

# Teoría Matemática de la Computación

## Primer Problemario

Prof. Miguel A. Pizaña  
18 de febrero de 2011

### I Modelos vs Realidad

1. Dudar de todo, al menos una vez en la vida.
2. ¿los espejos invierten izquierda-y-derecha o adelante-y-atrás o arriba-y-abajo?
3. ¿Qué es una afirmación falsable? De dos ejemplos de afirmaciones falsables (una verdadera y una falsa) y dos ejemplos de afirmaciones no falsables (una verdadera y otra falsa). ¿Quién introduce la noción de falsabilidad en la filosofía de la ciencia? ¿Por qué las afirmaciones no falsables son indeseables en las ciencias?
4. Describa los principales rasgos de la teoría del flogisto. ¿Es una teoría científica? ¿fue una teoría científica? ¿es una teoría buena? ¿fue una teoría buena?
5. Describa los principales rasgos de la mecánica Arsitotélica. ¿Es una teoría científica? ¿fue una teoría científica? ¿es una teoría buena? ¿fue una teoría buena?
6. Describa los principales rasgos de la mecánica Newtoniana. ¿Es una teoría científica? ¿fue una teoría científica? ¿es una teoría buena? ¿fue una teoría buena?
7. Describa los principales rasgos de la mecánica Einsteniana. ¿Es una teoría científica? ¿fue una teoría científica? ¿es una teoría buena? ¿fue una teoría buena?
8. ¿En qué consistieron las revoluciones Darwiniana y Copernicana?
9. Pruebe que el problema del paro es irresoluble. ¿Esta afirmación es falsable? ¿Que puede hacerse para confrontar esta afirmación con el experimento? ¿cuáles son los supuestos involucrados en la prueba de la irresolubilidad del problema del paro?

10. ¿Por qué los supuestos involucrados en el teorema de la irresolubilidad del paro implican que disponemos de memoria ilimitada?
11. ¿Qué emociones le produce la irresolubilidad del problema del paro?
12. ¿En qué consiste el teorema de la no clonación de la física cuántica?
13. Si a los algoritmos considerados en el problema del paro les ponemos la restricción de usar una cantidad máxima de memoria acotada por una constante  $M$ ... ¿ya se puede resolver el problema? ¿cómo? ¿con cuánta memoria?
14. Proporcione un programa que no pare y no repita fotogramas (i.e. estados totales internos de ejecución).
15. Pruebe que es irresoluble el problema de decidir si un programa dado  $P$ , con una entrada dada  $E$ :
  - (a) Va alguna vez a escribir algo en pantalla.
  - (b) Va alguna vez a acceder al disco duro.
  - (c) Va a enviar un email.
  - (d) Va a formatear el disco duro.
  - (e) Es viral (va a hacer copias de sí mismo).
16. Pruebe que si  $A$  es un algoritmo de compresión sin pérdida que además satisface  $|A(F)| \leq |F|$  para todo archivo  $F$ , entonces, necesariamente  $|A(F)| = |F|$  para todo archivo  $F$ . ¿Esta afirmación es falsable? ¿Que puede hacerse para confrontar esta afirmación con el experimento?
17. Examinar críticamente los algoritmos de compresión sin pérdida que tenga a su disposición. ¿Siempre comprimen? ¿pueden comprimir un mismo archivo una y otra vez?
18. Explique las diferencias y similitudes entre modelo (matemático) y realidad.
19. ¿Cómo hace uno para medir qué tan bien aproxima un modelo matemático a la realidad?
20. La “ley de conservación de la materia y la energía”, ¿Es parte de un modelo, o parte de la realidad? ¿Qué tan cierta es esta ley? ¿Es un dogma de la física? Argumente.

21. ¿Es un dogma la idea de que las matemáticas están libres de contradicciones? Argumente.
22. ¿Qué tan cierto es el teorema de Pitágoras? Explique con detalle.
23. Muestre que el teorema de Pitágoras y la idea de una longitud mínima (= longitud de Planck) son mutuamente contradictorias. ¿Cuál de ellas es verdadera? Explique.
24. ¿Es cierto que a escalas astronómicas el teorema de Pitágoras deja de ser aplicable?
25. Una afirmación como la del teorema de Pitágoras, ¿puede ser verificada experimentalmente? ¿por qué? Explique en detalle. ¿Qué propiedad(es) deben de cumplir las afirmaciones (en lugar de ser verificables) para que puedan ser consideradas desde el punto de vista científico?
26. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
  - (a) La siguiente afirmación es falsa.
  - (b) La afirmación anterior es verdadera.
  - (c) Las dos afirmaciones anteriores son falsas.
  - (d) Las dos primeras afirmaciones son verdaderas.
  - (e) Ninguna de las anteriores es verdadera.
27. ¿Es verdadera la afirmación: “Esta afirmación es falsa”?
28. ¿Cuál es el más pequeño de los números reales positivos?
29. Suponga que lanza usted una moneda un millón de veces y en todas esas ocasiones usted ve a la moneda caer hasta el suelo en un lindo arco parabólico. ¿Eso es garantía de que la siguiente vez que usted lance la moneda, ésta no se va a convertir en un monstruo de espagueti volador? Explique.
30. Suponga que usted juega al *melate* un millón de veces y en todas esas ocasiones usted NO se saca el premio. ¿Eso es garantía de que la siguiente vez que usted juegue *melate* tampoco se va a sacar el premio? Explique.
31. Averiguar cuál es el máximo nivel de anidación que permite su compilador favorito.
32. Pruebe que el universo no existe. ¿Esta es una afirmación científica o matemática? ¿A que universo se refiere esta afirmación?

33. ¿Qué dice el teorema de Banach-Tarski? ¿esta es una afirmación científica o matemática? ¿a que tipo de bolas (= esferas rellenas) se refiere este teorema?
34. ¿Cuántos números reales hay? ¿Cuántos de ellos pueden ser representados en una computadora real (de memoria finita)? Si las computadoras pudieran tener memoria ilimitada (=la memoria es infinita, pero sólo podemos usar una cantidad finita de casillas en cada momento) ¿Cuántos números reales podríamos representar en la computadora? ¿Cómo es que trabajamos con las computadoras con los números de punto flotante como si todo esto no representara un problema?
35. Pruebe que “sumar uno” es una operación que no se puede hacer con memoria acotada. ¿Cómo es que usamos las computadoras para sumar uno?
36. ¿Qué cosa es el problema de P vs NP?

## II Máquinas de Acceso Aleatorio.

1. ¿Qué es un a Máquina de Acceso Aleatorio? ¿Cómo se define? ¿Como se llama la teoría que emerge del estudio de este modelo? ¿Cuáles son sus principales características? ¿para que sirve? ¿Cuánto tiempo tarda en realizar un operación elemental? ¿Qué almacena en cada celda de memoria? ¿cuántas celdas tiene? ¿Cuáles son las principales variaciones del modelo RAM básico? ¿Cuáles aspectos de la realidad aproxima bien este modelo? ¿Cuáles aproxima mal? ¿Cuántos y cuáles son los supuestos falsos en los que se basa este modelo? ¿Qué paradojas produce este modelo de la computación? ¿Por qué usamos un modelo basado en supuestos falsos?
2. De un algoritmo para el problema de la satisfacibilidad (SAT) que funcione en tiempo polinomial en el modelo RAM de costo unitario. ¿Por qué este algoritmo no vale un millón de dólares?
3. Compare los tres algoritmos vistos en clase para calcular números de Fibonacci (recursivo, iterativo y fórmula cerrada). Haga un análisis estadístico del comportamiento de los tres algoritmos para números de muy distintos tamaños. ¿Qué observaciones tiene de ello? ¿Cuál es el mejor método para calcular número de Fibonacci?

4. Compare los tres algoritmos vistos en clase para ordenar arreglos de números (burbuja, burbuja modificada y mergesort). Haga un análisis estadístico del comportamiento de los tres algoritmos para arreglos de muy distintos tamaños. ¿Qué observaciones tiene de ello? ¿Cuál es el mejor método para ordenar arreglos números?
5. Muestre experimentalmente que para matrices grandes, inicializar una matriz por renglones o por columnas tarda tiempo diferente. Explique las razones de esto.
6. Explique el principio de la localidad. ¿cuándo se cumple?
7. ¿Qué es el pipeline? ¿para qué sirve? ¿funciona bien siempre?
8. ¿Qué es la caché? ¿cómo funciona? ¿en qué es diferente a la memoria RAM? ¿funciona bien siempre? ¿qué es una página? ¿un marco? ¿una fallo de página? ¿una página sucia? ¿Qué es la hiperpaginación?
9. Muestre que es físicamente imposible tener una computadora con memoria arbitrariamente grande (aunque finita) en donde se pueda tener acceso a cualquiera de sus celdas en menos de un nanosegundo.
10. ¿Qué es el radio de Schwarzschild?
11. ¿Cuál es la cantidad de memoria máxima absoluta que las leyes de la física conocidas me permiten acceder en un milisegundo? ¿Qué formula usó para ello?
12. La “Ley de Moore” afirma que la cantidad de transistores que se pueden poner en un chip se duplica cada 18 meses. Muestre que es físicamente imposible que esto pueda ocurrir por siempre. ¿Qué tamaño tienen actualmente los transistores más pequeños que se pueden fabricar? ¿cuánto tiempo hace falta para que (de continuar siendo cierta la ley de Moore) los transistores alcancen tamaño atómico? ¿y para que alcancen la longitud de Planck? ¿Para cuándo predice usted que la ley de Moore dejará de ser válida?
13. ¿Qué es un taquión? ¿una partícula virtual? ¿el enredamiento cuántico (quantum entanglement)? ¿la teleportación cuántica? ¿Qué es lo que se transporta en la teleportación cuántica? ¿qué es la información cuántica? ¿la información clásica? ¿cuál es la velocidad máxima límite en el universo?

14. Tome un kilo de tortillas, ¿a qué tamaño hay que comprimirlo para que se colapse en un agujero negro?
15. ¿Qué es la longitud de Planck? ¿cuánto vale eso en metros?