Teoría Matemática de la Computación
Primer Problemario

Prof. Miguel A. Pizaña

27 de octubre de 2010

I Tareas

1. Dudar de todo, al menos una vez en la vida.
2. ¿Qué emociones le produce la iresolubilidad de la mayoría de los problemas, la irresolubilidad del problema del Paro?
3. ¿Quién es Noam Chomsky?
4. Averiguar cuál es el máximo nivel de anidación que permite su compilador favorito.
5. Muy importante: ¿Qué dice el artículo 39 de la Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos?
6. ¿Qué es el número de Chaitin? ¿Cómo se define? ¿Es un número computable? ¿es definible?
7. Examinar críticamente los algoritmos de compresión sin pérdida que tenga a su disposición. ¿Siempre comprimen? ¿pueden comprimir un mismo archivo una y otra vez?
8. Muestre experimentalmente que para matrices grandes, inicializar una matriz por renglones o por columnas tarda tiempo diferente. Explique las razones de esto.
9. Compare los tres algoritmos vistos en clase para calcular números de Fibonacci (recursivo, iterativo y fórmula cerrada). ¿Qué observaciones tiene de ello?

II Modelos vs Realidad

1. Explique las diferencias y similitudes entre modelo (matemático) y realidad.

2. ¿Cómo hace uno para medir qué tan bien aproxima un modelo matemático a la realidad?
3. La "ley de conservación de la materia y la energía", ¿Es parte de un modelo, o parte de la realidad? ¿Qué tan cierta es esta ley?
4. ¿Qué tan cierto es el teorema de Pitágoras? Explique con detalle. Proporcione una prueba del teorema de Pitágoras.
5. ¿Qué es la precesión (o avance) del perihelio de mercurio? ¿Cómo se explica? ¿que implicaciones tiene esto sobre la validez del teorema de Pitágoras en el mundo real?
6. Muestre que el teorema de Pitágoras y la idea de una longitud mínima (= longitud de Planck) son mutuamente contradictorias. ¿Cuál de ellas es verdadera? Explique.
7. Una afirmación como la del teorema de Pitágoras, ¿puede ser verificada experimentalmente? ¿por qué? Explique en detalle. ¿Qué propiedades deben de cumplir las afirmaciones (en lugar de ser verificables) para que puedan ser consideradas desde el punto de vista científico?
8. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
   (a) La siguiente afirmación es falsa.
   (b) La afirmación anterior es verdadera.
   (c) Las dos afirmaciones anteriores son falsas.
   (d) Las dos primeras afirmaciones son verdaderas.
   (e) Ninguna de las anteriores es verdadera.
9. ¿Es verdadera la afirmación: "Esta afirmación es falsa"?.
10. ¿Cuál es el más pequeño de los números reales positivos?
11. Suponga que lanza usted una moneda un millón de veces y en todas esas ocasiones usted ve a la moneda caer hasta el suelo en un lindo arco parabólico. ¿Eso es garantía de que la siguiente vez que usted lance la moneda, ésta no se va a convertir en un monstruo de espagueti volador? Explique.
12. Suponga que usted juega al *melate* un millón de veces y en todas esas ocasiones usted NO se saca el premio. ¿Eso es garantía de que la siguiente vez que usted juegue *melate* tampoco se va a sacar el premio? Explique.

13. Sean A y B conjuntos. Muestre que en el caso finito, si existe una función inyectiva y NO sobreyectiva $f : A \to B$, entonces $|A| < |B|$.
14. Sean A, B y C conjuntos. Muestre que si $|A| < |B| = |C|$ entonces $|A| < |C|$.
15. Suponga que Σ es cualquier conjunto finito no vacío. Pruebe que: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}| = |\Sigma^*| = |\{programas\}|$.
16. Pruebe que: $|\mathbb{R}| = |(0,1)| = |[0,1]| = |\mathbb{C}| = |\mathbb{R}^n| = |\mathscr{P}(\mathbb{N})| = |\mathscr{P}(\Sigma^*)| = |\{problemas\}|$.
17. Pruebe que $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.
18. Pruebe que la mayoría de los problemas son irresolubles. ¿Esta afirmación es falsable? ¿Que puede hacerse para confrontar esta afirmación con el experimento?
19. Pruebe que el universo no existe. ¿Esta es una afirmación científica o matemática? ¿A que universo se refiere esta afirmación?
20. Pruebe que el problema del paro es irresoluble. ¿Esta afirmación es falsable? ¿Que puede hacerse para confrontar esta afirmación con el experimento?
21. Pruebe que es irresoluble el problema de decidir si un programa dado P, con una entrada dada E:
    (a) Va alguna vez a escribir algo en pantalla.
    (b) Va alguna vez a accesar al disco duro.
    (c) Va a enviar un email.
    (d) Va a formatear el disco duro.
    (e) Es viral (va a hacer copias de sí mismo).
22. Si a los algoritmos considerados en el problema del paro les ponemos la restricción de usar una cantidad máxima de memoria acotada por una constante M... ¿ya se puede resolver el problema? ¿cómo? ¿con cuánta memoria?
23. ¿Qué dice el teorema de Banach-Tarski? ¿esta es una afirmación científica o matemática? ¿a que tipo de bolas (= esferas rellenas) se refiere este teorema?
24. ¿Cuantos números reales hay? ¿Cuántos de ellos pueden ser representados en una computadora real (de memoria finita)? Si las

computadoras pudieran tener memoria ilimitada (=la memoria es infinita, pero sólo podemos usar una cantidad finita de casillas en cada momento) ¿Cuántos números reales podríamos representar en la computadora? ¿Cómo es que trabajamos con las computadoras con los números de punto flotante como si todo esto no representara un problema?

25. Pruebe que "Sumar uno" es una operación que no se puede hacer con memoria acotada. ¿Cómo es que usamos las computadoras para sumar uno?

26. ¿Qué dice el principio del buen orden?

27. Sea H el conjunto de todos los números reales que pueden ser definidos por un humano (con un número finito de símbolos, por ejemplo). Claramente $|H| = \aleph_0$, pero $|\mathbb{R}| = c$, de modo que $\mathbb{R} - H$ no es vacío. Sea ahora x el más pequeño (de acuerdo a algún buen orden de los reales) de entre los números reales en $\mathbb{R} - H$. Acabo de definir un número real fuera de H... entonces, ¿no soy humano?

28. Pruebe que si A es un algoritmo de compresión sin pérdida que además satisface $|A(F)| \leq |F|$ para todo archivo F, entonces, necesariamente $|A(F)| = |F|$ para todo archivo F. ¿Esta afirmación es falsable? ¿Que puede hacerse para confrontar esta afirmación con el experimento?

III Máquinas de Acceso Aleatorio.

1. ¿Qué es un a Máquina de Acceso Aleatorio? ¿Cómo se define? ¿Como se llama la teoría que emerge del estudio de este modelo? ¿Cuáles son sus principales características? ¿para que sirve? ¿Cuánto tiempo tarda en realizar un operación elemental? ¿Qué almacena en cada celda de memoria? ¿cuántas celdas tiene? ¿Cuáles son las principales variaciones del modelo RAM básico? ¿Cuáles aspectos de la realidad aproxima bien este modelo? ¿Cuáles aproxima mal? ¿Cuántos y cuáles son los supuestos falsos en los que se basa este modelo? ¿Qué paradojas produce este modelo de la computación?

2. De un algoritmo para el problema de la satisfacibilidad (SAT) que funcione en tiempo polinomial en el modelo RAM de costo unitario. ¿Por qué este algoritmo no vale un millón de dólares?

3. De entre los tres métodos considerados en clase (recursivo, iterativo y el de la fórmula cerrada) ¿Cuál es el mejor método para calcular número de Fibonacci?
4. Calcule el tiempo de ejecución de MergeSort.
5. Explique el algoritmo de multiplicación de enteros de Karatsuba. Calcule el tiempo de ejecución.
6. Averigüe cuál es el mejor algoritmo conocido para multiplicar enteros. ¿Qué técnicas se usan? ¿Quiénes son los autores de ese algoritmo? ¿Cuál es el tiempo de ejecución?
7. Muestre que el algoritmo usual para multiplicar matrices tarda un tiempo del orden de n^3.
8. El mejor algoritmo conocido para calcular matrices tarda un tiempo del orden de n^α. ¿Cuánto vale α? ¿Quién o quienes descubrieron ese algoritmo?
9. Muestre que es físicamente imposible tener una computadora con memoria arbitrariamente grande (aunque finita) en donde se pueda tener acceso a cualquiera de sus celdas en menos de un milisegundo. ¿Qué es el radio de Schwarzschild?
10. La "Ley de Moore" afirma que la cantidad de transistores que se pueden poner en un chip se duplica cada 18 meses. Muestre que es físicamente imposible que esto pueda ocurrir por siempre.
11. ¿Por qué la tesis de Church-Turing no es "teorema" ni "conjetura"? ¿Puede ser demostrada la tesis de Church-turing?