

Teoría Matemática de la Computación

Primer Problemario

Prof. Miguel A. Pizaña
10 de junio de 2020

- 1 Dudar de todo, al menos una vez en la vida.
- 2 ¿Qué es la duda sistemática de Descartes? ¿Qué significa “pienso luego existo”? ¿Qué es la “hipótesis del demonio malvado”?
- 3 (*) ¿Qué es “el cerebro en la cubeta”? ¿Qué tiene que ver esto con *la Matrix*?
- 4 La frase “esta frase es falsa” ¿es falsa o es verdadera?
- 5 Explique qué es un modelo y en qué es diferente de la realidad. En este contexto, explique el proceso de abstracción, deducción e interpretación.
- 6 ¿Cómo hace uno para medir qué tan bien aproxima un modelo matemático a la realidad? ¿Un modelo que no predice **exactamente** a la realidad debe ser descartado?
- 7 (*) ¿Qué tan cierto es el teorema: ‘ $1+1=2$ ’? Explique en detalle. Señale dos situaciones de la vida real en las que uno esperaría que el teorema fuera aplicable, pero de hecho no lo es. ¿Esto afecta la veracidad del teorema? ¿Cómo sabe uno cuándo puede uno aplicar el teorema y cuándo no?
- 8 (*) ¿Qué tan cierto es el teorema de Pitágoras? Explique con detalle. Señale dos situaciones de la vida real en las que uno esperaría que el teorema fuera aplicable, pero de hecho no lo es. ¿Esto afecta la veracidad del teorema? ¿Cómo sabe uno cuándo puede uno aplicar el teorema y cuándo no?

- 9 ¿La tierra es plana? ¿verdad que no? ¿Entonces por qué usamos el “tiro parabólico” si ese modelo está basado en una tierra plana? (dado que asume un campo gravitacional uniforme y paralelo dirigido hacia “abajo”) ¿Es en realidad parabólico el movimiento de una pelota lanzada? ¿Qué efectos alejan a la pelota del movimiento parabólico? Mencione al menos 5.
- 10 ¿Cómo puede argumentar sólidamente en favor de que la tierra es redonda? ¿Puede usted constatar este hecho por sus propios medios?
- 11 (*) ¿Es *posible* que el universo haya existido solamente desde hace 5 minutos? ¿Qué opina Bertrand Russell de ello? ¿Qué opina usted?
- 12 Suponga que lanza usted una moneda un millón de veces y en todas esas ocasiones usted ve a la moneda caer hasta el suelo en un lindo arco parabólico. ¿Eso es garantía de que la siguiente vez que usted lance la moneda, ésta no se va a convertir en un monstruo de espagueti volador? Explique en detalle.
- 13 Suponga que usted juega a la *lotería* un millón de veces y en todas esas ocasiones usted NO se saca el premio. ¿Eso es garantía de que la siguiente vez que usted juegue a la *lotería* tampoco se va a sacar el premio? Explique en detalle.
- 14 ¿Cómo explica al diferencia en sus respuestas (en caso de que la haya) a los dos problemas anteriores, siendo que la evidencia experimental es idéntica?
- 15 Pruebe que el problema del paro es indecidible. ¿Cuáles son los supuestos implícitos usados en la demostración?
- 16 ¿Un 'int' es un entero? ¿El siguiente código para o se encicla? Explique en detalle.

```

int x=1;
while(x>0){
    x++;
}

```

- 17 ¿Qué es un Autómata Finito Determinista? ¿Cómo se define? ¿Cuáles son sus principales características? ¿Para qué sirve? ¿Cómo se define el *lenguaje reconocido* por un AFD? ¿Cuáles aspectos de la realidad aproxima bien este modelo? ¿Cuáles aproxima mal?
- 18 Para cada uno de los siguientes lenguajes, proporcione un AFD que los reconozca (suponga que $\Sigma = \{0, 1\}$).
- Cadenas que terminen en 00.
 - Cadenas que contengan tres o más ceros consecutivos.
 - Cadenas que contengan tres pero no más de tres ceros consecutivos.
 - Cadenas que contengan la subcadena 000 exactamente una vez.
 - Cadenas que representen números enteros divisibles entre 3.
 - Cadenas que representen números enteros divisibles entre 7.
 - Cadenas que tengan un 0 en la décima posición contando desde la izquierda.
 - Lo mismo que el anterior, pero contando desde la derecha.
 - Cadenas que contengan a 0101 como subcadena.
 - Cadenas que NO contengan a 0101 como subcadena.
 - Cadenas tal que en cada subcadena de longitud 5 haya al menos 2 ceros.
 - Cadenas tal que en cada prefijo el valor absoluto de la diferencia entre el número de 1's y el número de 0's sea menor o igual a 5.
 - Cadenas como en el inciso anterior en donde además el número total de ceros es igual al número total de unos.
- 19 Haga un lista completa de todos los AFD con alfabeto binario que tengan uno o dos estados (son 66, pero muchos de ellos son equivalentes). ¿Qué lenguaje reconoce cada uno de ellos?
- 20 Demuestre que dado cualquier lenguaje **finito** L existe un AFD que lo reconoce.
- 21 ¿Existe un AFD que dada cualquier matriz de $n \times n$ ($n < 50$) de números de punto flotante de doble precisión (todo ello codificado como una cadena binaria) decida si es invertible? Explique.

- 22 Un lenguaje L es *cofinito* si su complemento $\bar{L} = \Sigma^* - L$ es finito. Demuestre que todo lenguaje cofinito es regular.
- 23 Enuncie el Lema Alfa
- 24 Demuestre el Lema Alfa.
- 25 Determinar si los siguientes lenguajes son regulares o no (Encuentre un AFD que lo reconozca o use el lema alfa).
- $\{\omega \in \{a, b, c, d\}^* : \omega \text{ contiene a la palabra } abcd \text{ como subcadena}\}$
 - $\{\omega \in \{a, b, c, d\}^* : \omega \text{ NO contiene a la palabra } abcd \text{ como subcadena}\}$
 - $L_m = \{0^{n+m}1^n : n \geq 0\} \cup \{0^n1^{n+m} : n \geq 0\}$
 - $\bigcup_{m=0}^{\infty} L_m$
(Aquí L_m es como en el problema anterior)
 - $\{0^{n^2} : n \geq 1\}$
 - $\{\text{Sonetos en espa\~{n}ol}\}$
(suponga que el conjunto de cadenas del “espa\~{n}ol” está bien definido)
 - $\{\text{Paréntesis balanceados}\} =$
 $= \{(), (()), ()(), ((())), ()()(), ()()(), ()()(), (((()))), ((()())), \dots, (((()))(), \dots\}$
 - Cadenas de paréntesis balanceados que no tengan más de un trillón de paréntesis.
 - $\{\text{Expresiones aritméticas}\} =$
 $= \{\omega \in \{+, -, *, /, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}^* : \text{etcétera}\}$
(considerar a “-” y “+” únicamente como operadores binarios).
 - $\{\text{Expresiones aritméticas con paréntesis}\} =$
 $= \{\omega \in \{+, -, *, /, (,), 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}^* : \text{etcétera}\}$
 - $\{\text{Declaraciones de variables en C}\}$
 - $\{\text{Programas en C}\}$
- 26 Pruebe que si L es un lenguaje regular, también es regular su complemento $\bar{L} := \Sigma^* \setminus L$.
- 27 Pruebe que si los lenguajes L_1 y L_2 son regulares, entonces también son regulares $L_1 \cap L_2$ y $L_1 \cup L_2$.

- 28 Probar que los lenguajes regulares son cerrados bajo concatenación y cerradura de Kleene.
- 29 ¿Qué es un AFN? ¿Qué es un AFN ϵ ? ¿En qué son iguales? ¿en qué son diferentes? ¿Son todos equivalentes?
- 30 ¿Qué es una expresión regular? ¿Son equivalentes a los AFD? ¿Qué significa eso?
- 31 Para cada uno de los lenguajes en el problema 18, dé una expresión regular que lo denote.
- 32 Muestre que $|\Sigma^*| = \aleph_0$ (para cualquier alfabeto Σ finito y no vacío).
- 33 Muestre que el conjunto de todos los lenguajes $\{L : L \subseteq \Sigma^*\} = 2^{\Sigma^*}$ tiene la cardinalidad del continuo: $|2^{\aleph_0}| = c = |\mathbb{R}|$ (para cualquier alfabeto Σ finito y no vacío).
- 34 Muestre que el conjunto de todas las definiciones en lenguaje matemático tiene cardinal \aleph_0 . Muestre que la mayoría de los número reales no son definibles. Si alguien “se roba” todos los reales no definibles ¿cómo nos daríamos cuenta? ¿Cómo podríamos denunciar el robo? ¿Existen realmente los números reales no definibles?
- 35 Sea x el mínimo número real positivo no definible. ¿Acabo de definir un número indefinible?