Teoría Matemática de la Computación
Segundo Problemario

Prof. Miguel A. Pizaña

13 de julio de 2016

I Máquinas de Turing.

1. ¿Qué es un a Máquina de Turing? ¿Cómo se define? ¿Cómo se llaman las teorías que emergen del estudio de este modelo? ¿Cuáles son sus principales características? ¿para que sirve? ¿Cuánta memoria tiene? ¿Qué operaciones básicas sabe realizar una MT? ¿Cuáles aspectos de la realidad aproxima bien este modelo? ¿Cuáles aproxima mal? ¿Cuántos y cuáles son los supuestos falsos en los que se basa este modelo?

2. Leer *On Computable Numbers, with an Applicatrion to the Entscheidungsproblem* de Alan Turing. Luego responda: ¿Cómo le llama Turing a sus máquinas? ¿Qué diferencias hay entre su definición y la definición vista en clase? ¿Qué es para Turing un número computable? ¿son computables $\pi, \sqrt{2}, \frac{1}{3}, \tan(23)$? ¿Cuál es la razón por la que la máquina usa una cinta para hacer anotaciones? ¿Por qué usa un número finito de símbolos? ¿Qué es el Entscheidungsproblem? ¿Qué demuestra Turing al respecto?

3. ¿Qué dice la tesis de Church-Turing? ¿Cree usted en la tesis de Church-Turing? ¿Puede esta tesis ser demostrada matemáticamente? Explique.

4. ¿Qué tan veloz es una Máquina de Turing? ¿cómo se puede comparar su velocidad con la velocidad de la computadora que tiene en su casa?

5. ¿Hay algo que la computadora de tu casa puede hacer pero que no puede hacer una Máquina de Turing? ¿Hay algo que la máquina de Turing puede hacer, pero la computadora de tu casa no?

6. En cada inciso proporcione una Máquina de Turing que:

(a) Inserte un símbolo al inicio de la cinta.
(b) Dado un número binario no negativo n, calcule $n+1$.
(c) Dado un número binario positivo n, calcule $n-1$.
(d) Dado un par de números binarios separados por un "#", calcule la suma.

7. Para cada uno de los siguientes lenguajes proporcione una máquina de Turing (que siempre para) que los reconozca:
   (a) $\{n : n \text{ es par }\}$
   (b) $\{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$.
   (c) { paréntesis balanceados }.
   (d) { expresiones aritméticas con paréntesis }
   (e) { palíndromos de 0's y 1's }.
   (f) $L_m = \{0^{n+m} 1^n : n \geq 0\} \cup \{0^n 1^{n+m} : n \geq 0\}$.
   (g) $\{w \in \{0,1\}^* : w$ tiene igual número de 0's que de 1's $\}$.
8. Demuestre que todo lo que un AFD puede hacer, también lo puede hacer alguna máquina de Turing.
9. ¿Qué significa que un problema sea indecidible?

II NP-Completez

1. ¿Qué es una Máquina de Turing No Determinista? Si P =polinomial, ¿que es NP? ¿Es cierto que P = NP? ¿Es cierto que $P \cap NP = \varnothing$?
2. ¿Qué es una reducción polinomial (de Karp)?
3. Muestre que si hay una reducción polinomial de Π_1 a Π_2 y una reducción polinomial de Π_2 a Π_3, entonces también hay una reducción polinomial de Π_1 a Π_3.
4. Enuncie el problema SAT.
5. ¿Qué dice el teorema de Cook?
6. Defina: P, NP, NP-Completo.
7. Enuncie explícitamente 5 problemas NP-completos.
8. Si se prueba que SAT no es polinomial, ¿qué consecuencias tiene eso para el problema $P \stackrel{?}{=} NP$?.

9. Si se prueba que SAT es polinomial, que consecuencias tiene eso para el problema $P \stackrel{?}{=} NP$.
10. Si un día construimos una máquina real, que sea capaz de resolver SAT en tiempo polinomial, ¿eso resuelve el problema $P \stackrel{?}{=} NP$?
11. Si un día se prueba que $P = NP$, ¿qué consecuencias tendría esto en la práctica?
12. Si un día se prueba que $P \neq NP$, ¿qué consecuencias tendría esto en la práctica?
13. ¿Es exactamente lo mismo "polinomial" y "eficiente"? Explique en detalle.
14. ¿Es exactamente lo mismo "exponencial" e "ineficiente"? Explique en detalle.

III Autómatas Finitos Deterministas.

1. ¿Qué es un Autómata Finito Determinista? ¿Cómo se define? ¿Cuáles son sus principales características? ¿Para qué sirve? ¿Cómo se define el *lenguaje reconocido* por un AFD? ¿Cuáles aspectos de la realidad aproxima bien este modelo? ¿Cuáles aproxima mal?
2. Para cada uno de los siguientes lenguajes, proporcione un AFD que los reconozca (suponga que $\Sigma = \{0, 1\}$).
   (a) Cadenas que terminen en 00.
   (b) Cadenas que contengan tres o más ceros consecutivos.
   (c) Cadenas que contengan tres pero no más de tres ceros consecutivos.
   (d) Cadenas que contengan la subcadena 000 exactamente una vez.
   (e) Cadenas que representen números enteros divisibles entre 3.
   (f) Cadenas que representen números enteros divisibles entre 7.
   (g) Cadenas que tengan un 0 en la décima posición contando desde la izquierda.
   (h) Lo mismo que el anterior, pero contando desde la derecha.
   (i) Cadenas que contengan a 0101 como subcadena.
   (j) Cadenas que NO contengan a 0101 como subcadena.

(k) Cadenas tal que en cada subcadena de longitud 5 haya al menos 2 ceros.

(l) Cadenas tal que en cada prefijo el valor absoluto de la diferencia entre el número de 1's y el número de 0's sea menor o igual a 5.

(m) Cadenas como en el inciso anterior en donde además el número total de ceros es igual al número total de unos.

3. Haga un lista completa de todos los AFD con alfabeto binario que tengan uno o dos estados (son 66, pero muchos de ellos son equivalentes). ¿Qué lenguaje reconoce cada uno de ellos?

4. Demuestre que dado cualquier lenguaje **finito** L existe un AFD que lo reconoce.

5. ¿Existe un AFD que dada cualquier matriz de $n \times n$ ($n < 50$) de números de punto flotante de doble precisión (todo ello codificado como una cadena binaria) decida si es invertible? Explique.

6. Un lenguaje L es *cofinito* si su complemento $\bar{L} = \Sigma^* - L$ es finito. Demuestre que todo lenguaje cofinito es regular.

7. Enuncie el Lema Alfa

8. Demuestre el Lema Alfa.

9. Determinar si los siguientes lenguajes son regulares o no (Encuentre un AFD que lo reconozca o use el lema alfa).

   (a) $\{\omega \in \{a, b, c, d\}^* : \omega$ contiene a la palabra $abcd$ como subcadena $\}$

   (b) $\{\omega \in \{a, b, c, d\}^* : \omega$ **NO** contiene a la palabra $abcd$ como subcadena $\}$

   (c) $L_m = \{0^{n+m}1^n : n \geq 0\} \cup \{0^n 1^{n+m} : n \geq 0\}$

   (d) $\bigcup_{m=0}^{\infty} L_m$

   (Aquí L_m es como en el problema anterior)

   (e) $\{0^{n^2} : n \geq 1\}$

   (f) $\{0^p : p$ es primo $\}$.

   (g) {Sonetos en español}

   (suponga que el conjunto de cadenas del "español" está bien definido)

   (h) {Paréntesis balanceados} =

   $= \{(), (()), ()(), ((())), (())(), ()(()), ()()(), (((()))), ((()())), \ldots, ((()))(), \ldots\}$

(i) Cadenas de paréntesis balanceados que no tengan más de un trillón de paréntesis.

(j) $\{$Expresiones aritméticas$\} =$
$= \{\omega \in \{+, -, *, /, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}^* :$ etcétera $\}$
(considerar a "$-$" y "$+$" únicamente como operadores binarios).

(k) $\{$Expresiones aritméticas con paréntesis$\} =$
$= \{\omega \in \{+, -, *, /, (,), 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}^* :$ etcétera $\}$

(l) $\{$Declaraciones de variables en C$\}$

(m) $\{$Programas en C$\}$

10. Pruebe que si L es un lenguaje regular, también es regular su complemento $\overline{L} := \Sigma^* \setminus L$.

11. Pruebe que si los lenguajes L_1 y L_2 son regulares, entonces también son regulares $L_1 \cap L_2$ y $L_1 \cup L_2$.