

Álgebra y Geometría Analítica

Profesor Miguel Pizaña

Primer Problemario

4/noviembre/2016

El examen contendrá 2 problemas semejantes a los enunciados en los incisos 1.1, ..., 4.10; contendrá 3 problemas semejantes a los problemas 5, 6, ..., 17 y también contendrá un problema del tipo 18, ..., 27.

- Desarrolle las operaciones indicadas a continuación sin usar atajos. Hágalo dos veces cada vez para verificar su resultado. Hágalo cotidianamente para estar “en forma”.
 - $(a + b)^5$
 - $(2x + 3y)^5$
 - $(2x - y)^5$
 - $(x - 3y)^5$
- Considere la recta dada por la ecuación $7x - 6y + 10 = 0$. Encuentre una ecuación de la recta paralela a ella que pase por el punto $(2, -3)$.
- Considere la recta dada por la ecuación $-3x + 8y + 15 = 0$. Encuentre una ecuación de la recta perpendicular a ella que pase por el punto $(1, 1)$.
- Considere los puntos $A = (2, 3)$, $B = (-4, -2)$ y $C = (4, -3)$. Sea ℓ la recta que pasa por A y B . Entonces:
 - Encuentre una ecuación de la recta ℓ .
 - Encuentre una ecuación de ℓ en forma general.
 - Encuentre la ecuación de ℓ en forma normal.
 - Encuentre una ecuación de la recta paralela a ℓ que pasa por C .
 - Encuentre una ecuación de la recta ortogonal a ℓ que pasa por A .
 - Encuentre una ecuación de la recta ortogonal a ℓ que pasa por C .
 - Calcule la distancia de ℓ al origen.
 - Calcule es la distancia de ℓ a C .
 - Calcule la distancia de ℓ a A .
 - Calcula la distancia de A a C .
- Demuestre el teorema de Pitágoras.
- Demuestre que la distancia entre los puntos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) está dada por $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
- Demuestre que una ecuación de la recta que pasa por el origen y cuya pendiente es m está dada por $y = mx$.
- Demuestre que una ecuación de la recta que pasa por el punto (x_0, y_0) y cuya pendiente es m está dada por $y - y_0 = m(x - x_0)$.
- Demuestre que una ecuación de la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) (suponiendo que $x_1 \neq x_2$) está dada por $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.
- Encuentre una ecuación de la recta que pasa por el origen y es vertical.
- Encuentre una ecuación de la recta que pasa por (x_0, y_0) y es vertical.
- Encuentre una ecuación de la recta que pasa por (x_0, y_0) y es horizontal.
- Encuentre una ecuación de la recta que pasa por los puntos (a, b) y (a, c) .
- Considere un vector anclado en el origen de longitud p y que hace un ángulo θ con el eje x . Muestre que una ecuación de la recta que pasa por el extremo del vector y que es ortogonal a él está dado por $x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0$.

15. Demuestre que la forma normal de la ecuación general $ax + by + c = 0$ es:

$$\frac{a}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}x + \frac{b}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}y - \frac{c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

en donde el signo del radical en los tres casos los casos se escoge de manera que $\frac{c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}$ sea positivo.

16. Sea $x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0$ la forma normal de la ecuación de una recta ℓ y sea $P = (x_0, y_0)$ un punto. Demuestre que la distancia del punto P a la recta ℓ está dada por: $d(\ell, P) = |x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta - p|$.
17. Sea $ax + by + c = 0$ una ecuación de una recta ℓ y sea $P = (x_0, y_0)$ un punto. Demuestre que la distancia del punto P a la recta ℓ está dada por:

$$d(\ell, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

18. Describa y explique tres aplicaciones de las parábolas.
19. Describa y explique tres aplicaciones de las elipses.
20. Explique qué es una órbita de transferencia de Hohmann.
21. ¿Qué potencia tienen típicamente las bombas atómicas? ¿Cuáles isótopos se usan y de cuáles elementos químicos para hacer bombas atómicas? ¿qué significa “masa crítica”? ¿Cuáles son las reacciones nucleares que tiene lugar en una bomba atómica? ¿cómo están construidas las bombas atómicas? ¿cómo funcionan? ¿por qué se utiliza una **implosión** generada por explosivos convencionales como detonante? ¿qué significa implosión?
22. ¿Qué potencias tienen típicamente las bombas H? ¿qué isótopos de qué elementos químicos se usan par hacer bombas H? ¿Cuáles son las reacciones nucleares que tienen lugar en una bomba H? ¿Cómo están construidas las bombas H? ¿qué utiliza una bomba H como detonante? ¿qué tiene que ver todo esto con las elipses?
23. ¿Qué es un misil balístico intercontinental? ¿que tipo de trayectoria sigue un misil balístico intercontinental?
24. Rusia acaba de anunciar su nuevo misil SR 28 Sarmat (apodado SATAN 2 por la OTAN) que es capaz de destruir por completo una región del tamaño de Texas. ¿Qué tipo de misil es el SATAN 2? ¿Cuántas cabezas nucleares tiene? ¿Cuál es su potencia total en megatonnes? ¿Qué alcance tiene? ¿que características inteligentes tiene incorporadas el misil?
25. ¿Cuál es la fórmula de Einstein que indica la equivalencia entre masa y energía? Suponga que en una bomba atómica de 64Kg de uranio 235 solamente el 1.7% del uranio logra fisionarse y que en una fisión nuclear de uranio sólo el 0.066% de la materia que se fisiona se convierte en energía. Usando los datos anteriores calcule qué potencia tiene esta bomba en kilotonnes. Nota: estos datos corresponden la bomba atómica lanzada por Estados Unidos en Hiroshima.
26. ¿Cuál es el proceso por medio del cuál el sol produce luz y calor? ¿Cuántas toneladas de materia se convierten en energía en el sol cada segundo?
27. ¿Qué es el espectro electromagnético? ¿que tipos de ondas están comprendidos dentro del espectro electromagnético? ¿en qué son diferentes la luz visible de las ondas de radio y de los rayos X o gamma? ¿las ondas sonoras son parte del espectro electromagnético?
28. ¿Qué es la longitud de Planck? ¿cuánto mide en metros?
29. ¿Cuál es la fórmula para el radio de Schwarzschild? ¿qué significado tiene? ¿Cuál es la masa del sol? ¿Cuál es el radio al que tendría que comprimirse el sol para producir un agujero negro? ¿cuál es el radio al que tendría que comprimirse la tierra para formar un agujero negro? ¿Cuál es el radio al que tendría que comprimirse un kilo de tortillas para producir un agujero negro? ¿Cuál es el radio típico de un átomo? ¿Cuál es el radio típico de un núcleo atómico?