo, su modelo debería poder transformar cualquier cadena $w \in \Sigma^*$ de ceros y unos en la cadena w' que consta del doble de unos que w y no tiene ceros.
11. Modifique su modelo anterior para que sea capaz de percibir el paso del tiempo y actuar en respuesta a ello. Por ejemplo, su modelo debería poder mostrar el comportamiento del teclado: Si oprimes y sueltas (rápidamente) una tecla aparece la correspondiente letra en pantalla, pero si oprimes y mantienes oprimida la tecla aparecerá la tecla correspondiente con un número de repeticiones que depende del tiempo transcurrido.
12. ¿Puede usted hacer un programa de computadora que lea un número natural n expresado en binario y regrese $n + 1$ también expresado en binario? ¿Y si el número debe ser leído y escrito al revés (es decir en formato *bigendian*)? ¿Puede hacer un programa que regrese $2n$? ¿$2n + 1$? ¿n^2?.

IV Máquinas de Acceso Aleatorio.

1. ¿Qué es un a Máquina de Acceso Aleatorio? ¿Cómo se define? ¿Como se llama la teoría que emerge del estudio de este modelo? ¿Cuáles son sus principales características? ¿para que sirve? ¿Cuánto tiempo tarda en realizar un operación elemental? ¿Qué almacena en cada celda de memoria? ¿cuántas celdas tiene? ¿Cuáles son las principales variaciones del modelo RAM básico? ¿Cuáles aspectos de la realidad aproxima bien este modelo? ¿Cuáles aproxima mal? ¿Cuántos y cuáles son los supuestos falsos en los que se basa este modelo? ¿Qué paradojas produce este modelo de la computación?
2. Muestre que el algoritmo usual para multiplicar matrices tarda un tiempo del orden de n^3.
3. El mejor algoritmo conocido para calcular matrices tarda un tiempo del orden de n^α. ¿Cuánto vale α? ¿Quién o quienes descubrieron ese algoritmo?
4. Muestre que es físicamente imposible tener una computadora con memoria arbitrariamente grande (aunque finita) en donde se pueda tener acceso a cualquiera de sus celdas en menos de un milisegundo.
5. La "Ley de Moore" afirma que la cantidad de transistores que se pueden poner en un chip se duplica cada 18 meses. Muestre que es físicamente imposible que esto pueda ocurrir por siempre.

V Máquinas de Turing.

1. ¿Qué es un a Máquina de Turing? ¿Cómo se define? ¿Cómo se llama la teoría que emerge del estudio de este modelo? ¿Cuáles son sus principales características? ¿para que sirve? ¿Cuánta memoria tiene? ¿Qué operaciones básicas sabe realizar una MT? ¿Cuáles aspectos de la realidad aproxima bien este modelo? ¿Cuáles aproxima mal? ¿Cuántos y Cuáles son los supuestos falsos en los que se basa este modelo?
2. ¿Qué es una Máquina de Turing No Determinista? Si P =polinomial, ¿que es NP? ¿Es cierto que P = NP? ¿Es cierto que $\text{P} \cap \text{NP} = \varnothing$?