Teoría Matemática de la Computación
Primer Problemario

Prof. Miguel A. Pizaña

24 de septiembre de 2013

1. Dudar de todo, al menos una vez en la vida.
2. ¿Qué emociones le produce la irresolubilidad del problema del paro y el teorema de Rice? ¿Qué emociones le produce la inexistencia del universo (de la teoría de conjuntos)? Enuncie el teorema de Rice.
3. ¿Quién es Popper? ¿Qué es la falsabilidad? De un ejemplo de una afirmación falsa pero no falsable, una verdadera pero no falseble, una falsa y falsable y una verdadera y falsable.
4. ¿Qué es la duda sistemática de Descartes? ¿Qué hay que hacer, según Descartes, para alcanzar el verdadero conocimiento?
5. Explique las diferencias y similitudes entre modelo y realidad.
6. ¿Cómo hace uno para medir qué tan bien aproxima un modelo matemático a la realidad?
7. La "ley de conservación de la materia y la energía", ¿Es parte de un modelo, o parte de la realidad? ¿Qué tan cierta es esta ley?
8. ¿Qué tan cierto es el teorema de Pitágoras? Explique con detalle. Proporcione una prueba del teorema de Pitágoras.
9. Muestre que el teorema de Pitágoras y la idea de una longitud mínima (= longitud de Planck) son mutuamente contradictorias. ¿Cuál de ellas es verdadera? Explique.
10. ¿Qué dice el teorema de Banach-Tarski? ¿Que impicaciones tiene esto para el mundo en el que vivimos? ¿Cómo resuelve usted esta paradoja?
11. ¿Qué dice la paradoja de Russell? ¿Cómo resuelve usted esta paradoja?

12. Demuestre que el universo no existe.
13. ¿Qué dice la paradoja de Zenon? Explique el argumento que usa Zenon. ¿Cómo resuelve usted esta paradoja?
14. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
    a) La siguiente afirmación es falsa.
    b) La afirmación anterior es verdadera.
    c) Las dos afirmaciones anteriores son falsas.
    d) Las dos primeras afirmaciones son verdaderas.
    e) Ninguna de las anteriores es verdadera.
15. ¿Es verdadera la afirmación: "Esta afirmación es falsa"?.
16. ¿Qué es "inducción" y qué es "inducción matemática" ? ¿En qué se parecen y en qué son diferentes ambos conceptos? ¿Cuál es más frecuentemente-usada/útil/mejor?
17. Suponga que lanza usted una moneda un millón de veces y en todas esas ocasiones usted ve a la moneda caer hasta el suelo en un lindo arco parabólico. ¿Eso es garantía de que la siguiente vez que usted lance la moneda, ésta no se va a convertir en un monstruo de espagueti volador? Explique.
18. Suponga que usted juega al *melate* un millón de veces y en todas esas ocasiones usted NO se saca el premio. ¿Eso es garantía de que la siguiente vez que usted juegue *melate* tampoco se va a sacar el premio? Explique.
19. ¿Cómo explica al diferencia en sus respuestas a los dos problemas anteriores, siendo que la evidencia experimental es idéntica?
20. Pruebe que el problema del paro es irresoluble. Pruebe también que es irresoluble el problema de decidir si un programa dado P, con una entrada dada E:
    a) Va alguna vez a escribir algo en pantalla.
    b) Va alguna vez a accesar al disco duro.

c) Va a enviar un email.

d) Va a formatear el disco duro.

e) Es viral (va a hacer copias de sí mismo).

21. Pruebe que si A es un algoritmo de compresión sin pérdida que además satisface $|A(F)| \leq |F|$ para todo archivo F, entonces, necesariamente $|A(F)| = |F|$ para todo archivo F.

22. ¿Cuáles son los 3 principales modelos matemáticos que se usan para aproximar las nociones de "algoritmo" y "computadora"?

23. ¿Qué es una Máquina de Acceso Aleatorio Uniforme (uRAM)? ¿Qué es una Máquina de Acceso Aleatorio logarítmico (lRAM)? ¿Cómo se definen? ¿para que sirven? ¿Cuánto tiempo tardan en realizar un operación elemental? ¿Qué almacenan en cada celda de memoria? ¿cuántas celdas tienen? ¿Cuáles son las principales variaciones del modelo RAM básico? ¿Cuáles aspectos de la realidad aproximan bien estos modelos? ¿Cuáles aproxima mal? ¿Cuántos y cuáles son los supuestos falsos en los que se basan estos modelos?

24. Muestre que el algoritmo usual para multiplicar matrices tarda un tiempo del orden de n^3 en el modelo uRAM.

25. Muestre que el algoritmo usual para inicializar matrices tarda un tiempo del orden de n^2 en el modelo uRAM.

26. Muestre que el algoritmo usual para calcular el promedio de un arreglo tarda un tiempo del orden de n en el modelo uRAM.

27. Muestre que el algoritmo MergeSort tarda un tiempo del orden de $nlog(n)$ en el modelo uRAM.

28. ¿Qué consideraciones tenemos que tener a la hora de medir tiempos de ejecución de algoritmos? ¿Cuáles son las posibles fuentes de error o imprecisión al hacer mediciones?

29. El modelo uRAM predice un tiempo lineal (proporcional al tamaño del arreglo) para el algoritmo que calcula promedios de arreglos. ¿Qué tan bien se lleva esta predicción con el experimeto? Explique.

30. El modelo uRAM predice que el tiempo para inicializar un arreglo por renglones es idéntico al tiempo necesarios para inicializarlo por columnas. ¿Qué se observa en el experimento? ¿Cómo explica la discrepancia?

31. ¿Qué son la jerarquía de memoria, la memoria caché y el principio de localidad? ¿De qué manera afectan estas nociones a las predicciones del modelo uRAM y a los correspondientes experimentos de medición de tiempos de ejecución?

32. ¿Qué tan distintas pueden ser las predicciones del modelo uRAM y el model lRAM? Muestre un ejemplo en donde las predicciones de un modelo y otro sean muy diferentes.

33. ¿En qué condiciones es mejor usar el modelo uRAM y en qué condiciones es mejor usar el modelo lRAM?

34. Defina: "$f(n) = O(g(n))$", "$f(n) = \Omega(g(n))$" y "$f(n) = \Theta(g(n))$". ¿Qué propiedades tienen estas relaciones? Si $f(n) = O(g(n))$ y $h(n) = O(g(n))$, ¿eso implica que $f(n) = h(n)$?

35. Para cada par de las siguientes funciones, diga si se cumplen o no cada una de las tres relaciones del problema anterior: $f_1(n) = 1$, $f_2(n) = 27$, $f_3(n) = 2n$, $f_4(n) = 3n$, $f_5(n) = 4n + 5$, $f_6(n) = n^2$, $f_7(n) = 3n^2$, $f_8(n) = n^2 - 3n + 2$, $f_9(n) = n^3$, $f_{10}(n) = \cos(n)$, $f_{11}(n) = \operatorname{sen}(n)$, $f_{12}(n) = n^3\cos^2(n) + n\operatorname{sen}^2(n)$.

36. La función $f_{12}(n)$ del problema anterior, presenta una oscilación muy marcada. ¿Pueden presentarse oscilaciones semejantes a esta en algoritmos reales para problemas reales?