

Teoría Matemática de la Computación

Primer Problemario

Prof. Miguel A. Pizaña
16 de febrero de 2017

1. Dudar de todo, al menos una vez en la vida.
2. ¿Quién es Karl Popper? ¿Qué es la falsabilidad? De un ejemplo de una afirmación falsa pero no falsable, una verdadera pero no falsable, una falsa y falsable y una verdadera y falsable.
3. ¿Qué es la duda sistemática de Descartes? ¿Qué hay que hacer, según Descartes, para alcanzar el verdadero conocimiento sólido? ¿Qué significa “pienso luego existo”? ¿Qué es la “hipótesis del demonio malvado”? ¿Qué es “la mente en la cubeta”? ¿Qué tiene que ver todo esto con *la Matrix*?
4. ¿Qué es la *Navaja de Ockham*?
5. Explique qué es un modelo y en qué es diferente de la realidad. En este contexto, explique el proceso de abstracción, deducción e interpretación.
6. ¿Cómo hace uno para medir qué tan bien aproxima un modelo matemático a la realidad? ¿Un modelo que no predice **exactamente** a la realidad debe ser descartado?
7. ¿Qué tan cierto es el teorema: ' $1+1=2$ '? Explique en detalle. Señale dos situaciones de la vida real en las que uno esperaría que el teorema fuera aplicable, pero de hecho no lo es. ¿Esto afecta la veracidad del teorema? ¿Cómo sabe uno cuándo puede uno aplicar el teorema y cuándo no?
8. ¿Qué tan cierto es el teorema de Pitágoras? Explique con detalle. Señale dos situaciones de la vida real en las que uno esperaría que el teorema fuera aplicable, pero de hecho no lo es. ¿Esto afecta la veracidad

del teorema? ¿Cómo sabe uno cuándo puede uno aplicar el teorema y cuándo no?

9. ¿Qué es un superconductor? ¿Qué es el hidrógeno metálico? ¿Existe? ¿Cómo se fabrica? ¿Es estable a temperatura y presiones *normales*? ¿Dónde se cree que hay hidrógeno metálico?
10. ¿Cuáles son las ideas centrales de la Teoría de la Relatividad Especial? ¿Por qué los objetos con masa no pueden viajar más rápido que la velocidad de la luz?
11. ¿Cuáles son las ideas centrales de la Teoría de la Relatividad General?
12. ¿Qué es la longitud de Planck? ¿Cuánto mide en metros?
13. ¿Qué dice el principio holográfico? ¿Qué tiene que ver con la tridimensionalidad del universo?
14. ¿Qué es la teoría de cuerdas? ¿cuántas dimensiones espaciales postula la teoría de curdas?
15. ¿Cuántas dimensiones tiene el espacio-tiempo? Explique en detalle.
16. Dentro de un millón de años, una unidad de procesamiento quiere acceder una localidad de memoria en menos de un nanosegundo. ¿Cuál es la máxima distancia del procesador a la que puede estar físicamente ubicada tal localidad de memoria? (Suponiendo que las leyes de la física conocidas no hayan cambiado demasiado).
17. Demuestre que el universo (de la teoría de conjuntos) no existe.
18. ¿Es *posible* que el universo haya existido solamente desde hace 5 minutos? ¿Qué opina Bertrand Russell de ello? ¿Qué opina usted?
19. Suponga que lanza usted una moneda un millón de veces y en todas esas ocasiones usted ve a la moneda caer hasta el suelo en un lindo arco parabólico. ¿Eso es garantía de que la siguiente vez que usted lance la moneda, ésta no se va a convertir en un monstruo de espagueti volador? Explique en detalle.

20. Suponga que usted juega al *melate* un millón de veces y en todas esas ocasiones usted NO se saca el premio. ¿Eso es garantía de que la siguiente vez que usted juegue *melate* tampoco se va a sacar el premio? Explique en detalle.
21. ¿Cómo explica la diferencia en sus respuestas (en caso de que la haya) a los dos problemas anteriores, siendo que la evidencia experimental es idéntica?
22. Pruebe que el problema del paro es indecidible. ¿Cuáles son los supuestos usados durante el proceso de abstracción para llegar a este resultado?
23. ¿Qué es un algoritmo de compresión? ¿Qué es un algoritmo de compresión con pérdida? ¿Qué es un algoritmo de compresión sin pérdida? ¿Cuándo se usan unos y otros?
24. Supongamos que A denota al conjunto de todos los archivos. Defina un algoritmo de compresión *chido* como una función que transforma archivos en archivos de tal manera que:
 - a) $f : A \rightarrow A$ (es función)
 - b) f es inyectiva (sin pérdida)
 - c) $|f(a)| \leq |a|$ para todo archivo $a \in A$ y
 - d) Existe $a_0 \in A$ tal que $|f(a_0)| < |a_0|$.

Demuestre que los algoritmos de compresión chidos no existen. ¿Cómo reconcilia usted este resultado con el hecho de que los algoritmos de compresión de hecho se usan todos los días en las computadoras?

25. ¿Un espejo invierte izquierda-derecha, arriba-abajo o adelante-atrás? Explique. ¿Por qué la mayoría de la gente tiene la idea equivocada al respecto?
26. ¿Cuáles son los 3 principales modelos matemáticos que se usan para aproximar las nociones de “algoritmo” y “computadora”?
27. ¿Un 'int' es un entero? ¿El siguiente código para o se encicla? Explique en detalle.

```

int x=1;
while(x>0){
    x++;
}

```

28. ¿Qué es una Máquina de Acceso Aleatorio Uniforme (uRAM)? ¿Qué es una Máquina de Acceso Aleatorio logarítmico (IRAM)? ¿Cómo se definen? ¿para que sirven? ¿Cuánto tiempo tardan en realizar un operación elemental? ¿Qué almacenan en cada celda de memoria? ¿cuántas celdas tienen? ¿Cuáles son las principales variaciones del modelo RAM básico? ¿Cuáles aspectos de la realidad aproximan bien estos modelos? ¿Cuáles aproxima mal? ¿Cuántos y cuáles son los supuestos falsos en los que se basan estos modelos?
29. Muestre que el algoritmo usual para multiplicar matrices tarda un tiempo del orden de n^3 en el modelo uRAM.
30. Muestre que el algoritmo usual para inicializar matrices tarda un tiempo del orden de n^2 en el modelo uRAM.
31. Muestre que el algoritmo usual para calcular el promedio de un arreglo tarda un tiempo del orden de n en el modelo uRAM.
32. Muestre que el algoritmo MergeSort tarda un tiempo del orden de $n \log(n)$ en el modelo uRAM.
33. Muestre que el algoritmo Burbuja tarda un tiempo del orden de n^2 en el modelo uRAM.
34. Si desea ordenar un arreglo de mil millones de enteros, cuanto tiempo esperaría tardarse usando: (1) Burbuja y (2) MergeSort. Expresé sus tiempos en la unidad adecuada (milisegundos, segundos, meses, años, etc.).
35. El modelo uRAM predice un tiempo lineal (proporcional al tamaño del arreglo) para el algoritmo que calcula promedios de arreglos. ¿Qué tan bien se lleva esta predicción con el experimento? Explique.

36. El modelo uRAM predice que el tiempo para inicializar un arreglo por renglones es idéntico al tiempo necesarios para inicializarlo por columnas. ¿Qué se observa en el experimento? ¿Cómo explica la discrepancia?
37. ¿Qué dice el principio de localidad? ¿Qué son la jerarquía de memoria, la memoria caché, una página, un marco, el principio de localidad y la hiperpaginación? ¿De qué manera afectan estas nociones a las predicciones del modelo uRAM y a los correspondientes experimentos de medición de tiempos de ejecución?
38. ¿Cuántos bits usa su lenguaje/compilador favorito para almacenar los tipos de datos: char, int, long int y long long int?
39. ¿Qué tan distintas pueden ser las predicciones del modelo uRAM y el modelo IRAM? Muestre un ejemplo en donde las predicciones de un modelo y otro sean muy diferentes.
40. ¿En qué condiciones es mejor usar el modelo uRAM y en qué condiciones es mejor usar el modelo IRAM? ¿Cuándo ambos modelos dan predicciones asintóticamente idénticas?
41. ¿Qué es un a Máquina de Turing? ¿Cómo se define? ¿Cómo se llaman las teorías que emergen del estudio de este modelo? ¿Cuáles son sus principales características? ¿para que sirve? ¿Cuánta memoria tiene? ¿Qué operaciones básicas sabe realizar una MT? ¿Cuáles aspectos de la realidad aproxima bien este modelo? ¿Cuáles aproxima mal? ¿Cuántos y cuáles son los supuestos falsos en los que se basa este modelo?
42. Leer *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem* de Alan Turing. Luego responda: ¿Cómo le llama Turing a sus máquinas? ¿Qué diferencias hay entre su definición y la definición vista en clase? ¿Qué es para Turing un número computable? ¿son computables π , $\sqrt{2}$, $\frac{1}{3}$, $\tan(23)$? ¿Cuál es la razón por la que la máquina usa una cinta para hacer anotaciones? ¿Por qué usa un número finito de símbolos? ¿Qué es el Entscheidungsproblem? ¿Qué demuestra Turing al respecto?
43. En cada inciso proporcione una Máquina de Turing que:
 - a) Inserte un símbolo al inicio de la cinta.

- b) Dado un número binario no negativo n , calcule $n + 1$.
 - c) Dado un número binario positivo n , calcule $n - 1$.
 - d) Dado un par de números binarios separados por un “#”, calcule la suma.
 - e) Dado un par de números binarios separados por un “#”, calcule el producto.
44. ¿Qué dice la tesis de Church-Turing? ¿Cree usted en la tesis de Church-Turing? ¿Puede esta tesis ser demostrada matemáticamente? Explique.
45. ¿Qué tan veloz es una Máquina de Turing? ¿cómo se puede comparar su velocidad con la velocidad de la computadora que tiene en su casa?
46. ¿Hay algo que la computadora de tu casa puede hacer pero que no puede hacer una Máquina de Turing? ¿Hay algo que la máquina de Turing puede hacer, pero la computadora de tu casa no?